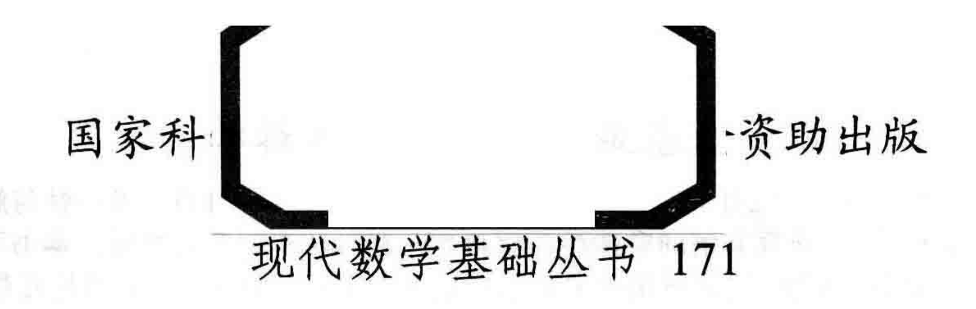


现代数学基础丛书 171

非线性高阶发展方程

陈国旺　陈翔英　著

科学出版社



国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代数学基础丛书 171

非线性高阶发展方程

陈国旺 陈翔英 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书研究非线性高阶发展方程定解问题解的局部存在性、唯一性与解的爆破现象，研究其解的整体存在性与唯一性以及解的渐近性质，本书不涉及 KdV 方程，讨论所用的主要工具是 Sobolev 空间理论. 本书共五章：第 1 章是预备知识；第 2 章论述非线性高阶双曲型方程的初边值问题；第 3 章论述非线性高阶双曲型方程的 Cauchy 问题；第 4 章论述非线性高阶抛物型方程；第 5 章论述非线性高阶发展方程组.

本书可作为偏微分方程、计算数学、泛函分析、数学物理和控制论等专业的本科生、研究生的教材和参考书，也可供从事相关专业研究的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性高阶发展方程/陈国旺，陈翔英著. —北京：科学出版社, 2017.6

(现代数学基础丛书；171)

ISBN 978-7-03-053319-7

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①陈… ②陈… Ⅲ. ①非线性方程 Ⅳ. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 130609 号

责任编辑：李静科／责任校对：邹慧卿
责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬



科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2017 年 6 月第一次印刷　印张：42　1/2
字数：854 000

定价：198.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003年8月

前 言

发展方程从广义角度讲, 是包含时间变量 t 的许多偏微分方程的统称, 用来描述物理、化学、生物或者其他自然科学中随时间变化的状态或过程. 从狭义角度讲, 它指可以用半群方法化为一个 Banach 空间中的抽象常微分方程的 Cauchy 问题的那些偏微分方程, 所以它是偏微分方程领域的重要组成部分.

众所周知, 偏微分方程领域包含许多分支. 迄今为止, 国内外论述偏微分方程各分支的专著已有很多, 对偏微分方程的发展与人才的培养起到了积极的推动作用. 例如, 关于椭圆型方程的专著见文献 [1]–[4]; 关于抛物型方程的专著见文献 [5]–[10]; 关于椭圆型与抛物型方程融合一体的专著见文献 [11]; 关于应用有限差分方法研究偏微分方程的专著见文献 [12]; 关于多种类型偏微分方程的专著见文献 [13]–[24]; 关于非线性发展方程的专著见文献 [25]. 从以上专著看出, 大部分论述的是二阶线性与非线性偏微分方程, 特别地, 文献 [25] 论述了二阶非线性发展方程. 而对于高阶 (三阶以上) 线性与非线性偏微分方程仅在少数专著中有个别论述.

从历史上看, 1872 年 Boussinesq J V 为了描述浅水波提出了四阶偏微分方程 Boussinesq 方程 (简称 Bq 方程) 等. 当今, 随着科学技术的高速发展, 不断提出的大量的非线性高阶发展方程有待解决.

因为非线性发展方程出自自然科学的诸多学科, 非线性程度和具体特点又是多种多样的, 所以常常只有在一些相当特殊的条件下, 才能得到解的整体存在性. 现在已有的结果, 常常是针对某一特定的物理模型方程, 对某一具体方程的定解问题而获得解的整体存在性. 研究非线性发展方程的方法还有待进一步丰富, 有待形成解决问题的一般理论.

为了使更多人踏进非线性高阶发展方程的研究领域, 我们将科研团队多年来获得的研究非线性高阶发展方程的一些成果和国内其他学者获得的一些成果, 其中大部分是已被 SCI 收录的论文, 整理并改写成容易读懂的书, 为读者提供国内研究非线性高阶发展方程的发展情况, 而把国外研究非线性高阶发展方程的相应成果列入了文献中, 从中可以看出国际上非线性高阶发展方程发展的趋势. 希望本书出版后, 有学者对其中某一类问题有兴趣时, 仅在查阅有关文献的基础上, 就可以开展研究工作.

由于非线性高阶发展方程的多样性与复杂性, 所以既考虑到研究问题的方法, 又尽量多地选择不同类型的方程 (限制三阶以上的方程) 研究其定解问题解的局部

存在性与唯一性、解的爆破现象、解的整体存在性与唯一性以及解的渐近性质. 由于篇幅限制, 本书不涉及 KdV 方程.

本书讨论所用的主要工具是 Sobolev 空间理论, 包括: 整数阶 Sobolev 空间, 分数阶 Sobolev 空间, 插值理论, 常用的引理、定理和一些不等式. 凡是涉及这方面的内容都在第 1 章预备知识中做了介绍, 而且指出有证明的文献和专著. 本书的内容基本上自成一体, 熟悉 Sobolev 空间理论的读者, 阅读本书不会碰到实质性的困难.

本书共五章. 下面简要介绍各章内容.

第 1 章是预备知识. 为阅读本书方便起见, 本章讲述本书用到的记号、术语、不等式、基本空间、Sobolev 空间、Sobolev 嵌入定理, 以及常用的一些引理、定理和不等式.

第 2 章论述非线性高阶双曲型方程的初边值问题, 分 15 节. 本章讨论广义 IMBq 方程和广义立方双色散方程等 15 个非线性高阶发展方程的初边值问题和时间周期问题; 主要应用压缩映射原理、Galerkin 方法、位势井方法和临界点理论证明非线性高阶双曲型方程初边值问题解的局部存在性与唯一性、解的整体存在性与唯一性; 利用凸性引理 (见引理 1.8.7) 和满足常微分不等式 (见引理 1.8.1 和引理 1.8.2) 的方法证明解的爆破, 并利用一个积分不等式 (见引理 1.8.10) 研究解的渐近性质.

第 3 章论述非线性高阶双曲型方程的 Cauchy 问题, 分 14 节. 本章讨论一类 N 维非线性波动方程和广义 Benney-Luke 方程等 14 个非线性高阶双曲型方程的 Cauchy 问题; 主要应用压缩映射原理、Galerkin 方法、位势井方法、压缩映射原理和基于谱和扰动理论的方法证明非线性高阶双曲型方程 Cauchy 问题局部解的存在性与唯一性、解的整体存在性与唯一性; 应用凸性引理证明解的爆破.

第 4 章论述非线性高阶抛物型方程, 分 7 节. 本章讨论人口问题中的一广义扩散模型方程和 Cahn-Hilliard 方程等 7 个非线性高阶抛物型方程的初边值问题和 Cauchy 问题; 主要应用压缩映射原理、Leary-Schauder 不动点定理、Galerkin 方法、先验估计方法、位势井方法和有限差分法证明非线性高阶抛物型方程的初边值问题、Cauchy 问题和时间周期解问题局部解的存在性与唯一性、解的整体存在性与唯一性和解的渐近性质.

第 5 章论述非线性高阶发展方程组, 分 6 节. 本章讨论源于 DNA 的广义非线性高阶发展方程组以及非线性 Schrödinger 方程与广义 IMBq 方程的耦合方程组等 6 个非线性高阶发展方程组的初边值问题和 Cauchy 问题; 主要应用压缩映射原理和 Galerkin 方法证明非线性高阶发展方程组的初边值问题和 Cauchy 问题局部解的存在性与唯一性、解的整体存在性与唯一性; 利用凸性引理研究解的爆破.

本书由郑州大学的陈国旺撰写了第 1~3 章, 郑州电力高等专科学校的陈翔英撰写了第 4, 5 章. 在本书撰写过程中, 苗长兴教授、杨志坚教授、王书彬教授和徐

润章教授曾提出过宝贵意见, 在此向他们表示感谢. 本书获得国家科学技术学术著作出版基金的资助, 特表示感谢!

由于作者学识有限, 书中难免存在不妥和疏漏之处, 真诚地欢迎读者批评指正.

陈国旺　陈翔英

2016 年 9 月

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

为阅读本书方便起见, 本章介绍今后用到的记号、术语、常用的不等式、基本函数空间、Sobolev 空间、Sobolev 空间嵌入定理和常用的一些引理和定理等.

1.1　记号和术语

$\mathbb{R}^N(N \geqslant 1)$ 表示 N 维 Euclid 空间; $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中的任意点; 当 $N=1$ 时, 记 $\mathbb{R}^1=\mathbb{R},\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, Ω 表示 $\mathbb{R}^N$ 中的开集, 即包含在一个半径充分大的球内的任意连通开集.

$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界.

$\overline{\Omega}$ 表示 Ω 的闭包, 因此 $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$.

设 A 与 B 是 $\mathbb{R}^N$ 中的两个集合, 所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的交集, 记为 $A\cap B$. 由集合 A 与集合 B 的一切元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A\cup B$.

$(\mathbb{R}^N)'$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 的对偶空间.

$x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_Ny_N$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中的两个向量 x 与 y 的点乘, 也记为 $\langle x,y\rangle$.

$\mathbb{Z}_+^N$ 表示 N 个 $\mathbb{Z}_+$ 的积, $\mathbb{Z}_+$ 是非负整数的集合.

$\mathbb{C}$ 表示复平面, 若 $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}z$ 表示复向量 z 的实部, $\mathrm{Im}z$ 表示复向量 z 的虚部, 虚数 $i=\sqrt{-1}$.

$\mathbb{N}$ 表示自然数集合.

$|x|=\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 表示 Euclid 空间 $\mathbb{R}^N$ 中的范数或 $\mathbb{R}^N$ 中向量 x 的长度.

∞ 表示正无穷大, $-\infty$ 表示负无穷大.

sup 表示一个实数集合的上确界.

inf 表示一个实数集合的下确界.

$S:E\mapsto F$ 表示定义在集合 E 中, 取值在集合 F 的映射 S.

$\exists$ 表示存在, $\equiv$ 表示右端是左端的定义, $\Box$ 表示证毕.

设 $u(x,t)$ 是 $x\in\mathbb{R}^N$, $t>0$ 的可导函数, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 表示 u 关于 $x_i(i=1,2,\cdots,N)$ 的偏导数, 也记为 u_{x_i} 或 $\partial_{x_i}u$ 等, 而只有一个变量时, 也记为 u'.

如果 $u(x,t)$ 对 x 是 $k(k>0$ 是整数) 阶可导, 记为 $u_{x^k}=\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 表示 u 对 t 的偏导数, 也记为 u_t 或 $\partial_t u$ 等, 若 $u(t)$ 仅是 t 的函数, 则记为 $\dfrac{du}{dt}$ 或 $\dot{u}(t)$.

设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$, 如果它的每一个分量都是非负整数, 就称 α 是一 N 重指数 (指标), 并记 $|\alpha|=\sum_{i=1}^N\alpha_i$, 还称 $|\alpha|$ 是 N 重指数 α 的长度. 记 $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, 则

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_N^{\alpha_N}$$

表示 $|\alpha|$ 阶微分算子, $D^\alpha f(x)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_N}^{\alpha_N}}f(x), D^{(0,0,\cdots,0)}f(x)=f(x)$.

设 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)$ 和 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$ 是两个 N 重指数, 如果 $\beta_i\leqslant\alpha_i(i=1,2,\cdots,N)$, 称 $\beta\leqslant\alpha$, 此时 $\alpha-\beta$ 也是 N 重指数. 记

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_N!.$$

若 $\beta\leqslant\alpha$, 则记 $\dbinom{\alpha}{\beta}=\dbinom{\alpha_1}{\beta_1}\dbinom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\dbinom{\alpha_N}{\beta_N}$.

$\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dfrac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_N}\right)=\text{grad}$ 表示 N 维梯度算子, $|\nabla u|=\left(\sum_{i=1}^N u_{x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_N^2}$ 表示 N 维 Laplace 算子.

$\Delta^2=\left(\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^4}+2\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^4}{\partial x_2^4}+2\dfrac{\partial^4}{\partial x_2^2\partial x_3^2}+\dfrac{\partial^4}{\partial x_3^4}+2\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_3^2}\right)=\nabla^4$表示 3 维双调和算子, 类似可定义 N 维双调和算子.

$\nabla^3=\nabla\Delta$.

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f(x)$ 的 Fourier 变换记为

$$\hat{f}(\xi)=\mathscr{F}(f)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,$$

而 $f(x)$ 的 Fourier 逆变换为

$$f(x)=\mathscr{F}^{-1}f(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

设 $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$, $f(x)$ 的 Fourier 变换记为

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}\int_{\mathbb{R}^N}f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,$$

令 $\mathscr{F}^{-1}f=\mathscr{F}f(-x)$, 则 $\mathscr{F}^{-1}$ 是 $\mathscr{F}$ 的逆变换.

记 $(-\Delta)^{-\alpha}\varphi = \mathscr{F}^{-1}[|\xi|^{-\alpha}\mathscr{F}\varphi]$, 其中 α 是非负整数.

如果用同一记号 C 表示每一个正常数时, 将不作说明, 记号 $A \lesssim B$ 表示存在一个常数 C 使得 $A \leqslant CB$.

记号 $A \sim B$ 表示 $B \lesssim A \lesssim B$.

关于人们通用的一些数学记号和术语将直接应用, 这里就不一一列出了.

1.2 一些常用的不等式

1.2.1 Cauchy 不等式

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

1.2.2 带 ε 的 Cauchy 不等式

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \quad (a, b > 0, \varepsilon > 0).$$

1.2.3 Young 不等式

设 $1 < p,\ q < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0).$$

特别地, 当 $p = q = 2$ 时, 上述不等式也就是 Cauchy 不等式.

1.2.4 带 ε 的 Young 不等式

设 $1 < p,\ q < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}} b^q}{q}, \quad ab \leqslant \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (a, b > 0, \varepsilon > 0),$$

其中 $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$.

1.2.5 C_p 不等式

设 a, b 为实数, $p > 0$, 则成立

$$(|a| + |b|)^p \leqslant \begin{cases} |a|^p + |b|^p, & 0 < p \leqslant 1, \\ 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p), & p > 1. \end{cases}$$

1.2.6 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|x \cdot y| \leqslant |x||y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^N).$$

1.2.7 离散型的 Hölder 不等式

如果 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$ 属于 $\mathbb{R}^N$, $x_i,y_i\geqslant 0$, $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则

$$\sum_{i=1}^N x_iy_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^N x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^N y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.2.8 离散型的 Minkowski 不等式

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$ 属于 $\mathbb{R}^N$, $x_i,y_i\geqslant 0$, $p>1$, 则

$$\left[\sum_{i=1}^N (x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^N x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^N y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2.9 Gronwall 不等式 (微分形式)

(1) 设 $w(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负、绝对连续函数, 且对几乎处处的 t 满足

$$\dot{w}(t)\leqslant \phi(t)w(t)+\psi(t),$$

其中 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可积函数, 则对所有的 $0\leqslant t\leqslant T$ 成立

$$w(t)\leqslant e^{\int_0^t \phi(\tau)d\tau}\left[w(0)+\int_0^t \psi(\tau)d\tau\right].$$

(2) 特别地, 如果在 $[0,T]$ 上

$$\dot{w}(t)\leqslant \phi(t)w(t) \quad 和 \quad w(0)=0,$$

那么在 $[0,T]$ 上

$$w(t)\equiv 0.$$

1.2.10 Gronwall 不等式 (积分形式)

(1) 设 $w(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可积函数, 若几乎处处满足

$$w(t)\leqslant C_1\int_0^t w(\tau)d\tau + C_2,$$

其中 C_1 和 C_2 是非负常数, 则对于几乎处处的 $0\leqslant t\leqslant T$ 成立

$$w(t)\leqslant C_2e^{C_1t}.$$

(2) 特别地, 如果对于几乎处处的 $0 \leqslant t \leqslant T$ 有

$$w(t) \leqslant C_1 \int_0^t w(\tau)d\tau,$$

那么几乎处处成立

$$w(t) = 0.$$

1.2.11 Jensen 不等式

$\phi(u)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的 (下) 凸函数, 定义在 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta,$$

非负函数 $p(x)$ 满足

$$Q = \int_a^b p(x)dx > 0,$$

则在下述积分存在的情况下, 有

$$\phi\left(\frac{1}{Q}\int_a^b f(x)p(x)dx\right) \leqslant \frac{1}{Q}\int_a^b \phi[f(x)]p(x)dx.$$

如果 $\phi(u)$ 是上凸函数, 则不等号反向.

1.3 基本函数空间的定义

定义 1.3.1 设 X 是一非空集合. X 称为距离空间(又称度量空间), 是指在 X 上定义了一个双变量的实值函数 $\rho(x, y)$ 满足下列三个公理:

(1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, 而且 $\rho(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$;

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ $(x, y, z \in X)$,

其中 ρ 称为 X 上的一个距离.

定义 1.3.2 设 X 是一距离空间. 称 $L : X \mapsto X$ 是一个压缩映射, 如果存在 $0 < a < 1$, 使得 $\rho(Lx, Ly) \leqslant a\rho(x, y), \forall x, y \in X$, 其中符号 $\forall$ 表示"对于每一个".

定理 1.3.1 (Banach 不动点定理-压缩映射原理) 设 X 是一完备的距离空间, L 是将 X 映入自身的一个压缩映射, 则 L 存在唯一的不动点, 即存在唯一的 $x \in X$, 使得 $Lx = x$.

定义 1.3.3 设 X 是由元素 $x, y, z, \cdots$ 组成的集合. 在集合 X 中定义加法和数乘运算如下:

(1) X 中的加法运算, 即 X 中每一对元素 x 和 y 与 X 中的元素 z 对应, 称为 x 与 y 的和, 并记为 $x+y$:

$$z = x + y.$$

(2) X 中的数乘运算, 即 X 中每一个元素 x 和数域 $\mathbb{K}$($\mathbb{K}$ 是实 (或复) 数域) 中任一数 a (称为标量) 对应 X 中一元素 z, 称为 a 和 x 的积, 记为 ax:

$$z = ax.$$

(3) 集合 X 在其内定义了加法运算和数乘运算后, 称为实 (或复) 线性空间, 如果满足下列公理:

(i) $x + y = y + x,\ \forall x, y \in X$;

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z,\ \forall x, y, z \in X$;

(iii) X 中存在唯一的元素 θ, 称为零元素, 使得对于每一个元素 $x \in X$,

$$x + \theta = x;$$

(iv) 对于 $x \in X$ 在 X 中存在唯一的元素 $-x$, 使得

$$x + (-x) = \theta;$$

(v) $a(x + y) = ax + ay, \forall a \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(vi) $(a + b)x = ax + bx,\ a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(vii) $a(bx) = (ab)x,\ \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(viii) $1 \cdot x = x$.

线性空间的元素又称为向量, 因而线性空间也称为向量空间.

定义 1.3.4　如果集合 X 满足下列两类条件, 则称 X 为线性赋范空间:

(1) X 是线性空间.

(2) X 是赋范空间, 即每一个元素 $x \in X$, 有唯一的一个实数与之对应, 此数称为元素 x 的范数, 记为 $\|x; X\|$ 或 $\|x\|_X$, 且满足下列范数公理:

(i) $\|x; X\| \geqslant 0$, 而且 $\|x; X\| = 0$, 当且仅当 $x = \theta$ (正定性);

(ii) $\|x + y; X\| \leqslant \|x; X\| + \|y; X\|$ (三角不等式);

(iii) $\|ax; X\| = |a|\|x; X\|(a \in \mathbb{R})$ (齐次性公理).

设 x, y 是线性赋范空间 X 中的一对元素, 称

$$\rho(x, y) = \|x - y; X\|$$

为 X 中两点 x 和 y 之间的距离. 如果按上式定义距离, 每一线性赋范空间是一距离空间.

定义 1.3.5 集合 $C^m(\Omega)$ 表示由定义在 Ω 上所有连续且具有 $|\alpha|(\leqslant m)$ 阶连续偏导数 $D^\alpha f(x)$ 的函数 $f(x)$ 组成的集合.

简记 $C^0(\Omega)$ 为 $C(\Omega)$. 令 $C^\infty(\Omega)=\cap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$. $C^m(\Omega)$ 中的函数本身或某些阶的偏导数可以在 Ω 上无界.

定义 1.3.6 $C_B^m(\Omega)$ 表示由 $f\in C^m(\Omega)$ 和它的偏导数 $D^\alpha f(x)(1\leqslant|\alpha|\leqslant m)$ 在 Ω 上有界的全体函数组成的集合.

如果在 $C_B^m(\Omega)$ 中用自然法则定义加法运算和数乘运算, 则易证 $C_B^m(\Omega)$ 是线性空间. 如果 $C_B^m(\Omega)$ 中元素的范数由等式

$$\|f;C_B^m(\Omega)\|=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha f(x)|$$

定义, 则 $C_B^m(\Omega)$ 是一线性赋范空间. 若 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, 可以证明空间 $C_B^m(\Omega)$ 是 Banach 空间.

定义 1.3.7 线性空间 $C^m(\overline{\Omega})$ 由 $C^m(\Omega)$ 中这样的函数 $f(x)$ 组成, $f(x)$ 本身及其偏导数 $D^\alpha f(x)(1\leqslant|\alpha|\leqslant m)$ 均在 Ω 上有界和一致连续.

如果 $C^m(\overline{\Omega})$ 中元素的范数由等式

$$\|f;C^m(\overline{\Omega})\|=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\max_{x\in\overline{\Omega}}|D^\alpha f(x)|$$

定义, 且 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, 易证 $C(\overline{\Omega})$ 和 $C^m(\overline{\Omega})$ 均为 Banach 空间.

定理 1.3.2 (Ascoli-Arzelá定理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, U 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的子集. 如果

(1) U 是一致有界的, 即存在常数 $K>0$, 满足

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)|\leqslant K,\quad \forall f\in U;$$

(2) U 是等度连续的函数族, 即对任意给定的 $\varepsilon>0$, 总能找到实数 $\delta>0$, 当 $x,y\in\Omega$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, 成立

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\quad \forall f\in U,$$

则从 U 中可以抽出一个函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 中收敛于 $f(x)$.

由定理 1.3.2 可知, $C(\overline{\Omega})$ 中满足 Ascoli-Arzelá定理条件的集合 U 是列紧集.

类似地可定义 $C^m(\mathbb{R}^N)$ 和 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 空间.

设 Ω 和 G 都是 $\mathbb{R}^N$ 中的子集, 假如 G 的闭包 $\overline{G}\subset\Omega$, 而且 $\overline{G}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界闭集, 即说 G 是紧集, 则记为 $G\subset\subset\Omega$. 设 $f(x)$ 是定义在 $G\subset\mathbb{R}^N$ 上的函数, 集合 $\{x\in G|f(x)\neq 0\}$ 的闭包, 即 $\overline{\{x\in G|f(x)\neq 0\}}$ 定义为 $f(x)$ 的支集, 记为 $\text{supp}f$.

设 $f \in C(\Omega)$, 且 $\operatorname{supp} f \subset\subset \Omega$, 这样的函数全体组成 $C_c(\Omega)$. 设 $f \in C^\infty(\Omega)$ 且 $\operatorname{supp} f \subset\subset \Omega$, 这样的函数全体组成 $C_c^\infty(\Omega)$. 类似地可以定义 $C_c^m(\Omega)$ 和 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. 把 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中函数的定义域限制在 Ω 内, 所得函数全体组成 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \Omega)$.

定义 1.3.8　设 $0 < \lambda \leqslant 1$. 我们定义 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是 $C^m(\overline{\Omega})$ 的子空间, 它由 $C^m(\overline{\Omega})$ 中的一些这样的函数 $f(x)$ 组成, 对于 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, $D^\alpha f(x)$ 在 Ω 中满足指数为 λ 的 Hölder 条件, 即存在常数 $K > 0$, 使得

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leqslant K|x-y|^\lambda, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

在 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中用自然法则定义加法运算和数乘运算. 对于 $0 < \lambda \leqslant 1$, 引入 Hölder 半范数

$$\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

后, $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 的元素 $f(x)$ 的范数由下式确定:

$$\|f; C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\| = \|f; C^m(\overline{\Omega})\| + \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda},$$

那么 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是一线性赋范空间.

注意当 $\lambda = 1$ 时, 满足 Hölder 条件的函数 $f(x)$ 就是满足 Lipschitz 条件的函数. 易证当 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域时, 则 $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ 和 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 均为 Banach 空间.

定义 1.3.9　如果集合 H 满足下列五类条件, 则称 H 为 Hilbert 空间:

(1) H 为线性空间, 数乘运算中的数可取复数.

(2) H 中的任意一对有序元素 x, y 有唯一的复数与之对应, 此数称为 x 和 y 的内积, 记为 (x, y), 并满足以下条件:

(i) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, 其中 $\bar{a}$ 表示 a 的共轭复数, 所以 (x, x) 是实数;

(ii) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

(iii) $(ax, y) = a(x, y)$, $a \in \mathbb{C}$;

(iv) $(x, x) \geqslant 0$, 而且 $(x, x) = 0$, 当且仅当 $x = \theta$.

实数 $\sqrt{(x,x)}$ 称为元素 x 在 H 中的范数, 记为 $\|x; H\|$. 容易证明此范数满足定义 1.3.4 中的范数公理.

(3) H 在其范数意义下是 Banach 空间.

(4) 对于任意正整数 n, 在空间 H 中可以找出 n 个线性无关的元素.

(5) H 是可分的.

定义 1.3.10　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的可测集合, $0 < p < \infty$ 是实数. 用 $L^p(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上所有满足

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$$

的可测函数 $f(x)$ 构成的函数类.

若 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ 中的函数 $f(x)$ 的范数定义为

$$\|f; L^p(\Omega)\| = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

可知 $L^p(\Omega)$ 是一线性赋范空间. 有时将 $\|f; L^p(\Omega)\|$ 记为 $\|f\|_{L^p(\Omega)}$.

定义 1.3.11 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的可测集合, 用 $L^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 中除去一个零测集外是有界可测函数 $f(x)$ 的全体.

定义 $L^\infty(\Omega)$ 中的函数 $f(x)$ 的范数之前, 先说明函数 $f(x)$ 的实质上界 (或本质上界). 设 $f \in L^\infty(\Omega)$, 那么存在与 $f(x)$ 有关的一个常数 $K > 0$, 使得不等式

$$|f(x)| \leqslant K$$

几乎处处成立, 这样的 K 显然有无穷多个, 其下确界记作 $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$, 称为 $f(x)$ 在 Ω 上的实质上界 (或本质上界).

如果定义 $L^\infty(\Omega)$ 中的函数的范数为

$$\|f; L^\infty(\Omega)\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

可知 $L^\infty(\Omega)$ 是赋范空间.

易证 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 是 Banach 空间.

注 1.3.1 $L^2(\Omega)$ 的内积记为 $(\cdot, \cdot)$.

定理 1.3.3 设 $1 < p < \infty$, 集合 $M \subset L^p(\Omega)$ 是弱紧的充要条件是它有界.

1.4 Hölder 不等式, Minkowski 不等式和 $L^p(\Omega)$ 范数的内插不等式

设 $1 < p < \infty$, 由等式 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ 确定的 p' 称为 p 的共轭指数. 显然这是一对相互共轭的指数, 且

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad p' - 1 = \frac{1}{p-1}.$$

从这组等式可以看出, 当 $p \in (1, 2]$ 时, $p' \in [2, \infty)$. 反之, 当 $p \in [2, \infty)$ 时, $p' \in (1, 2]$. 在证明下面的不等式时, 出现的 $Q(x)$ 是定义在 Ω 上的几乎处处大于零的可测函数且有上界, 我们称它为权函数.

1.4.1　带权的 Hölder 不等式

设 $1 < p < \infty$, p 和 p' 是一对共轭指数. 如果

$$\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)dx < \infty, \quad \int_\Omega |G(x)|^{p'} Q(x)dx < \infty,$$

则

$$\left|\int_\Omega F(x)G(x)Q(x)dx\right| \leqslant \left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |G(x)|^{p'} Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

1.4.2　广义带权的 Hölder 不等式

(1) 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n > 0$ 且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. 如果有

$$\int_\Omega |F_i(x)|^{\frac{1}{p_i}} Q(x)dx < \infty, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则成立不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega F_1(x)F_2(x)\cdots F_n(x)Q(x)dx\right| \\ \leqslant &\left[\int_\Omega |F_1(x)|^{\frac{1}{p_1}} Q(x)dx\right]^{p_1} \times \left[\int_\Omega |F_2(x)|^{\frac{1}{p_2}} Q(x)dx\right]^{p_2} \times\cdots\times \left[\int_\Omega |F_n(x)|^{\frac{1}{p_n}} Q(x)dx\right]^{p_n}.\end{aligned}$$

(2) 设 $r > 0$, $p_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 且满足 $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_n}$. 如果

$$\int_\Omega |G_i(x)|^{p_i} Q(x)dx < \infty, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则成立不等式

$$\left[\int_\Omega |G_1(x)G_2(x)\cdots G_n(x)|^r Q(x)dx\right]^{\frac{1}{r}} \leqslant \prod_{i=1}^n \left[\int_\Omega |G_i(x)|^{p_i} Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p_i}}.$$

1.4.3　带权的 Minkowski 不等式

设 $1 \leqslant p < \infty$, 则

$$\left[\int_\Omega |F(x) + G(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega |G(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

1.4.4　广义带权的 Minkowski 不等式

设 $1 \leqslant p < \infty$, 则成立

$$\begin{aligned}&\left[\int_\Omega |F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} \\ \leqslant &\left[\int_\Omega |F_1(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left[\int_\Omega |F_n(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

1.4.5 带权的 Hölder 逆不等式

设 $0<p<1$, 如果

$$\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)dx<\infty,\quad 0<\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)dx<\infty,$$

其中 $p'=\dfrac{p}{p-1}<0$ 是 p 的共轭指数, 则

$$\int_\Omega |F(x)G(x)|Q(x)dx \geqslant \left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega |G(x)|^{p'}Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

1.4.6 带权的 Minkowski 逆不等式

设 $0<p<1$, 则

(1)

$$\left[\int_\Omega (|F(x)|+|G(x)|)^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant \left[\int_\Omega |F(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_\Omega |G(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}};$$

(2)

$$\left[\int_\Omega \sum_{i=1}^n |F_i(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant \sum_{i=1}^n\left[\int_\Omega |F_i(x)|^p Q(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

注 1.4.1 如果取 $Q(x)=1$, 则 1.4.1–1.4.6 子节中的不等式仍成立.

1.4.7 $L^p(\Omega)$ 空间范数的内插不等式

设 $1\leqslant s<r<t\leqslant\infty$ 和对于满足 $0<\theta<1$ 的 θ 有等式

$$\frac{1}{r}=\frac{\theta}{s}+\frac{1-\theta}{t}.$$

如果 $f\in L^s(\Omega)\cap L^t(\Omega)$, 则 $f\in L^r(\Omega)$ 和

$$\|f;L^r(\Omega)\|\leqslant \|f;L^s(\Omega)\|^\theta\|f;L^t(\Omega)\|^{1-\theta}.$$

1.4.8 Minkowski 积分不等式

设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^m$ 上的可测函数. 若对于几乎处处 $y\in\mathbb{R}^m$, 函数 $f(\cdot,y)\in L^P(\mathbb{R}^N)$, 且函数 $y\mapsto\|f(\cdot,y)\|_{p,\mathbb{R}^N}$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^m)$, 则对于几乎处处的 x, $f(x,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^m)$, x 的函数 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy$ 属于 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 和

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_{\mathbb{R}^m}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|f(x,y)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}dy,$$

即

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy \right\|_{p,\mathbb{R}^N} \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \|f(\cdot, y)\|_{p,\mathbb{R}^N} dy.$$

注 1.4.2 Minkowski 积分不等式中的 $\mathbb{R}^m$ 取为区间 $\Omega \subset [0, \infty)$, Minkowski 积分不等式仍成立.

1.5 整数阶 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$

定义 1.5.1 设 α 是 N 重指数, m 是非负整数, 集合 $W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) | D^\alpha f \in L^p(\Omega),\ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\}$ 的元素 $f(x)$ 的范数定义为

$$\|f; W^{m,p}(\Omega)\| = \|f\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f; W^{m,\infty}(\Omega)\| = \|f\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

易知 $W^{m,p}(\Omega)$ 是一线性赋范空间, 称 $W^{m,p}(\Omega)$ 为 Ω 上的整数阶 Sobolev 空间.

如果 $p = 2$, 常常把 $W^{m,2}(\Omega)$ 写成 $H^m(\Omega)(m = 0, 1, \cdots)$, 其范数记为 $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$. 易证 $W^{m,p}(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 是一 Banach 空间.

引理 1.5.1 设 $a \in C_c^\infty(\Omega)$ 和 $f \in W^{m,p}(\Omega)$, 则 $af \in W^{m,p}(\Omega)$, 且对于满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的 N 重指数 α 成立 Leibniz 公式

$$D^\alpha(af) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha - \beta} f,$$

其中 $\displaystyle\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}$.

定义 1.5.2 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是集合 $C_c^\infty(\Omega)$ 关于空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 范数的完备化空间.

1.5.1 整数阶 Sobolev 空间和连续函数空间的嵌入定理

定理 1.5.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是满足锥条件的区域, $j \geqslant 0$ 和 $m \geqslant 1$ 为整数, $1 \leqslant p < \infty$. 如果 $mp > N$ 或者 $m = N$ 和 $p = 1$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega),$$

其中的符号 “$\hookrightarrow$” 表示嵌入, 而这里的嵌入常数仅依赖于 N, m, p, j 和决定 Ω 满足锥条件区域的锥 C.

定理 1.5.2 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是满足锥条件的区域, 并设对于 $1 \leqslant k \leqslant N$, Ω_k 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中的 k 维平面 U 的交 (如果 $k = N$, 则 $\Omega_k = \Omega$). 令 $j \geqslant 0, m \geqslant 1$ 为整数和 $1 \leqslant p < \infty$. 如果 $mp > N$ 或者 $m = N$ 和 $p = 1$, 则对于 $p \leqslant q \leqslant \infty$, 有

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k),$$

特别地, 对于 $p \leqslant q \leqslant \infty$, 有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

定理 1.5.3 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是满足锥条件的区域, 并设对于 $1 \leqslant k \leqslant N$, Ω_k 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 U 的交. 若 $m \geqslant 1, j \geqslant 0$ 为整数, $p > 1, mp < N$ 和 $N - mp < k \leqslant N$, 则对于 $p \leqslant q \leqslant p^* = \dfrac{kp}{N - mp}$, 有

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k).$$

特别地, 对于 $p \leqslant q \leqslant p^* = \dfrac{Np}{N - mp}$, 有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

这里的嵌入常数仅依赖于 N, m, p, q, j, k 和决定 Ω 满足锥条件的锥 C.

定理 1.5.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是满足锥条件的区域, 并设对于 $1 \leqslant k \leqslant N$, Ω_k 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中的 k 维平面 U 的交. 如果 $m \geqslant 1, j \geqslant 0$ 为整数, $mp = N$ 且 $p > 1$, 则对于 $p \leqslant q < \infty$, 有

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k),$$

特别地, 对于 $p \leqslant q < \infty$, 有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

定理 1.5.5 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界锥形区域, 并设对于 $1 \leqslant k \leqslant N, \Omega_k$ 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 U 的交. 如果 $1 \leqslant k \leqslant N$, $m \geqslant 1, j \geqslant 0$ 为整数, $mp < N$, $p = 1$ 和 $N - m < k \leqslant N$, 则

$$W^{m+j,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k), \quad 1 \leqslant q \leqslant 1^* = \frac{k}{N - m}.$$

特别地,

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leqslant q \leqslant 1^* = \frac{N}{N - m}.$$

定理 1.5.6 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界锥形区域, 并设对于 $1 \leqslant k \leqslant N, \Omega_k$ 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 U 的交. 若 $m \geqslant 1, j \geqslant 0$ 为整数, $m < N, p = 1$ 和 $k = N - m$, 则

$$W^{m+j,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,1}(\Omega_k), \quad 1 \leqslant q \leqslant 1^* = \frac{k}{N - mp} = 1.$$

特别地,

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leqslant q \leqslant 1^* = \frac{N}{N-m}.$$

定理 1.5.7　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是 L 型区域, $m \geqslant 1, j \geqslant 0$ 是整数和 $mp > N \geqslant (m-1)p$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}),$$

其中 λ 由下列条件确定:

(1) 若 $N > (m-1)p$, 则 $0 < \lambda \leqslant m - \dfrac{N}{p}$;

(2) 若 $N = (m-1)p$ 和 $p > 1$, 则 $0 < \lambda < 1$;

(3) 若 $N = m-1$ 和 $p = 1$, 则 $0 < \lambda \leqslant 1$. 特别地, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. 嵌入常数依赖于 m, p, N 和 L 型区域定义中的参数 δ 和 M.

定理 1.5.8　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域, $m \geqslant 0$ 是整数和 $0 < \lambda < \mu \leqslant 1$, 则成立下列嵌入关系:

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}),$$
$$C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}),$$
$$C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}).$$

如果 Ω 是凸区域, 有进一步的嵌入关系

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\overline{\Omega}),$$
$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}).$$

1.5.2　整数阶 Sobolev 空间和连续空间的紧嵌入定理

定理 1.5.9　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, $0 < \mu \leqslant 1$, 则

$$C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}),$$

其中符号 “$\hookrightarrow\hookrightarrow$” 表示紧嵌入.

定理 1.5.10　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域和 $0 < \lambda < \mu \leqslant 1$, 则

$$C^{m,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}).$$

定理 1.5.11　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界凸区域和 $0 < \lambda < \mu \leqslant 1$, 则

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$$
$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}).$$

定理 1.5.12 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中满足锥条件的区域, Ω_0 是 Ω 的有界子区域, 而 Ω_0^k 是 Ω_0 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 U 的交. 又设 $j \geqslant 0, m \geqslant 1$ 是整数, $1 \leqslant p < \infty$ 和 $mp < N$. 如果 $0 < N - mp < k \leqslant N$ 和 $1 \leqslant q < \dfrac{kp}{N-mp}$, 则成立

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k).$$

定理 1.5.13 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的有界锥形区域, Ω_0 是 Ω 的有界子区域, 而 Ω_0^k 是 Ω_0 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 U 的交, 又设 $j \geqslant 0, m \geqslant 1$ 是整数, $1 \leqslant p < \infty$ 和 $N = mp$. 如果 $1 \leqslant k \leqslant N$ 和 $1 \leqslant q < \infty$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k).$$

定理 1.5.14 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的 L 型区域, Ω_0 是 Ω 的有界子区域. 又设 $j \geqslant 0$ 和 $m \geqslant 1$ 是整数以及 $1 \leqslant p < \infty$.

(1) 如果 $mp > N$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^j(\bar{\Omega}_0);$$

(2) 如果 $mp > N \geqslant (m-1)p$ 和 $0 < \lambda < m - \dfrac{N}{p}$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}_0).$$

定理 1.5.15 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中满足锥条件的区域, Ω_0 是 Ω 的有界子区域, 而 Ω_0^k 是 Ω_0 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 U 的交. 令 $j \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ 是整数, $1 \leqslant p < \infty$ 和 $mp > N$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_B^j(\Omega_0),$$

且如果 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 则

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k).$$

1.6 插值定理和 Poincaré 不等式

下面对于 $1 \leqslant p < \infty$ 和正整数 $j, 0 \leqslant j \leqslant m$, 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上引入泛函 $|\cdot|_{j,p}$ 如下:

$$|f|_{j,p} = |f|_{j,p,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha|=j} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

显然, $|f|_{0,p} = \|f\|_{0,p} = \|f\|_p = \|f; L^p(\Omega)\|$, 并且

$$\|f; W^{m,p}(\Omega)\| = \|f\|_{m,p} = \left[\sum_{j=0}^m |f|_{j,p}^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

如果 $j \geqslant 1$, 则 $|\cdot|_{j,p}$ 是一个半范数.

定理 1.6.1　存在常数 $K = K(m,p,N)$, 使对任意的 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, 任意的 $\varepsilon > 0$, 任意的整数 $j, 0 \leqslant j \leqslant m-1$ 和任意的 $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 成立

$$|f|_{j,p} \leqslant K\varepsilon|f|_{m,p} + K\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}}|f|_{0,p}.$$

定理 1.6.2　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是具有一致锥条件的区域, 并且设 ε_0 是有限正数, 则存在依赖于 N, m, p, ε_0 和决定 Ω 满足锥条件的锥 C 的常数 K, 使得对任意的 ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, 任意的整数 j, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ 以及任意的 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 成立

$$|f|_{j,p} \leqslant K\varepsilon|f|_{m,p} + K\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}}|f|_{0,p}.$$

定理 1.6.3　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界锥形区域, 则定理 1.6.2 的结论对 Ω 仍成立.

推论 1.6.1　在下列空间:

(1) $W_0^{m,p}(\Omega)$ 对任意区域 Ω;

(2) $W^{m,p}(\Omega)$ 对任意具有一致锥条件的区域 Ω;

(3) $W^{m,p}(\Omega)$ 对任意有界锥形区域 Ω, 由

$$((f))_{m,p,\Omega} = (|f|^p_{m,p,\Omega} + |f|^p_{0,p,\Omega})^{\frac{1}{p}}$$

定义的泛函 $((\cdot))_{m,p,\Omega}$ 是等价于通常范数 $\|\cdot; W^{m,p}(\Omega)\|$ 的一个范数.

定理 1.6.4　如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 具有一致锥条件或者它是有界锥形区域, 并且如果 $1 \leqslant p < \infty$, 则存在常数 $K = K(m,p,\Omega)$, 使得对 $0 \leqslant j \leqslant m$ 和任意的 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 成立

$$\|f\|_{j,p} \leqslant K\|f\|^{\frac{j}{m}}_{m,p}\|f\|_p^{\frac{m-j}{m}}.$$

此外, 上式对所有的 $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$ 也成立, 常数 $K = K(m,p,N)$ 与 Ω 无关.

定理 1.6.5　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界锥形区域,

(1) 如果 $mp < N$, 令 $p \leqslant q \leqslant p^* = \dfrac{Np}{N-mp}$;

(2) 如果 $mp = N$, 令 $p \leqslant q < \infty$;

(3) 如果 $mp > N$, 令 $p \leqslant q \leqslant \infty$,

则存在依赖于 m, p, q 和决定 Ω 满足锥条件区域的锥 C 维数的常数 K, 使得对于所有 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 成立

$$\|f\|_q \leqslant K\|f\|^{\theta}_{m,p}\|f\|_p^{1-\theta},$$

其中 $\theta = \dfrac{N}{mp} - \dfrac{N}{mq}$.

定理 1.6.6 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界锥形区域, $p>1$ 和 $mp>N$. 又设 $1\leqslant q\leqslant p$ 或者 $q>p$ 和 $mp-p<N$, 则存在依赖于 m,N,p,q 和决定 Ω 为有界锥形区域的锥 C 的常数 K, 使得对所有的 $f\in W^{m,p}(\Omega)$ 成立

$$\|f\|_\infty\leqslant K\|f\|_{m,p}^\theta\|f\|_q^{1-\theta},$$

其中 $\theta=Np/[Np+(mp-N)q]$.

定理 1.6.7 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界锥形区域, m,k 是正整数和 $p>1$. 又设 $mp<N$ 和 $N-mp<k\leqslant N$. 令 ν 是小于 mp 的最大整数, 使得 $N-\nu\leqslant k$ 和 Ω_k 是 Ω 与 $\mathbb{R}^N$ 中 k 维平面 U 的交, 则存在常数 K 使得对于所有的 $f\in W^{m,p}(\Omega)$ 成立不等式

$$\|f;L^{\frac{kq}{N}}(\Omega_k)\|\leqslant K\|f;L^q(\Omega)\|^{1-\theta}\|f;W^{m,p}(\Omega)\|^\theta,$$

其中

$$q=p^*=\frac{Np}{N-mp},\quad \theta=\frac{\nu p}{\nu p+(mp-\nu)q}\ 且\ 0<\theta<1.$$

定理 1.6.8 (Poincaré 不等式) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界开集, $1\leqslant p<\infty$, 则存在常数 $K=K(\Omega,p)$, 使得对于每一个 $f\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 成立

$$\|f;L^p(\Omega)\|\leqslant K\left(\sum_{|\alpha|=1}\|D^\alpha f;L^p(\Omega)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 1.6.9 (Gagliardo-Nirenberg 插值定理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中满足锥条件的区域. 设 $f\in W^{k,p_2}(\Omega)\cap L^{p_1}(\Omega)$, $1\leqslant p_1,p_2\leqslant\infty$. 对于任意的整数 l, $0\leqslant l<k$ 和满足 $\dfrac{l}{k}\leqslant\lambda\leqslant 1$ 的任意 λ, 置

$$\frac{1}{p}-\frac{l}{N}=\frac{1-\lambda}{p_1}+\lambda\Big(\frac{1}{p_2}-\frac{k}{N}\Big).$$

如果 $k-l-\dfrac{N}{p_2}$ 不是非负整数, 则成立

$$\|D^lf\|_p\leqslant K\|f\|_{p_1}^{1-\lambda}\|f\|_{k,p_2}^\lambda. \tag{1.6.1}$$

如果 $k-l-\dfrac{N}{p_2}$ 是非负整数, 则式 (1.6.1) 对于 $\dfrac{l}{k}=\lambda$ 也成立, 其中常数 K 依赖于 p_1,p_2,k,l,λ 和决定 Ω 满足锥条件区域的锥 C 的维数;

实际上, 如果 $k-l-\dfrac{N}{p_2}$ 是非负整数, 则式 (1.6.1) 对任意的 $\dfrac{l}{k}\leqslant\lambda<1$ 都成立.

注 1.6.1 Gagliardo-Nirenberg 插值定理对于函数定义域为 $\mathbb{R}^N$ 也成立.

定理 1.6.10 (Aubin 引理) 设 B_0, B, B_1 是三个 Banach 空间, 其中 B_0, B_1 是自反的. 再设 $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, 且 $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$. 对于任给的 $1 < p_0, p_1 < \infty$, 令

$$W = \{v | v \in L^{p_0}([0,T]; B_0), v_t \in L^{p_1}([0,T]; B_1)\},$$

则 W 紧嵌入 $L^{p_0}([0,T]; B)$.

1.7 分数阶 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$

定义 1.7.1 设定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的函数 $\varphi(x)$ 满足如下条件:

(i) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(ii) 对于任意 N 重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ 和 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N)$ 成立

$$\lim_{|x| \to \infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

其中 $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_N^{\beta_N}$, 则称 $\varphi(x)$ 为速降函数. 这种函数全体组成的空间为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, 称为速降函数空间, 也称 Schwartz 空间, 简记为 $\mathscr{S}$.

定义 1.7.2 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函称为 $\mathscr{S}$ 上的广义函数, 又称为缓增广义函数. 全体缓增广义函数组成的空间称为缓增广义函数空间, 记为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, 简记为 $\mathscr{S}'$.

定义 1.7.3 $\forall s \in \mathbb{R}$, 规定

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) \big| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中元素 $f(x)$ 的范数由

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{(s)} = \|(I - \Delta)^{\frac{s}{2}} f; L^2(\mathbb{R}^N)\| = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}; L^2(\mathbb{R}^N)\|$$

确定, 或记 $\|f\|_{(s)}$ 为 $\|f\|_{H^s}$.

规定 $H_p^s(\mathbb{R}^N) = (I - \Delta)^{-\frac{s}{2}} L^p(\mathbb{R}^N)$, 它的元素 $f(x)$ 的范数由

$$\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^N)} = \|(I - \Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

确定, 或记为 $\|f\|_{H_p^s}$; s 阶齐次 Sobolev 空间规定为 $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^N) = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} L^p(\mathbb{R}^N)$, 它的元素 $f(x)$ 的范数由

$$\|f\|_{\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^N)} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

确定, 或记为 $\|f\|_{\dot{H}_p^s}$. 这里 $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

注 1.7.1 定义 1.7.3 中的 s 可以取负数. 当 s 为非负整数 m 时, 与以前的 $W^{m,2}(\Omega)$ 一致. $H_p^s = L^p \cap \dot{H}_p^s$(见 [26]).

定理 1.7.1 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 是一个 Hilbert 空间.

定理 1.7.2 如果 $s \geqslant t$, 则

$$\mathscr{S} \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathscr{S}',$$

且 $\mathscr{S}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 中稠密.

定理 1.7.3 如果 $s > \dfrac{N}{2}$, 则 $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_B(\mathbb{R}^N)$.

定理 1.7.4 设 $s > \dfrac{N}{2} + j$, j 为非负整数, 则成立

$$H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_B^j(\mathbb{R}^N).$$

定理 1.7.5 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 空间的对偶空间为 $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$, 即

$$H^s(\mathbb{R}^N)' = H^{-s}(\mathbb{R}^N).$$

定理 1.7.6 设 $s = m + \dfrac{N}{2} + \lambda$, $\lambda \in (0,1)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, 则

$$H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\mathbb{R}^N),$$

且对于任意的 $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ 有

$$|D^\alpha f(x)| \to 0 \ (|x| \to \infty), \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \quad |\alpha| \leqslant m.$$

定理 1.7.7 设 s_1 和 s_2 是两个非负实数, $s_1 < s_2$, $\theta \in (0,1)$, $f \in H^{s_2}(\mathbb{R}^N)$, 则成立

$$\|f\|_{(\theta s_1 + (1-\theta)s_2)} \leqslant \|f\|_{(s_1)}^{\theta} \|f\|_{(s_2)}^{1-\theta}.$$

推论 1.7.1 设 $0 \leqslant s_1 < s_2 < s_3$, 则对任意正数 ε, 存在 $C(\varepsilon) > 0$, 使得对任意的 $f \in H^{s_3}(\mathbb{R}^N)$ 有

$$\|f\|_{(s_2)} \leqslant \varepsilon \|f\|_{(s_3)} + C(\varepsilon)\|f\|_{(s_1)}.$$

1.8 一些引理

引理 1.8.1 [27,362] 设 $w(t) \in C[0,\infty) \cap C^2(0,\infty)$ 满足常微分不等式

$$\ddot{w}(t) + \sigma_1 \dot{w}(t) + \sigma_2 w(t) \geqslant \sigma_3 h(\sigma_4 w), \quad t > 0,$$

且 $w(t)$ 还满足条件

$$w(0)=w_0, \quad \dot{w}(0)=w_1,$$

其中 $\sigma_2 \geqslant 0, \sigma_3>0, \sigma_4>0, w_0>0$ 和 $w_1>0$ 均为常数, 而 σ_1 是任意实数.

如果 $h(s) \in C^2(\mathbb{R})$ 是一偶且凸的函数并满足条件:

(1) $h(0)=0$ 和 $\sigma_3 h(\sigma_4 w_0)-\sigma_2 w_0 \geqslant 0$;

(2) 当 $s \rightarrow \infty$ 时, $h(s)$ 增长得足够快, 使得当 $\sigma_1>0$ 时, 积分

$$\mathcal{B}_0=\sigma_1 \int_{w_0}^{\infty}\left[w_1^2+2 \int_{w_0}^y[\sigma_3 h(\sigma_4 s)-\sigma_2 s] d s\right]^{-\frac{1}{2}} d y$$

收敛, 同时 $\mathcal{B}_0<1$; 当 $\sigma_1 \leqslant 0$ 时, 积分

$$\mathcal{T}_1=\int_{w_0}^{\infty}\left[w_1^2+2 \int_{w_0}^y \sigma_3 h(\sigma_4 s) d s-\sigma_2 y^2+\sigma_2 w_0^2\right]^{-\frac{1}{2}} d y \tag{1.8.1}$$

收敛, 则当 $\sigma_1>0$ 时, 对于某个有限时刻 $t_1 \leqslant \mathcal{T}_2=-\dfrac{1}{\sigma_1} \ln (1-\mathcal{B}_0)$ 成立

$$\lim _{t \rightarrow t_1^-} w(t)=\infty;$$

当 $\sigma_1 \leqslant 0$ 时, 对于某个有限时刻 $t_2 \leqslant \mathcal{T}_1$ 成立

$$\lim _{t \rightarrow t_2^-} w(t)=\infty,$$

其中 $\mathcal{T}_1$ 由式 (1.8.1) 给定.

引理 1.8.2 [27] 设一正可导函数 $M(t)$ 满足不等式

$$\dot{M}(t)+M(t) \geqslant C t^{\frac{1-r}{2}}(M(t))^{\frac{r+3}{4}}, \quad t \geqslant t_1>0,$$

并附有条件

$$M(t) \geqslant -F t^2+\dot{M}(0) t+M(0), \quad t \geqslant t_1>0,$$

其中 $M(0), \dot{M}(0), r>1, C>0$ 均为常数, 且

$$F \leqslant F_0<0,$$

F_0 为一常数, 则存在一常数 $\widetilde{T}$, 使得当 $t \rightarrow \widetilde{T}^-$ 时, $M(t) \rightarrow \infty$.

定义 1.8.1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的两个可测函数, 如果对于几乎处处的 x, 积分 $\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) d y$ 存在, 就称它是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积, 记为 $(f * g)(x)$, 即

$$(f * g)(x)=\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) d y.$$

引理 1.8.3 [27,61] 设 $G(x)$ 是二阶偏微分算子

$$L = I - \Delta$$

的基本解, 其中 I 为单位算子, 则

(1) $G(x)$ 有表达式

$$G(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{|x|^2}{4\eta}} e^{-\eta} \eta^{-\frac{N}{2}} d\eta, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

它在 $\mathbb{R}^N$ 上有定义和连续, 且 $G(x) > 0$.

(2) $G(x) \in L^q(\mathbb{R}^N)$ 和 $\|G\|_1 = 1$, 其中

$$\begin{aligned} &1 \leqslant q \leqslant \infty, \quad N = 1, \\ &1 \leqslant q < \infty, \quad N = 2, \\ &1 \leqslant q < \frac{N}{N-2}, \quad N \geqslant 3. \end{aligned}$$

(3) 设 $v \in H^s (s \geqslant 0)$, 则 $\|G * v\|_{H^s} = \|v\|_{H^{s-2}}$.

引理 1.8.4 (卷积 Young 不等式) 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 则 $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, 并有

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

引理 1.8.5 (一般卷积 Young 不等式) 设 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, r 满足

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geqslant 0.$$

如果 $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, 则 $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$, 且有

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

引理 1.8.6 (Hausdorff-Young 不等式) 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, 则 $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 而且

$$\|\widehat{f}; L^{p'}(\mathbb{R}^N)\| \leqslant (2\pi)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{2}{p'})} \|f; L^p(\mathbb{R}^N)\|.$$

引理 1.8.7 (凸性引理) 设 $\phi(t)$ 是一正的、二次连续可导的函数, 且在 $t \geqslant 0$ 上满足不等式

$$\ddot{\phi}(t)\phi(t) - (\beta + 1)\dot{\phi}(t)^2 \geqslant -2A_1\phi(t)\dot{\phi}(t) - A_2\phi(t)^2,$$

其中 $\beta>0, A_1, A_2\geqslant 0$ 为常数.

(1) 若 $A_1=A_2=0, \phi(0)>0$ 和 $\dot{\phi}(0)>0$, 则存在 $t_1\leqslant t_2=\dfrac{\phi(0)}{\beta\dot{\phi}(0)}$, 使得当 $t\to t_1$ 时, $\phi(t)\to\infty$.

(2) 若 $A_1+A_2>0, \phi(0)>0$ 和 $\dot{\phi}(0)>-\gamma_2\beta^{-1}\phi(0)$, 则当 $t\to t_1\leqslant t_2$ 时, $\phi(t)\to\infty$, 其中

$$\gamma_{1,2}=-A_1\pm\sqrt{A_1^2+\beta A_2} \quad 和 \quad t_2=\frac{1}{2\sqrt{A_1^2+\beta A_2}}\ln\frac{\gamma_1\phi(0)+\beta\dot{\phi}(0)}{\gamma_2\phi(0)+\beta\dot{\phi}(0)}.$$

引理 1.8.8 (Leray-Schauder 不动点定理) 设 X 是一 Banach 空间, 考虑变换

$$y=L(x,\lambda),$$

其中 $x,y\in X$, λ 是一实参数, 它在有界区间中变化, 设其为 $a\leqslant\lambda\leqslant b$. 假定

(1) $L(x,\lambda)$ 对所有的 $x\in X$ 和 $a\leqslant\lambda\leqslant b$ 都有定义;

(2) 对于任意固定的 λ, $L(x,\lambda)$ 在 X 中是连续的, 即对于任意 $x^0\in X$ 和任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|x-x^0\|_X<\delta$ 时, 有

$$\|L(x,\lambda)-L(x^0,\lambda)\|_X<\varepsilon;$$

(3) 对于 X 的有界集中的 $x, L(x,\lambda)$ 关于 λ 是一致连续的, 即对于任意有界集 $X_0\subset X$ 和任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in X_0$, $|\lambda_1-\lambda_2|<\delta$, $a\leqslant\lambda_1,\lambda_2\leqslant b$ 时, 有

$$\|L(x,\lambda_1)-L(x,\lambda_2)\|_X<\varepsilon;$$

(4) 对于任意固定的 λ, $L(x,\lambda)$ 是紧变换, 即它把 X 的有界子集映射到 X 的紧子集中;

(5) 存在一个 (有限) 常数 M, 使得 $x-L(x,\lambda)=0$ $(x\in X,\lambda\in[a,b])$ 的所有可能的解 x 满足 $\|x\|_X\leqslant M$;

(6) 方程 $x-L(x,a)=0$ 在 X 中有唯一解,

则方程

$$x-L(x,\lambda)=0$$

的解存在.

引理 1.8.9 设 $E:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ $(\mathbb{R}_+=[0,\infty))$ 是一非增函数并假定存在一常数 $T>0$, 使得

$$\int_t^\infty E(s)ds\leqslant TE(t), \quad \forall t\in\mathbb{R}_+,$$

那么

$$E(t) \leqslant E(0)e^{1-\frac{t}{T}}, \quad \forall t \geqslant T.$$

以上 1.2–1.8 节的内容的证明和出处详见文献 [27].

引理 1.8.10 [24,28] 设 $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ 和 $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^k$ 是可测集. 如果 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, $\{\psi_j\}_{j\in J}$ 和 $\{\xi_k\}_{k\in K}$ (I, J, K 是指标集) 分别是空间 $L^2(\Omega_1)$, $L^2(\Omega_2)$ 和 $L^2(\Omega_3)$ 中的基, 则函数系 $\{\varphi_i\psi_j\xi_k\}_{i\in I, j\in J, k\in K}$ 是 $L^2(\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3)$ 中的基.

引理 1.8.11 [29] 设 $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $f(u)$ 有直到 $m \geqslant 1$ 阶偏导数, 则 $f(u)-f(0)\in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 且

$$\|f(u)-f(0)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f'(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

$$\|D^k f(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_0\sum_{\rho=1}^{k}(\|f^{(\rho)}(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u^{(\rho-1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})\|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad (1\leqslant k\leqslant m),$$

其中 $C_0 \geqslant 1$ 是一常数.

引理 1.8.12 [30] 设 $h(u)\in C^k(\mathbb{R}), h(0)=0, u\in H^s(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 和 $k=[s]+1$, 其中 $s\geqslant 0$. 如果 $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leqslant M_0$, 则

$$\|h(u)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1(M_0)\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)},$$

其中 $C_1(M_0)$ 是一依赖于常数 M_0 的常数.

引理 1.8.13 [175] 设 $s\geqslant 0, h(u)\in C^k(\mathbb{R})$ 和 $k=[s]+1$. 如果 $u,v\in H^s(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$, 且 $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}+\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}\leqslant M_1, \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}+\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}\leqslant M_1$, 则

$$\|h(u)-h(v)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_2(M_1)\|u-v\|_{H^s(\mathbb{R}^N)},$$

其中 $C_2(M_1)$ 是一依赖于常数 M_1 的常数.

引理 1.8.14 [25] 设

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}, \quad 1\leqslant p,\ q,\ r\leqslant\infty \tag{1.8.2}$$

成立及下面式子中右端出现的所有范数都有界, 则对任意的整数 $m\geqslant 0$ 成立

$$\|D^m(vw)\|_r \leqslant K_1(m)(\|v\|_p\|D^m w\|_q+\|D^m v\|_q\|w\|_p),$$

其中 $K_1(m)$ 是一依赖于 m 的正常数.

推论 1.8.1 [25] 在式 (1.8.2) 的假设下, 若下面不等式右端出现的所有范数都有界, 则对任意的整数 $m\geqslant 0$, 有

$$\|vw\|_{m,r} \leqslant K_2(m)(\|v\|_p\ \|w\|_{m,q}+\|v\|_{m,q}\|w\|_p),$$

其中 $K_2(m)$ 是一依赖于 m 的正常数.

引理 1.8.15 [25]　设 $F(w)$ 是 w 的一充分光滑函数, 且满足

$$F(0)=0. \tag{1.8.3}$$

对任意给定的整数 $m \geqslant 0$, 若函数 w 满足

$$w(x) \in W^{m,p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

和

$$\|w\|_\infty \leqslant M_2,$$

其中 M_2 是一个正常数, 则复合函数

$$F(w) \in W^{m,p}$$

和

$$\|F(w)\|_{m,p} \leqslant K_3(M_2)\|w\|_{m,p},$$

其中 $K_3(M_2)$ 是一依赖于 M_2 的正常数 (注意当 $m \geqslant 1$ 时, 不需要满足条件 (1.8.3)).

引理 1.8.16 [31]　设 $H(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_l)$ 对变量 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_l$ 是 $k(\geqslant 1)$ 次连续可导函数, 且 $\xi_i(x,t) \in L^\infty(\widetilde{Q}_T) \cap L^2([0,T]; H^k(\widetilde{\Omega}))$, $i=0,1,\cdots,l$, 则成立估计

$$\left\| \frac{\partial^k H}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_N^{k_N}} \right\|_{L^2(\widetilde{\Omega})}^2 \leqslant C(M,k,l) \sum_{i=1}^{l} \|\xi_i\|_{H^k(\widetilde{\Omega})},$$

其中 $M = \max_{i=0,1,\cdots,l} \max_{(x,t)\in\widetilde{Q}_T} |\xi_i(x,t)|$, $\widetilde{Q}_T = \{x=(x_1,x_2,\cdots,x_N) \in \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$, $t \in [0,T]\}$, $\widetilde{\Omega}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中满足嵌入定理的有界区域, $\widetilde{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_N)$, $k_i>0$, $|\widetilde{k}| = k = \sum_{i=1}^N k_i$.

1.9　离散函数空间的插值公式 [12,27]

1.9.1　离散函数的插值公式

长度为 $l>0$ 的有限区间 $[0,l]$ 被点 $x_j = jh$ $(j=0,1,\cdots,J)$ 分割为小段, 其中 $Jh=l$, J 是一正整数和 h 是步长. 离散函数 $u_h = \{u_j | j=0,1,\cdots,J\}$ 定义在格点 (网点) $x_j (j=0,1,\cdots,J)$ 上.

$$\Delta_+ u_j = u_{j+1} - u_j, \quad j=0,1,\cdots,J-1,$$

$$\Delta_- u_j = u_j - u_{j-1}, \quad j=1,2,\cdots,J$$

分别表示一阶差分, 前者称为向前差, 后者称为向后差. 二阶差分为

$$\begin{aligned}
\Delta_+^2 u_j &= \Delta_+(u_{j+1}-u_j) = u_{j+2}-2u_{j+1}+u_j, \quad j=0,1,\cdots,J-2,\\
\Delta_+\Delta_- u_j &= \Delta_+(u_j-u_{j-1}) = u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}, \quad j=1,\cdots,J-1,\\
\Delta_-^2 u_j &= \Delta_-(u_j-u_{j-1}) = u_j-2u_{j-1}+u_{j-2}, \quad j=2,3,\cdots,J.
\end{aligned}$$

三阶差分为

$$\Delta_+^2\Delta_- u_j = u_{j+2}-3u_{j+1}+3u_j-u_{j-1}, \quad j=1,2,\cdots,J-2,$$

等等.

一阶差商值 $\dfrac{\Delta_+ u_j}{h}(j=0,1,\cdots,J-1)$ 的集合是一离散函数

$$\delta u_h = \left\{ \frac{\Delta_+ u_j}{h} \middle| \; j=0,1,\cdots,J-1 \right\}.$$

显然

$$\delta u_h = \left\{ \frac{\Delta_- u_j}{h} \middle| \; j=1,2,\cdots,J \right\}.$$

二阶差商是

$$\begin{aligned}
\delta^2 u_h &= \left\{ \frac{\Delta_+^2 u_j}{h^2} \middle| \; j=0,1,\cdots,J-2 \right\}\\
&= \left\{ \frac{\Delta_+\Delta_- u_j}{h^2} \middle| \; j=1,2,\cdots,J-1 \right\}\\
&= \left\{ \frac{\Delta_-^2 u_j}{h^2} \middle| \; j=2,3,\cdots,J \right\}.
\end{aligned}$$

类似地, 对于原离散函数 u_h 对应的 $k \geqslant 0$ 阶差商是离散函数 $\delta^k u_h$.

两个离散函数 $u_h=\{u_j|\; j=0,1,\cdots,J\}$ 与 $v_h=\{v_j|\; j=0,1,\cdots,J\}$ 的数量积定义为

$$(u,v)_h = \sum_{j=0}^{J} u_j v_j h.$$

离散函数 u_h 和它对应的 $k \geqslant 0$ 阶差商的离散函数的范数定义为

$$\|\delta^k u_h\|_p = \left(\sum_{j=0}^{J-k} \left| \frac{\Delta_+^k u_j}{h^k} \right|^p h \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

和

$$\|\delta^k u_h\|_\infty = \max_{j=0,1,\cdots,J-k} \left| \frac{\Delta_+^k u_j}{h^k} \right|,$$

其中 k 是任意非负整数和 p 是一实数. 显然

$$\|\delta^k u_h\|_p = \left(\sum_{j=l}^{J-k+l}\left|\frac{\Delta_+^{k-l}\Delta_-^l u_j}{h^k}\right|^p h\right)^{\frac{1}{p}}$$

和

$$\|\delta^k u_h\|_\infty = \max_{j=l,\cdots,J-k+l}\left|\frac{\Delta_+^{k-l}\Delta_-^l u_j}{h^k}\right|,$$

其中 $k \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$ 和 l 是一整数, $0 \leqslant l \leqslant k$.

下面介绍离散函数 $u_h = \{u_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$ 在有限区间 $[0, l]$ 上差商范数的插值关系.

引理 1.9.1 对于任意两个离散函数 $u_h = \{u_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$ 和 $v_h = \{v_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$ 有恒等式

$$\sum_{j=0}^{J-1} u_j \Delta_+ v_j = -\sum_{j=1}^{J} v_j \Delta_- u_j - u_0 v_0 + u_J v_J$$

和

$$\sum_{j=1}^{J-1} u_j \Delta_+ \Delta_- v_j = -\sum_{j=0}^{J-1}(\Delta_+ u_j)(\Delta_+ v_j) - u_0 \Delta_+ v_0 + u_J \Delta_- v_J.$$

引理 1.9.2 对于任意离散函数 $u_h = \{u_j |\ j = 0, 1, \cdots, J\}$, 成立

$$\|u_h\|_\infty \leqslant K_1 \|u_h\|_2^{\frac{1}{2}} \left(\|\delta u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 l 是有限区间的长度, K_1 是一个不依赖于离散函数 u_h 和步长 h 的常数.

引理 1.9.3 对于任意离散函数 $u_h = \{u_j |\ j = 0, 1, \cdots, J\}$, 成立

$$\|\delta u_h\|_2 \leqslant K_2 \|u_h\|_2^{\frac{1}{2}} \left(\|\delta^2 u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中常数 K_2 不依赖于 u_h.

定理 1.9.1 对于定义在有限区间 $[0, l]$ 上的任意离散函数 $u_h = \{u_j | j = 0, 1, \cdots, J\}$ 有估计式

$$\|\delta^k u_h\|_2 \leqslant K_3 \|u_h\|_2^{1-\frac{k}{n}} \left(\|\delta^n u_h\|_2 + \frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k}{n}},$$

其中 $0 \leqslant k \leqslant n$ 和 K_3 是不依赖于 u_h 和 h 的常数.

定理 1.9.2 对于在有限区间 $[0,l]$ 上的任意离散函数 $u_h=\{u_j|j=0,1,\cdots,J\}$, 成立

$$\|\delta^k u_h\|_\infty \leqslant K_4\|u_h\|_2^{1-\frac{k+\frac{1}{2}}{n}}\left(\|\delta^n u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}},$$

其中 $0\leqslant k<n$ 和 K_4 是一个不依赖于 u_h 的常数.

定理 1.9.3 对于在有限区间 $[0,l]$ 上的任意离散函数 $u_h=\{u_j|j=0,1,\cdots,J\}$, 成立

$$\|\delta^k u_h\|_p \leqslant K_5\|u_h\|_2^{1-\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}}\left(\|\delta^n u_h\|_2+\frac{\|u_h\|_2}{l^n}\right)^{\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{n}},$$

其中 $2\leqslant p\leqslant\infty$, $0\leqslant k<n$ 和 K_5 是不依赖于 u_h 的常数.

1.9.2 关于离散函数指数为 α 的 Hölder 系数的不等式

我们用

$$H_\alpha[u_h]=\max_{m,s=0,1,\cdots,J}\frac{|u_m-u_s|}{|x_m-x_s|^\alpha}$$

表示对应于普通函数 u 指数为 α 的 Hölder 系数的离散函数 $u_h=\{u_j|j=0,1,\cdots,J\}$ 指数为 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 的 Hölder 系数. 对于 $k\geqslant 0$ 阶差商 $\delta^k u_h$, 对应的指数为 α 的 Hölder 系数有如下的表示式:

$$H_\alpha[\delta^k u_h]=\max_{m,s=0,1,\cdots,J-k}\frac{|\Delta_+^k(u_m-u_s)|}{h^k|x_m-x_s|^\alpha},$$

其中 $|x_m-x_s|=|m-s|h$.

定理 1.9.4 对于任意的离散函数 $u_h=\{u_j|j=0,1,\cdots,J\}$, 存在

$$H_{1-\frac{1}{r}}[\delta^k u_h]\leqslant\|\delta^{k+1}u_h\|_r,$$

其中 $k\geqslant 0$ 是一非负整数和 $r>1$ 是实数.

推论 1.9.1 对于任意的离散函数 $u_h=\{u_j|j=0,1,\cdots,J\}$, 有

$$\|u_h\|_\infty\leqslant\|\delta u_h\|_1+\frac{\|u_h\|_1}{l}.$$

1.9.3 一个离散函数的不等式

定理 1.9.5 设离散函数 $w_h=\{w_k|k=0,1,\cdots,N_0\}$($N_0$ 为自然数, $N_0\,\Delta t=T$), 满足不等式

$$w_n\leqslant A+\sum_{k=1}^{n}B_k w_k\Delta t\quad(n=0,1,\cdots,N_0),$$

其中 A 和 B_k $(k=1,2,\cdots,N_0)$ 是非负常数, 则

$$\|w_h\|_\infty \leqslant Ae^{2\sum_{k=1}^{N_0} B_k \Delta t},$$

其中 Δt 充分小, 使得 $\Delta t\,(\max_{k=1,2,\cdots,N_0} B_k) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

1.9.4　有限维空间连续映射的不动点定理

设 $\mathbb{R}^m$ 为 m 维 Euclid 空间和 $L_\lambda : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ 是 m 维空间 $\mathbb{R}^m$ 到自身的连续映射, 则对于 $z \in \mathbb{R}^m$, $L_\lambda(z) = v \in \mathbb{R}^m$, 其中 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 是一参数.

定理 1.9.6　如果定义在有限维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 上的非线性方程组

$$v = L_\lambda(v) \tag{1.9.1}$$

满足下列条件:

(1) 函数 $L_\lambda(v)$ 对于任意的 $v \in \mathbb{R}^m$ 和 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 是连续的;

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, 存在一不动点 $v_0 \in \mathbb{R}^m$, 使得 $L_\lambda(v_0) = v_0$;

(3) 方程组 (1.9.1) 所有可能的解关于参数 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 是一致有界的,

则对于任意的 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 方程组 (1.9.1) 至少有一解 $v \in \mathbb{R}^m$, 因此对于 $\lambda = 1$, 即非线性方程组

$$v = L_1(v)$$

至少有一解 $v \in \mathbb{R}^m$.

注 1.9.1　为了书写简单起见, 从第 2 章起将 $L^p(\mathbb{R}^N), W^{m,p}(\mathbb{R}^N)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $H^s(\mathbb{R}^N)(s \in \mathbb{R})$ 和 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$ 分别记为 $L^p, W^{m,p}(1 \leqslant p \leqslant \infty), H^s(s \in \mathbb{R})$ 和 $\dot{H}^s$. 将范数 $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$, $\|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = \sum_{k=0}^m \|D^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ 和 $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)}$ 分别记为 $\|f\|_{L^p} = \|f\|_p$(特别 $\|f\|_2 = \|f\|$), $\|f\|_{W^{m,p}} = \sum_{k=0}^m \|D^k f\|_{L^p} = \|f\|_{m,p}(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $\|f\|_{H^s}$ 和 $\|f\|_{\dot{H}^s}$. 当讨论一维 $(N=1)$ 问题时, 因为不会发生混淆, 所以仍用上述记号.

1.10　含有时间的空间和含有时间的 Sobolev 空间

1.10.1　含有时间的空间

设 E 表示 $\mathbb{R}$ 中的区间 (可以无限). X 表示一般的 Banach 空间. 类似于由全体实值连续函数组成的空间 $C[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, 可以定义取值于 X 中的抽象连续函数空间

$$C([a,b];X) = \{Z|Z(t) \in X, t \in [a,b], \text{并且 } Z \text{ 在 } [a,b] \text{ 上强连续}\}.$$

定理 1.10.1 空间 $C([a,b];X)$ 在范数 $\|Z\|_{C([a,b];X)} = \max_{t\in[a,b]}\|Z(t)\|_X$ 意义下是 Banach 空间. 关于此定理详见 [27].

定义 1.10.1 设 $1 \leqslant p < \infty$, X 是具有范数 $\|\cdot\|_X$ 的 Banach 空间. 空间 $L^p((0,T);X)$ 是由使 Lebesgue 积分

$$\|Z\|_{L^p((0,T);X)} = \left(\int_0^T \|Z(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

存在的全体强可测函数 $Z:(0,T)\mapsto X$ 组成的.

容易验证 $L^p((0,T);X)$ 是一线性空间. 若 $L^p((0,T);X)$ 中的元素 $Z(t)$ 赋予范数

$$\|Z;L^p((0,T);X)\|(\text{或}\|Z\|_{L^p((0,T);X)}) = \left(\int_0^T \|Z(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

则易证 $L^p((0,T);X)$ 为赋范空间和下列定理成立.

定理 1.10.2 设 X 是一 Banach 空间, 则 $L^p((0,T);X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 也是 Banach 空间.

定义 1.10.2 用 $L^\infty((0,T);X)$ 表示满足

$$\operatorname*{ess\ sup}_{x\in(0,T)} \|Z(t);X\| < \infty$$

的所有强可测函数 $Z:(0,T)\mapsto X$ 的集合.

显然集合 $L^\infty((0,T);X)$ 是线性空间. 若 $L^\infty((0,T);X)$ 中的元素 $Z(t)$ 赋予范数

$$\|Z;L^\infty((0,T);X)\| = \operatorname*{ess\ sup}_{x\in(0,T)} \|Z(t);X\|,$$

易证 $L^\infty((0,T);X)$ 是赋范空间和下列定理成立.

定理 1.10.3 设 X 是 Banach 空间, 则空间 $L^\infty((0,T);X)$ 也是 Banach 空间.

1.10.2 含有时间的 Sobolev 空间

定义 1.10.3 设 X 是 Banach 空间. $W^{m,p}((0,T);X)$ 是由所有函数 $Z \in L^p((0,T);X)$ 组成的集合, 且使得 $Z_{t^i}(t) = \left(\dfrac{d^i}{dt^i}Z(t)\right)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 在弱意义下存在且属于 $L^p((0,T);X)$. 赋予范数

$$\|Z\|_{W^{m,p}((0,T);X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^T \left(\|Z(t)\|_X^p + \sum_{i=1}^m \|Z_{t^i}(t)\|_X^p\right) dt\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\ sup}\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \left(\|Z(t)\|_X + \displaystyle\sum_{i=1}^m \|Z_{t^i}(t)\|_X\right), & p = \infty \end{cases}$$

后, 称空间 $W^{m,p}((0,T);X)$ 为含有时间的 Sobolev 空间.

当 $p=2$ 时, 记 $H^m((0,T);X)=W^{m,2}((0,T);X)$.

类似于证明 $L^p((0,T);X)$ 为 Banach 空间, 可以证明, 当 X 为 Banach 空间时, $W^{m,p}((0,T);X)$ 也为 Banach 空间.

关于 1.10 节的详细情况, 参见文献 [27] 第五章.

第 2 章　非线性高阶双曲型方程的初边值问题

非线性高阶发展方程是非线性偏微分方程的重要组成部分. 随着科学技术的发展, 不断提出的大量非线性发展方程有待解决, 而非线性高阶发展方程尤为突出. 为开展非线性高阶发展方程的研究, 本章介绍研究非线性高阶双曲型方程初边值问题的如下四种方法: Banach 不动点定理-压缩映射原理, Galerkin 方法, 位势井方法和临界点理论解决具体问题.

介绍非线性高阶波动方程初边值问题时, 涉及讨论解的爆破现象, 研究方法用的是满足常微不等式的引理 1.8.1、引理 1.8.2 和凸性引理 (引理 1.8.7); 讨论解的渐近性质, 研究方法用的是满足一积分不等式的引理 1.8.10 和位势井方法.

应用压缩映射原理证明非线性高阶波动方程的初边值问题时, 主要证明其局部解的存在唯一性, 并给出解的延拓条件. 证明的思路是, 首先对考虑的定解问题定义工作空间——Banach 空间, 例如记其为 $X(T)$, 然后确定 $X(T)$ 的一个不空有界闭凸子集, 例如记其为 $K(M,T)$, 它依赖于由初值函数决定的范数和时间 T. 在此基础上再定义 $X(T)$ 上的映射 S. 为了证明 S 在 $K(M,T)$ 中有唯一不动点, 要证明 S 映 $K(M,T)$ 到 $K(M,T)$, 且要证明 S 是严格压缩的. 若这两个条件成立, 根据压缩映射原理, 所考虑的初边值问题存在唯一局部解属于 $K(M,T)$, 并给出解延拓条件. 若能证明局部解满足延拓条件, 则说明初边值问题存在整体解. 通过下面研究的几个非线性高阶波动方程的初边值问题能够了解到应用压缩映射原理解决问题的主要步骤和一些技巧, 还可以看出不同的方程有它不同的特点, 需要发掘新的技巧. 判断能否得到所考虑的非线性高阶波动方程的初边值问题整体解的关键是能否验证对局部解的估计满足解的延拓条件.

下面应用压缩映射原理证明一些非线性高阶波动方程的初边值问题.

2.1　广义 IMBq 方程初边值问题整体解的存在性与不存在性

2.1.1　引言

众所周知, 方程

$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx} + (\varphi^2)_{xx} + \varphi_{xxxx} \tag{2.1.1}$$

由 Boussinesq J V 于 1872 年为描述浅水波而获得. 称方程 (2.1.1) 为 Bq 方程, 且为“坏”的 Bq 方程, 当方程 (2.1.1) 中的 $+\varphi_{xxxx}$ 变为 $-\varphi_{xxxx}$ 时, 方程 (2.1.1) 称

为“好”的 Bq 方程. 关于“坏”的 Bq 方程将在 2.9 节中讨论. 改进的 Bq 方程是

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \varphi_{xxtt} = (\varphi^2)_{xx}. \tag{2.1.2}$$

称方程 (2.1.2) 为 IBq 方程. 类似于 MKdV 方程, 修改的 IBq 方程是

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \varphi_{xxtt} = (\varphi^3)_{xx}, \tag{2.1.3}$$

称它为 IMBq 方程(见 [32]). 在以上方程中的 φ 表示未知函数.

在弹性杆中纵形变波的传播由非线性偏微分方程

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = \frac{1}{p}(u^p)_{xx} \tag{2.1.4}$$

描述, 其中 $p = 3$ 或 $p = 5$. 方程 (2.1.4) 称为 Pochhammer-Chree 方程, 简称 PC 方程(见 [33]).

本节在 $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ $(\Omega = (0, 1), T > 0)$ 上研究下列广义 IMBq 方程的初边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = f(u)_{xx}, \tag{2.1.5}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \tag{2.1.6}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \tag{2.1.7}$$

其中 $u(x, t)$ 表示未知函数, $f(s)$ 是给定的非线性函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初值函数.

2.1.2 初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 局部广义解的存在性和唯一性

现在应用二阶常微分方程边值问题的 Green 函数将初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 化为一积分方程. 利用压缩映射原理证明此积分方程存在唯一的局部广义解, 即证明初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 有唯一的局部广义解.

令 $G(x, \xi)$ (见 [34]) 是常微分方程边值问题

$$y(x) - y''(x) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

的 Green 函数, 即

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(e - e^{-1})^{-1}(e^x - e^{-x})(e^{1-\xi} - e^{\xi-1}), & 0 \leqslant x < \xi, \\ \dfrac{1}{2}(e - e^{-1})^{-1}(e^\xi - e^{-\xi})(e^{1-x} - e^{x-1}), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Green 函数 $G(x, \xi)$ 满足下列引理中的性质.

引理 2.1.1 (1) $G(x,\xi)$ 在 $Q=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant \xi\leqslant 1\}$ 上定义和连续;

(2) $G(x,\xi)$ 满足齐次方程

$$G(x,\xi)-G_{xx}(x,\xi)=0,\quad x\neq\xi$$

和齐次初值条件

$$G(0,\xi)=0,\quad G(1,\xi)=0;$$

(3) $G'_x(x,\xi)$ 在 $x=\xi$ 上有第一类间断点且满足条件

$$G'_x(\xi+0,\xi)-G'_x(\xi-0,\xi)=-1;$$

(4) $G(x,\xi)=G(\xi,x)$;

(5) $0\leqslant G(x,\xi)<\dfrac{2}{7},\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant\xi\leqslant 1$.

证明 显然, 性质 (1)–(4) 成立. 仅证明性质 (5). 事实上, 首先在 $0\leqslant x<\xi$ 上考虑 $G(x,\xi)$. 我们有 $G(x,\xi)\geqslant 0$. 因为 $e^x-e^{-x}<e^\xi-e^{-\xi}$, 所以

$$G(x,\xi)<\frac{1}{2}(e-e^{-1})^{-1}(e-e^{2\xi-1}-e^{-2\xi+1}+e).\tag{2.1.9}$$

从不等式 $e^{2\xi-1}+e^{1-2\xi}\geqslant 2$ 和不等式 (2.1.9) 得

$$G(x,\xi)<\frac{e-2+e^{-1}}{2(e-e^{-1})}=\frac{e-1}{2(e+1)}<\frac{2}{7}.$$

应用性质 (4) 可知性质 (5) 成立. □

设 $u(x,t)$ 是初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的古典解. 方程 (2.1.5) 和 (2.1.6) 可以改写为

$$[u_{tt}+u+f(u)-f(0)]-[u_{tt}+u+f(u)-f(0)]_{xx}=u+f(u)-f(0)\tag{2.1.10}$$

和

$$\begin{aligned}&u_{tt}(0,t)+u(0,t)+f(u(0,t))-f(0)=0,\\&u_{tt}(1,t)+u(1,t)+f(u(1,t))-f(0)=0.\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

从方程 (2.1.10) 和式 (2.1.11) 有

$$u_{tt}(x,t)+u(x,t)+f(u(x,t))-f(0)=\int_0^1 G(x,\xi)[u(\xi,t)+f(u(\xi,t))-f(0)]d\xi.$$

上式对 t 积分两次有

$$\begin{aligned}u(x,t)=&u_0(x)+tu_1(x)-\int_0^t(t-\tau)[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))-f(0)]d\tau\\&+\int_0^t\int_0^t(t-\tau)G(x,\xi)[u(\xi,\tau)+f(u(\xi,\tau))-f(0)]d\xi d\tau.\end{aligned}\tag{2.1.12}$$

因此初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的古典解是积分方程 (2.1.12) 的解. □

定义 2.1.1　对于任意的 $T>0$, 若函数 $u(x,t)\in C([0,T];C[0,1])$ 满足积分方程 (2.1.12), 则 $u(x,t)$ 称为积分方程 (2.1.12) 的连续解或初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的广义解. 若 $T<\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的局部广义解. 若 $T=\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的整体广义解.

现在应用压缩映射原理证明积分方程 (2.1.12) 局部连续解的存在性和唯一性. 为此, 定义函数空间

$$X(T)=\{u(x,t)\in C([0,T];C[0,1]),u(0,t)=u(1,t)=0\},$$

并赋予范数如下

$$\|u\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|u(x,t)|,\quad \forall u\in X(T).$$

容易看出 $X(T)$ 是一个 Banach 空间. 令 $M=\|u_0\|_{C[0,1]}+\|u_1\|_{C[0,1]}$. 定义集合

$$K(M,T)=\{u\mid u\in X(T),\|u\|_{X(T)}\leqslant 2M+1\}.$$

显然, $K(M,T)$ 对每一对 $M,T>0$ 是 $X(T)$ 的不空有界闭凸子集. 定义映射 S 如下:

$$\begin{aligned}Sw=&u_0(x)+tu_1(x)-\int_0^t(t-\tau)[w(x,\tau)+f(w(x,\tau))-f(0)]d\tau\\&+\int_0^t\int_0^t(t-\tau)G(x,\xi)[w(\xi,\tau)+f(w(\xi,\tau))-f(0)]d\xi d\tau,\quad \forall w\in X(T).\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

显然, S 映 $X(T)$ 到 $X(T)$. 我们的目的要证明 S 在 $K(M,T)$ 中有唯一不动点.

引理 2.1.2　设 $u_0(x),u_1(x)\in C[0,1]$, $u_0(0)=u_0(1)=u_1(0)=u_1(1)=0$ 和 $f(s)\in C^1(\mathbb{R})$, 则 S 映 $K(M,T)$ 到 $K(M,T)$ 且如果 T 相对于 M 适当小, $S:K(M,T)\mapsto K(M,T)$ 是严格压缩的.

证明　设 $w(x,t)\in K(M,T)$. 定义 $\bar f(\eta):[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$ 如下

$$\bar f(\eta)=\max_{|s|\leqslant\eta}\{|f(s)|,|f'(s)|\},\quad \forall\eta\geqslant 0.$$

显然 $\bar f$ 在 $[0,\infty)$ 上是连续的和非减的. 由映射 (2.1.13) 得

$$\|Sw\|_{X(T)}\leqslant M+MT+\frac{9}{14}[2M+1+3\bar f(2M+1)]T^2.$$

若 T 满足

$$T\leqslant\min\left\{1,\left[\frac{14}{9(2M+1+3\bar f(2M+1))}\right]^{1/2}\right\},\tag{2.1.14}$$

则 $\|Sw\|_{X(T)} \leqslant 2M+1$. 所以如果不等式 (2.1.14) 成立, 则 S 映 $K(M,T)$ 到 $K(M,T)$.

下面证明映射 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 且 $w_1, w_2 \in K(M,T)$ 给定, 有

$$\begin{aligned}
&Sw_1 - Sw_2 \\
=& -\int_0^t (t-\tau)[w_1(x,\tau) - w_2(x,\tau) + f(w_1(x,\tau)) - f(w_2(x,\tau))]d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^1 (t-\tau)G(x,\xi)[w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau) + f(w_1(\xi,\tau)) - f(w_2(\xi,\tau))]d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

对 f 应用中值定理知

$$\|Sw_1 - Sw_2\|_{X(T)} \leqslant \frac{9}{14}T^2[1+\bar{f}(2M+1)]\|w_1 - w_2\|_{X(T)}.$$

如果 T 满足

$$T \leqslant \min\left\{1, \left[\frac{14}{9(2M+1+3\bar{f}(2M+1))}\right]^{1/2}, \left[\frac{7}{9(1+\bar{f}(2M+1))}\right]^{1/2}\right\}, \tag{2.1.15}$$

则 $\|Sw_1 - Sw_2\|_{X(T)} \leqslant \dfrac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_{X(T)}$. □

定理 2.1.1 设引理 2.1.2 的条件成立, 则初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 存在唯一局部广义解 $u(x,t) \in C([0,T_0); C[0,1])$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 若

$$\sup_{t\in[0,T_0)} \left(\|u(\cdot,t)\|_{C[0,1]} + \|u_t(\cdot,t)\|_{C[0,1]}\right) < \infty, \tag{2.1.16}$$

则 $T_0 = \infty$.

证明 由引理 2.1.1 和压缩映射原理知, 对于适当的 $T>0$, S 有唯一的不动点 $u(x,t) \in K(M,T)$, 显然它是初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的广义解. 容易证明对于每一个 $T'>0$, 积分方程 (2.1.12) 最多有一解属于 $X(T')$.

令 $[0,T_0)$ 是 $u \in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 余下仅需证明, 若式 (2.1.16) 成立, 则 $T_0=\infty$. 对于任意的 $T' \in [0,T_0)$, 考虑积分方程

$$\begin{aligned}
v(x,t) =& u(x,T') + u_t(x,T')t - \int_0^t (t-\tau)[v(x,\tau) + f(v(x,\tau)) - f(0)]d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^1 (t-\tau)G(x,\xi)[v(\xi,\tau) + f(v(\xi,\tau)) - f(0)]d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

根据式 (2.1.16), $\|u(\cdot,T')\|_{C[0,1]} + \|u_t(\cdot,T')\|_{C[0,1]}$ 在 $T' \in [0,T_0)$ 上是一致有界的, 这就允许我们选择 $T^* \in (0,T_0)$, 使得对于每一个 $T' \in [0,T_0)$, 积分方程 (2.1.17) 有唯一解 $v(x,t) \in X(T^*)$. 这样 T^* 的存在性是由引理 2.1.2 和压缩映射原理得来的.

特别地, 式 (2.1.15) 显示出 T^* 的选择与 $T' \in [0, T_0)$ 无关. 置 $T' = T_0 - T^*/2$, 令 $v(x,t)$ 表示积分方程 (2.1.17) 对应的解, 且 $\bar{u}(x,t) : [0,1] \times [0, T_0 + T^*/2] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\bar{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \in [0, T^*], \\ v(x, t - T'), & t \in [T', T_0 + T^*/2]. \end{cases} \tag{2.1.18}$$

根据构造, $\bar{u}(x,t)$ 是积分方程 (2.1.17) 在 $[0, T_0 + T^*/2]$ 上对应的解, 并根据局部唯一性 $\bar{u}(x,t)$ 是 $u(x,t)$ 的延拓, 这与 $[0, T_0)$ 是解的最大存在时间区间矛盾. 所以, 若式 (2.1.16) 成立, 则 $T_0 = \infty$. □

2.1.3 初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 整体广义解的存在性和唯一性

下面证明初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 存在唯一的整体广义解, 为此对初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的广义解作先验估计.

引理 2.1.3 设 $u_0, u_1 \in C[0,1]$, $f(s) \in C^1(\mathbb{R})$, 且下列不等式

$$|f(u)| \leqslant AF(u) + B \tag{2.1.19}$$

成立, 其中 $F(u) = \int_0^u f(s)ds$, $A, B > 0$ 是常数, 则广义解 $u(x,t) \in C([0,T]; C[0,1])$ 有估计

$$\int_0^1 |f(u(x,t))|dx + \int_0^1 u^2(x,t)dx \leqslant M_1(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.1.20}$$

其中 $M_1(T)$ 是依赖于 T 的常数.

证明 积分方程 (2.1.12) 对 t 求导, 可见

$$\begin{aligned} & u_t(x,t) + \int_0^t u(x,\tau)d\tau + \int_0^t f(u(x,\tau))d\tau \\ &= u_1(x) + f(0)t + \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi)[u(\xi,\tau) + f(u(\xi,\tau)) - f(0)]d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

注意到

$$\int_0^t \int_0^\tau u(x,s)u(x,\tau)dsd\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[\int_0^\tau u(x,s)ds\right]^2 d\tau = \frac{1}{2}\left[\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]^2.$$

方程 (2.1.21) 乘以 u, 乘积对 t 积分, 直接计算指出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\left[\int_0^1 u(x,\tau)d\tau\right]^2 + \int_0^t \int_0^\tau f(u(x,s))u(x,\tau)dsd\tau \\ &= \frac{1}{2}u_0^2 + u_1(x)\int_0^t u(x,\tau)d\tau + f(0)\int_0^t \tau u(x,\tau)d\tau \end{aligned}$$

$$+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)u(\xi,s)u(x,\tau)d\xi dsd\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)f(u(\xi,s))u(x,\tau)d\xi dsd\tau$$
$$-f(0)\int_0^t\int_0^1 \tau G(x,\xi)u(x,\tau)d\xi d\tau. \tag{2.1.22}$$

方程 (2.1.21) 乘以 $f(u)$, 乘积对 t 积分, 有

$$F(u(x,t))+\frac{1}{2}\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]^2+\int_0^t\int_0^\tau f(u(x,\tau))u(x,s)dsd\tau$$
$$=F(u_0)+u_1(x)\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau+f(0)\int_0^t \tau f(u(x,\tau))d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)u(\xi,s)f(u(x,\tau))d\xi dsd\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)f(u(\xi,s))f(u(x,\tau))d\xi dsd\tau$$
$$-f(0)\int_0^t\int_0^1 \tau G(x,\xi)f(u(x,\tau))d\xi d\tau. \tag{2.1.23}$$

注意到

$$\int_0^t\int_0^\tau f(u(x,s))u(x,\tau)dsd\tau+\int_0^t\int_0^\tau f(u(x,\tau))u(x,s)dsd\tau$$
$$=\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[\int_0^\tau f(u(x,s))ds\int_0^\tau u(x,s)ds\right]d\tau$$
$$=\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau. \tag{2.1.24}$$

式 (2.1.21) 与式 (2.1.22) 相加, 其和在 $[0,1]$ 上对 x 积分有

$$2\int_0^1 F(u(x,t))dx+\int_0^1 u^2(x,t)dx+\int_0^1\left[\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]^2dx$$
$$+\int_0^1\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]^2dx$$
$$=2\int_0^1 F(u_0(x))dx+\int_0^1 u_0^2(x)dx+2\int_0^1 u_1(x)\int_0^t[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))]d\tau dx$$
$$+2f(0)\int_0^1\int_0^t \tau[u(x,t)+f(u(x,\tau))]d\tau dx$$
$$+2\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)u(\xi,s)u(x,\tau)d\xi dsd\tau dx$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)f(u(\xi,s))f(u(x,\tau))d\xi ds d\tau dx\\
&+2\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)f(u(\xi,s))u(x,\tau)d\xi ds d\tau dx\\
&+2\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)u(\xi,s)f(u(x,\tau))d\xi ds d\tau dx\\
&-2f(0)\int_0^1\int_0^t\int_0^1 \tau G(x,\xi)[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))]d\xi d\tau dx\\
&-2\int_0^1\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]dx. \qquad (2.1.25)
\end{aligned}
$$

为了改写式 (2.1.25), 应用式 (2.1.24) 中的方法, 我们变化它的一些项如下

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)u(\xi,s)u(x,\tau)d\xi ds d\tau dx\\
=&\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t u(\xi,\tau)d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx\\
&-\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t\int_0^\tau u(x,s)u(\xi,\tau)ds d\tau\right]d\xi dx, \qquad (2.1.26)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)f(u(\xi,s))f(u(x,\tau))d\xi ds d\tau dx\\
=&\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t f(u(\xi,\tau))d\tau\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]d\xi dx\\
&-\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t\int_0^\tau f(u(x,s))f(u(\xi,\tau))ds d\tau\right]d\xi dx, \qquad (2.1.27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 G(x,\xi)f(u(\xi,s))u(x,\tau)d\xi ds d\tau dx\\
=&\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t f(u(\xi,\tau))d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx\\
&-\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t\int_0^\tau u(x,s)f(u(\xi,\tau))ds d\tau\right]d\xi dx. \qquad (2.1.28)
\end{aligned}
$$

应用 $G(x,\xi)$ 关于 x 和 ξ 的对称性, 由式 (2.1.26)–(2.1.28) 推出

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau G(x,\xi)u(\xi,s)u(x,\tau)d\xi ds d\tau dx\\
=&\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t u(\xi,\tau)d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx, \qquad (2.1.29)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau G(x,\xi)f(u(\xi,s))f(u(x,\tau))dsd\tau d\xi dx\\
=&\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t f(u(\xi,\tau))d\tau\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]d\xi dx,
\end{aligned}\tag{2.1.30}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau G(x,\xi)f(u(\xi,s))u(x,\tau)dsd\tau d\xi dx\\
&+\int_0^1\int_0^1\int_0^t\int_0^\tau G(x,\xi)u(\xi,s)f(u(x,\tau))dsd\tau d\xi dx\\
=&\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t f(u(\xi,\tau))d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx.
\end{aligned}\tag{2.1.31}$$

将式 (2.1.29)–(2.1.31) 代入式 (2.1.25) 得

$$\begin{aligned}
&2\int_0^1 F(u(x,t))dx+\int_0^1 u^2(x,t)dx+\int_0^1\left[\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]^2dx\\
&+\int_0^1\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]^2dx\\
=&2\int_0^1 F(u_0(x))dx+\int_0^1 u_0^2(x)dx+2\int_0^1 u_1(x)\int_0^t[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))]d\tau dx\\
&+2f(0)\int_0^1\int_0^t\tau[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))]d\tau dx\\
&+\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t u(\xi,\tau)d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx\\
&+\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t f(u(\xi,\tau))d\tau\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]d\xi dx\\
&+2\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t f(u(\xi,\tau))d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx\\
&-2f(0)\int_0^1\int_0^t\int_0^1\tau G(x,\xi)[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))]d\xi d\tau dx\\
&-2\int_0^1\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]dx.
\end{aligned}\tag{2.1.32}$$

现在对式 (2.1.32) 中的右端项作一系列的估计. 应用 Cauchy 不等式、Hölder 不等式和条件 (2.1.19) 可得

$$2\int_0^1 u_1(x)\left[\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]dx\leqslant\frac{7}{3}\int_0^1 u_1^2(x)dx+\frac{3}{7}\int_0^1\left[\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]^2dx,\tag{2.1.33}$$

$$2\int_0^1 u_1(x)\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]dx$$

$$\leqslant \frac{14}{3}\int_0^1 u_1^2(x)dx + \frac{3}{14}\int_0^1 \left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]^2 dx, \tag{2.1.34}$$

$$2f(0)\int_0^1\int_0^t \tau u(x,\tau)d\tau dx \leqslant |f(0)|T^2 + |f(0)|T\int_0^1\int_0^t |u(x,\tau)|^2 d\tau dx, \tag{2.1.35}$$

$$2f(0)\int_0^1\int_0^t \tau f(u(x,\tau))d\tau dx \leqslant 2|f(0)|TA\int_0^1\int_0^t F(u(x,t))dxd\tau + 2B|f(0)|T^2, \tag{2.1.36}$$

$$\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t u(\xi,\tau)d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx \leqslant \frac{2}{7}\int_0^1\left[\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]^2 dx, \tag{2.1.37}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t f(u(\xi,\tau))d\tau\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]d\xi dx\\ \leqslant &\frac{2}{7}\int_0^1\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]^2 dx,\end{aligned} \tag{2.1.38}$$

$$\begin{aligned}&2\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\left[\int_0^t f(u(\xi,\tau))d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx\\ \leqslant &\frac{2}{7}\int_0^1\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]^2 dx + \frac{2}{7}\int_0^1\left[\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]^2 dx,\end{aligned} \tag{2.1.39}$$

$$\begin{aligned}&-2f(0)\int_0^1\int_0^1\int_0^t \tau G(x,\xi)u(\xi,\tau)d\tau d\xi dx\\ \leqslant &\frac{2}{7}|f(0)|T^2 + \frac{2}{7}|f(0)|T\int_0^1\int_0^t |u(x,\tau)|^2 d\tau dx,\end{aligned} \tag{2.1.40}$$

$$\begin{aligned}&-2f(0)\int_0^1\int_0^1\int_0^t \tau G(x,\xi)f(u(\xi,\tau))d\tau d\xi dx\\ \leqslant &\frac{4}{7}|f(0)|TA\int_0^1\int_0^t F(u(x,\tau))d\tau dx + \frac{4}{7}B|f(0)|T^2,\end{aligned} \tag{2.1.41}$$

$$\begin{aligned}&-2\int_0^1\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\int_0^t u(x,\tau)d\tau\right]dx\\ \leqslant &\frac{3}{14}\int_0^1\left[\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau\right]^2 dx + \frac{14}{3}T\int_0^1\int_0^t |u(x,\tau)|^2 d\tau dx.\end{aligned} \tag{2.1.42}$$

把式 (2.1.33)–(2.1.42) 代入式 (2.1.32), 可知

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^1 F(u(x,\tau))dx+\int_0^1 u^2(x,t)dx\\
\leqslant{}&2\int_0^1 F(u_0(x))dx+\int_0^1 u_0^2(x)dx+7\int_0^1 u_1^2(x)dx\\
&+\left(\frac{9}{7}+\frac{18}{7}B\right)|f(0)|T^2+\left(\frac{9}{7}|f(0)|+\frac{14}{3}\right)T\int_0^t\int_0^1 |u(x,\tau)|^2dxd\tau\\
&+\frac{18}{7}|f(0)|TA\int_0^t\int_0^1 F(u(x,\tau))dxd\tau. \qquad (2.1.43)
\end{aligned}
$$

式 (2.1.43) 两端乘以 A, 把所得积加到 $2B$ 上, 并应用式 (2.1.19) 得

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^1 (AF(u(x,\tau))+B)dx+A\int_0^1 u^2(x,t)dx\\
\leqslant{}&2A\int_0^1 F(u_0(x))dx+A\int_0^1 u_0^2(x)dx+7A\int_0^1 u_1^2(x)dx\\
&+A\left(\frac{9}{7}+\frac{18}{7}B\right)|f(0)|T^2+A\left(\frac{9}{7}|f(0)|+\frac{14}{3}\right)T\int_0^t\int_0^1 |u(x,\tau)|^2dxd\tau\\
&+\frac{18}{7}|f(0)|TA\int_0^t\int_0^1 [AF(u(x,\tau))+B]dxd\tau+2B. \qquad (2.1.44)
\end{aligned}
$$

由 Gronwall 不等式导出

$$
\int_0^1 |f(u(x,\tau))|dx+\int_0^1 u^2(x,t)dx\leqslant M_1(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \qquad (2.1.45)
$$

□

引理 2.1.4 在引理 2.1.3 的假定条件下, 初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的广义解 $u(x,t)$ 有估计

$$
u_t^2+u^2\leqslant M_2(T),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \qquad (2.1.46)
$$

其中 $M_2(T)$ 是依赖于 T 的常数.

证明 积分方程 (2.1.12) 对 t 求导两次得

$$
u_{tt}(x,t)+u(x,t)+f(u(x,t))=f(0)+\int_0^1 G(x,\xi)[u(\xi,t)+f(u(\xi,t))-f(0)]d\xi. \qquad (2.1.47)
$$

式 (2.1.47) 两端乘以 Au_t 并应用式 (2.1.19) 和式 (2.1.20) 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[Au_t^2+Au^2+2(AF(u)+B)\right]\\
={}&2A\left\{f(0)+\int_0^1 G(x,\xi)[u(\xi,t)+f(u(\xi,t))-f(0)]d\xi\right\}u_t(x,t)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{4}{7}A\left\{\frac{9}{2}|f(0)| + \left[\int_0^1 u^2(\xi,t)d\xi\right]^{1/2} + \int_0^1 |f(u(\xi,t))|d\xi\right\}|u_t|$$
$$\leqslant C_1(T)|u_t|.$$

上式对 t 积分知

$$\begin{aligned}&Au_t^2 + Au^2 + 2(AF(u)+B)\\ &\leqslant Au_1^2 + Au_0^2 + 2(AF(u_0)+B)C_2(T) + \frac{1}{2}\int_0^t u_t^2(x,\tau)d\tau.\end{aligned}$$

这里 $C_1(T)$ 和 $C_2(T)$ 是依赖于 T 的常数. 应用 Gronwall 不等式导出式 (2.1.46). □

定理 2.1.2 设 $u_0(x), u_1(x) \in C[0,1]$ 满足边值条件 (2.1.6), $f(s) \in C^1(\mathbb{R})$ 满足条件 (2.1.19), 则初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 存在唯一的整体广义解 $u(x,t) \in C^2([0,\infty]; C[0,1])$.

证明 根据定理 2.1.1 只需证明式 (2.1.16) 成立. 事实上, 由引理 2.1.4 知

$$\|u(\cdot,t)\|_{C[0,1]} + \|u_t(\cdot,t)\|_{C[0,1]} \leqslant 2(M_2(T))^{1/2}.$$

所以

$$\sup_{t\in[0,t_0)} (\|u(\cdot,t)\|_{C[0,1]} + \|u_t(\cdot,t)\|_{C[0,1]}) < \infty.$$

由定理 2.1.1 得 $T_0 = \infty$. 由 (2.1.47) 知 $\|u_{tt}(\cdot,t)\|_{C[0,1]} \leqslant M_2'T$, $\forall t \in [0,T]$. □

2.1.4 初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 整体古典解的存在性

为了证明初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 整体古典解的存在性, 首先研究初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 整体广义解的正则性.

引理 2.1.5 若定理 2.1.2 的条件成立, 且 $u_0(x), u_1(x) \in C^k[0,1]$, $f(s) \in C^{k+m}(\mathbb{R})$ ($k \geqslant 1$, $m \geqslant 0$ 是任意整数), 则初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 广义解 $u(x,t)$ 属于 $C^{m+2}([0,T]; C^{k-1}[0,1])$ ($\forall T > 0$).

证明 我们应用归纳法. 当 $m = 1$ 时, 方程 (2.1.12) 对 x 求导得

$$\begin{aligned}u_x(x,t) = {}& u_{0x}(x) + tu_{1x}(x) - \int_0^t (t-\tau)[u_x(x,\tau) + f'(u(x,\tau))u_x(x,\tau)]d\tau\\ &+ \int_0^t\int_0^1 (t-\tau)G_x(x,\xi)[u(\xi,\tau) + f(u(\xi,\tau)) - f(0)]d\xi d\tau. \qquad (2.1.48)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|u_x(\cdot,t)\|_{C[0,1]} \leqslant {}& \|u_{0x}\|_{C[0,1]} + T\|u_{1x}\|_{C[0,1]}\\ &+ C_3(T)\int_0^t \|u_x(\cdot,\tau)\|_{C[0,1]}d\tau + C_4(T).\end{aligned}$$

应用 Gronwall 不等式知

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(\cdot,\tau)\|_{C[0,1]}\leqslant M_3(T). \tag{2.1.49}$$

当 $m=2$ 时, 积分方程 (2.1.48) 对 x 求导, 并应用 $G(x,\xi)=G_{xx}(x,\xi)$ $(x\neq\xi)$ 有

$$\begin{aligned}u_{xx}(x,\tau)=&u_{0xx}+tu_{1xx}-\int_0^t(t-\tau)[u_{xx}(x,\tau)+f(u(x,\tau))_{x^2}]d\tau\\&-\int_0^t(t-\tau)[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))-f(0)]d\tau\\&+\int_0^t\int_0^1(t-\tau)G(x,\xi)[u(\xi,\tau)+f(u(\xi,\tau))-f(0)]d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{2.1.50}$$

由式 (2.1.50) 推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{C[0,1]}\leqslant M_4(T). \tag{2.1.51}$$

现在假定 $m=k-1$ 时, 估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{x^{k-1}}(\cdot,t)\|_{C[0,1]}\leqslant M_5(T) \tag{2.1.52}$$

成立. 我们可证 $m=k$ 时, 估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{x^k}(\cdot,t)\|_{C[0,1]}\leqslant M_6(T) \tag{2.1.53}$$

也成立, 其中 $M_i(T)$ $(i=3,4,5,6)$ 是依赖于 T 的常数. 当 $k=2j-1$ $(i=1,2,\cdots)$, 即 k 是一奇数时, 积分方程 (2.1.12) 对 x 求导 $2j-1$ 次, 得

$$\begin{aligned}u_{x^{2j-1}}(x,t)=&u_{0x^{2j-1}}(x)+tu_{1x^{2j-1}}(x)\\&-\int_0^t(t-\tau)\sum_{i=1,3,\cdots,2j-1}[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))]_{x^i}d\tau\\&+\int_0^t\int_0^1(t-\tau)G_x(x,\xi)[u(\xi,\tau)+f(u(\xi,\tau))-f(0)]d\xi d\tau,\\&j=1,2,\cdots,2j-1=k.\end{aligned} \tag{2.1.54}$$

当 $k=2j(j=1,2,\cdots)$, 即 k 是一偶数时, 积分方程 (2.1.12) 对 x 求导 $2j$ 次, 有

$$\begin{aligned}u_{x^{2j}}(x,t)=&u_{0x^{2j}}(x)+tu_{1x^{2j}}(x)\\&-\int_0^t(t-\tau)\sum_{i=0,2,\cdots,2j}[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))-f(0)]_{x^i}d\tau\\&+\int_0^t\int_0^1(t-\tau)G_x(x,\xi)[u(\xi,\tau)+f(u(\xi,\tau))-f(0)]d\xi d\tau,\\&j=1,2,\cdots,2j=k.\end{aligned} \tag{2.1.55}$$

由式 (2.1.54) 和式 (2.1.55) 推出

$$\|u_{x^k}(\cdot,t)\|_{C[0,1]} \leqslant \|u_{0x^k}\|_{C[0,1]} + T\|u_{1x^k}\|_{C[0,1]} + C_5(T)\int_0^t \|u_{x^k}(\cdot,\tau)\|_{C[0,1]}d\tau + C_6(T),$$

其中 $C_5(T)$ 和 $C_6(T)$ 是依赖于 T 的常数. 由 Gronwall 不等式给出式 (2.1.53). 由式 (2.1.53) 有

$$u(x,t) \in C([0,T];C^{k-1}[0,1]).$$

在式 (2.1.55) 中令 $k-1=2j$ $(j=0,1,\cdots)$. 此结果对 t 求导得

$$u_{x^{2j}t}(x,t) = u_{1x^{2j}}(x) - \int_0^t \sum_{i=0,2,\cdots,2j}[u(x,\tau)+f(u(x,\tau))-f(0)]_{x^i}d\tau + \int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)[u(\xi,\tau)+f(u(\xi,\tau))-f(0)]d\xi d\tau. \quad (2.1.56)$$

由积分方程 (2.1.56) 推出 $u_{x^{2j}t}(x,t)\in C([0,T];C[0,1])$.

当 $k-1=2j-1(j=1,2,\cdots)$ 时, 我们利用上面的相同方法得 $u_{x^{2j-1}tt}\in C([0,T];C[0,1])$, 应用归纳法可证

$$u(x,t)\in C^{m+2}([0,T];C^{k-1}[0,1]). \qquad \square$$

定理 2.1.3 设 $u_0,u_1\in C^3[0,1]$, $u_0(0)=u_0(1)=0$, $u_1(0)=u_1(1)=0$, $f\in C^3(\mathbb{R})$, 且

$$|f(u)| \leqslant A\int_0^u f(s)ds + B, \quad (2.1.57)$$

其中 $A>0, B>0$ 是常数, 则初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的整体广义解 $u(x,t)$ 是初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的整体古典解.

证明 定理 2.1.3 的假定和引理 2.1.5 的结论指出 $u(x,t)\in C^3([0,\infty);C^2[0,1])$. 容易由积分方程 (2.1.12) 看出, $u(x,t)$ 满足初边值条件 (2.1.6) 和 (2.1.7). 现在证明 $u(x,t)$ 满足方程 (2.1.5). 积分方程 (2.1.12) 对 t 求导两次, 得

$$u_{tt}(x,t) = -[u(x,t)+f(u(x,t))-f(0)] + \int_0^1 G(x,\xi)[u(\xi,t)+f(u(\xi,t))-f(0)]d\xi. \quad (2.1.58)$$

积分方程 (2.1.58) 对 x 求导两次, 有

$$u_{xxtt}(x,t) = -[u_{xx}(x,t)+f(u(x,t))_{xx}] - [u(x,t)+f(u(x,t))-f(0)] + \int_0^1 G_{xx}(x,\xi)[u(\xi,t)+f(u(\xi,t))-f(0)]d\xi. \quad (2.1.59)$$

注意到 $G(x,\xi) = G_{xx}(x,\xi)$ $(x \neq \xi)$, 并由积分方程 (2.1.58) 减积分方程 (2.1.59) 看出 $u(x,t)$ 满足方程 (2.1.5). □

2.1.5 初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 解的爆破

现在考虑初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 解的爆破, 根据上面的方法易证下面的引理.

引理 2.1.6 设 $u_0(x), u_1(x) \in C^k[0,1]$, $u_0(0) = u_0(1) = u_1(0) = u_1(1) = 0$, $f(s) \in C^k(\mathbb{R})$, 则初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 存在唯一局部古典解 $u(x,t) \in C^k([0,T_0); C^{k-1}[0,1])$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间, $k \geqslant 3$ 是一自然数.

定理 2.1.4 设 $u(x,t)$ 是初边值问题 (2.1.5)–(2.1.7) 的古典解, 又设下列条件成立:

(1) $-(\pi/2)\int_0^1 u_0(x)\sin\pi x dx = \alpha > 0$, $-(\pi/2)\int_0^1 u_1(x)\sin\pi x dx = \beta > 0$, 其中 $(\pi/2)\sin\pi x$ 表示下列问题

$$\begin{aligned}&\psi'' + \lambda\psi = 0, \quad x \in (0,1),\\&\psi(0) = \psi(1) = 0\end{aligned}$$

的第一标准特征函数, $\lambda = \pi^2$ 表示对应的第一特征值.

(2) $f(s) \in C^2(\mathbb{R})$ 是一偶凸函数, 且满足

(i) $f(s) - s$ 对于 $s \geqslant \alpha$ 是一非负减函数;

(ii) 当 $s \to \infty$ 时, $f(s)$ 增长得足够快, 使得积分

$$\bar{T} = \int_\alpha^\infty \left[\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\pi^2}{1+\pi^2}s^2 + \frac{2\pi^2}{1+\pi^2}\int_\alpha^s f(\xi)d\xi\right]^{-1/2} ds \tag{2.1.60}$$

收敛, 则对于某个有限时刻 $t_0 \leqslant \bar{T}$, 有

$$\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in[0,1]}|u(x,t)| = \infty,$$

其中 $\bar{T}$ 由式 (2.1.60) 给定.

证明 令

$$\phi(t) = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\pi x dx,$$

方程 (2.1.5) 两端同乘以 $(\pi/2)\sin\pi x$ 在 $(0,1)$ 上积分, 并对 x 分部积分有

$$\ddot{\phi} + \frac{\pi^2}{1+\pi^2}\phi = \frac{\pi^2}{1+\pi^2}\int_0^1 \frac{\pi}{2}\sin\pi x f(u)dx. \tag{2.1.61}$$

因为 $f(s)$ 是一偶凸函数, 由 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\pi}{2}\sin\pi x f(u)dx &\geqslant f\left(\int_0^1 u\frac{\pi}{2}\sin\pi x dx\right)\\&= f\left(-\frac{\pi}{2}\int_0^1 u\sin\pi x dx\right) = f(\phi).\end{aligned} \tag{2.1.62}$$

将式 (2.1.62) 代入式 (2.1.61) 可知

$$\ddot{\phi} + \frac{\pi^2}{1+\pi^2}\phi \geqslant \frac{\pi^2}{1+\pi^2}f(\phi)$$

且满足 $\phi(0) = \alpha > 0$ 和 $\dot{\phi}(0) = \beta > 0$. 由于对所有 $s \geqslant \alpha$, $h(s) = f(s) - s \geqslant 0$, 由引理 1.8.1 推出

$$t = \int_\alpha^{\phi(t)} \left[\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\pi^2}{1+\pi^2}s^2 + \frac{2\pi^2}{1+\pi^2}\int_\alpha^s f(\xi)d\xi\right]^{-1/2} ds,$$

且 $\phi(t)$ 在有限时刻 $t_0 \leqslant \bar{T}$ 发生奇性. 最后, 因为 $\phi(t) > 0$, 所以

$$\phi(t) \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |u(x,t)|. \qquad \square$$

推论 2.1.1 对每一个 p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p[0,1]} = \left(\int_0^1 |u(x,t)|^p dx\right)^{1/p}$$

在有限时刻爆破.

2.1.6 在方程 (2.1.5) 中 $f(u) = Ku^q$ 的情况

下面讨论方程 (2.1.5) 中 $f(u) = Ku^q$ 的情况, 此方程变为

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = (Ku^q)_{xx}, \tag{2.1.5^a}$$

其中 $K \neq 0$ 和 $q > 1$ 是常数. 显然, 方程 (2.1.5^a) 包括 IBq 方程 (2.1.2) 和 IMBq 方程 (2.1.3).

定理 2.1.5 设 $u_0, u_1 \in C^3[0,1]$ 满足边值条件 (2.1.6), $K > 0$ 是一实数, $q \geqslant 3$ 是一奇数, 则初边值问题 (2.1.5^a), (2.1.6), (2.1.7) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)$.

证明 根据定理 2.1.3 只需证明 $f(u) = Ku^q$ 满足条件 (2.1.57). 事实上, 取 $p = (q+1)/q$, $p' = q+1$, 并利用 Young 不等式得

$$|Ku^q| = K|u|^q \leqslant K\left(\frac{|u|^{qp}}{p} + \frac{1}{p'}\right) = K\frac{q}{q+1}u^{q+1} + \frac{K}{q+1} = q\int_0^s Ks^q ds + \frac{K}{q+1}. \qquad \square$$

注 2.1.1 $f(s) = e^q$ 也满足条件 (2.1.57). 设 $u_0, u_1 \in C^3[0,1]$ 满足边值条件 (2.1.6), 易知 IMBq 方程 (2.1.3) 的初边值问题 ($2.1.5^a$), (2.1.6), (2.1.7) 有唯一整体古典解 $u(x,t)$.

根据引理 2.1.6, 如果 $K \neq 0$, q 满足 $q > 1$, $(-1)^q = 1$, $u_0(x), u_1(x) \in C^3[0,1]$, $u_0(0) = u_0(1) = u_1(0) = u_1(1) = 0$, 则初边值问题 ($2.1.5^a$), (2.1.6), (2.1.7) 有唯一局部古典解 $u(x,t)$.

定理 2.1.6 令 $u(x,t)$ 是初边值问题 ($2.1.5^a$), (2.1.6), (2.1.7) 的古典解. 设 $K \neq 0$, $q > 1$, $(-1)^q = 1$.

(1) 如果 $K > 0$,

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_0(x)\sin \pi x dx = \alpha > \left(\frac{1}{K}\right)^{1/(\alpha-1)},$$

且

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_1(x)\sin x dx = \beta > 0,$$

则对于某有限时刻

$$t_0 \leqslant \bar{T} = \int_\alpha^\infty \left[\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\pi^2}{1+\pi^2}s^2 + \frac{2\pi^2 K}{(1+\pi^2)(q+1)}(s^{q+1} - \alpha^{q+1})\right]^{-1/2} ds,$$

$$\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in[0,1]} |u(x,t)| = \infty.$$

(2) 如果 $K < 0$,

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_0(x)\sin \pi x dx = \alpha > \left(-\frac{1}{K}\right)^{1/(q-1)},$$

且

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_1(x)\sin x dx = \beta > 0,$$

则对于某有限时刻

$$t_0 \leqslant \bar{T} = \int_\alpha^\infty \left[\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\pi^2}{1+\pi^2}s^2 + \frac{2\pi^2 K}{(1+\pi^2)(q+1)}(s^{q+1} - \alpha^{q+1})\right]^{-1/2} ds,$$

$$\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in[0,1]} |u(x,t)| = \infty.$$

证明 对于情况 (1), 由定理 2.1.4 推出结论是正确的. 应用定理 2.1.4 同样方法易证情况 (2). □

注 2.1.2 如果 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 满足条件:

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_0(x)\sin \pi x dx = \alpha > 1 \quad 和 \quad -\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_1(x)\sin \pi x dx = \beta > 0,$$

则 IBq 方程的初边值问题 (2.1.6), (2.1.7) 的解在有限时刻爆破.

2.1.7 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [35]. 与本节内容有关的文献见 [36]–[39], [361], [362].

2.2 一非线性四阶波动方程解的存在性和不存在性

2.2.1 引言

文献 [40] 研究弹性杆的非线性波时, 提出了四阶非线性波动方程

$$u_{tt} - C_0^2(1 + na_n u_x^{n-1})u_{xx} - \beta u_{xxtt} = \gamma u_{xxt}, \tag{2.2.1}$$

其中 C_0^2, $\gamma, \beta > 0$ 和 $a_n \neq 0$ 是常数, n 是一自然数.

本节研究下列第一初边值问题

$$u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 u_{xxt} - a_3 u_{xxtt} = \varphi(u_x)_x, \tag{2.2.2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2.2.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in [0,1] \tag{2.2.4}$$

和方程 (2.2.2) 的第二初边值问题

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2.2.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in [0,1], \tag{2.2.6}$$

其中 $u(x,t)$ 是一未知函数, $a_i > 0\ (i = 1,2,3)$ 是常数, $\varphi(s)$ 是一给定的非线性函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是给定的初值函数. 显然, 方程 (2.2.1) 是方程 (2.2.2) 的特殊情形.

下面证明第一初边值问题 (2.2.2)–(2.2.4) 和第二初边值问题 (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6) 存在唯一整体古典解和整体古典解的不存在性.

2.2.2 问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的局部解的存在性和唯一性

令 $K(x,\xi)$ 是下列常微分方程边值问题

$$y - a_3 y'' = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

的 Green 函数 [34], 其中 $a_3 > 0$ 是一实数, 即

$$K(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{a_3}\sinh\dfrac{1}{\sqrt{a_3}}}\begin{cases} \sinh\dfrac{x}{\sqrt{a_3}}\sinh\dfrac{1-\xi}{a_3}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \sinh\dfrac{1-x}{\sqrt{a_3}}\sinh\dfrac{\xi}{a_3}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

设 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 适当光滑, 且满足边值条件 (2.2.3), $u(x,t)$ 是问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的古典解, 则方程 (2.2.2) 满足条件 (2.2.3) 的解 $u(x,t)$ 满足积分方程

$$u_{tt}(x,t) = a_1\int_0^1 K(x,\xi)u_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi + a_2\int_0^1 K(x,\xi)u_{\xi\xi t}(\xi,t)d\xi + \int_0^1 K(x,\xi)\varphi(u_\xi(\xi,t))_\xi d\xi. \tag{2.2.8}$$

所以问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的古典解应满足下列积分方程

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & u_0(x) + u_1(x)t - a_2\left[\int_0^1 K(x,\xi)u_{0\xi\xi}(\xi)d\xi\right]t \\ & + a_1\int_0^t\int_0^1 (t-\tau)K(x,\xi)u_{\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau + a_2\int_0^t\int_0^1 K(x,\xi)u_{\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau \\ & + \int_0^t\int_0^1 (t-\tau)K(x,\xi)\varphi(u_\xi(\xi,\tau))_\xi d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

应用 Green 函数 $K(x,\xi)$ 的性质, 易证下列引理.

引理 2.2.1 设 $u_0(x), u_1(x) \in C^2[0,1], u_0(0) = u_0(1) = u_1(0) = u_1(1) = 0$, $\varphi(s) \in C^1(\mathbb{R})$ 和 $u(x,t) \in C([0,T];C^2[0,1])$ 是方程 (2.2.9) 的解, 则 $u(x,t)$ 必是问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的古典解.

下面应用压缩映射原理证明积分方程 (2.2.9) 存在局部古典解. 为此, 定义函数空间

$$X(T) = \{u(x,t)|u \in C([0,T];C^2[0,1]), u(0,t) = u(1,t) = 0\},$$

并赋予范数

$$\|u\|_{X(T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\sum_{i=1}^{2}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|u_{x^i}(x,t)|\right] = \|u\|_{C([0,T];\ C^2[0,1])}, \quad \forall u \in X(T).$$

易知 $X(T)$ 是一个 Banach 空间. 令

$$U = \|u_0\|_{C^1[0,1]} + \|u_{1x}\|_{C^1[0,1]},$$

并定义集合

$$P(U,T) = \{u|u \in X(T), \|u\|_{X(T)} \leqslant 2U\}.$$

显然, $P(U,T)$ 对于每一对 $U,T > 0$ 是 $X(T)$ 的一非空有界闭凸子集. 定义映射 S 如下

$$Sw = u_0(x) + u_1(x)t - a_2\left[\int_0^1 K(x,\xi)u_{0\xi\xi}(\xi)d\xi\right]t$$

$$+ a_1 \int_0^t \int_0^1 (t-\tau) K(x,\xi) w_{\xi\xi}(\xi,\tau) d\xi d\tau + a_2 \int_0^t \int_0^1 K(x,\xi) w_{\xi\xi}(\xi,\tau) d\xi d\tau$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 (t-\tau) K(x,\xi) \varphi(w_\xi(\xi,\tau))_\xi d\xi d\tau, \quad \forall w \in P(U,T). \tag{2.2.10}$$

显然, S 映 $X(T)$ 到 $X(T)$. 易证.

引理 2.2.2 设 $u_0, u_1 \in C^2[0,1], u_0(0) = u_0(1) = u_1(0) = u_1(1) = 0$ 和 $\varphi(s) \in C^2(\mathbb{R})$, 那么 S 映 $P(U,T)$ 到 $P(U,T)$, 且若 T 相对于 U 适当小, $S: P(U,T) \mapsto P(U,T)$ 是严格压缩的.

应用压缩映射原理和解的延拓, 如定理 2.1.1 易证

定理 2.2.1 设引理 2.2.2 的条件成立, 则积分方程 (2.2.9) 存在唯一解 $u(x,t) \in C([0,T]; C^2[0,T_0))$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)} (\|u_x\|_{C^1[0,1]} + \|u_{xt}\|_{C^1[0,1]}) < \infty, \tag{2.2.11}$$

则 $T_0 = \infty$.

2.2.3 问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的整体古典解

引理 2.2.3 设 $u_0(x), u_1(x) \in H^1[0,1]$ 满足边界条件 (2.2.3), $\varphi(s) \in C^2(\mathbb{R})$, 则问题 (2.2.2)–(2.2.4) 满足下列等式

$$\begin{aligned}
E(t) &= \|u_t\|^2_{L_2[0,1]} + a_1 \|u_x\|^2_{L_2[0,1]} + a_3 \|u_{xt}\|^2_{L_2[0,1]} \\
&\quad + 2a_2 \int_0^t \int_0^1 u^2_{x\tau} dx d\tau + 2 \int_0^1 \int_0^{u_x} \varphi(s) ds dx \\
&= \|u_1\|^2_{L_2[0,1]} + a_1 \|u_{0x}\|^2_{L_2[0,1]} + a_3 \|u_{1x}\|^2_{L_2[0,1]} + 2 \int_0^1 \int_0^{u_x} \varphi(s) ds dx \\
&\equiv E(0), \quad \forall t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

证明 方程 (2.2.2) 两端同乘以 u_t, 乘积在 $[0,1] \times [0,t]$ 上积分, 且对 t 分部积分, 可得式 (2.2.12). □

定理 2.2.2 设定理 2.2.1 的条件和下列条件

$$|\varphi(s)| \leqslant A \int_0^s \varphi(y) dy + B \tag{2.2.13}$$

成立, 其中 A 和 B 是正常数, 则问题 (2.2.2)–(2.2.4) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)$.

注 2.2.1 满足条件 (2.2.13) 中的函数 $\varphi(s)$ 是存在的. 例如, $\varphi(s) = e^s$ 满足不等式 (2.2.13) 的第一个例子. 当 $r > 0$ 是一实数且 n 是一奇数时, $\varphi(s) = rs^n$ 是满足不等式 (2.2.13) 的第二个例子.

定理 2.2.2 的证明 根据定理 2.2.1, 只需证明式 (2.2.11) 成立. 令 $T \in (0, T_0)$ 给定. 在式 (2.2.9) 中进行分部积分, 得

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & u_0(x) + u_1(x)t - a_2 \left[\int_0^1 K(x,\xi) u_{0\xi\xi}(\xi) d\xi\right] t \\
& - a_1 \int_0^t \int_0^1 (t-\tau) K_\xi(x,\xi) u_\xi(\xi,\tau) d\xi d\tau - a_2 \int_0^t \int_0^1 K_\xi(x,\xi) u_\xi(\xi,\tau) d\xi d\tau \\
& - \int_0^t \int_0^1 (t-\tau) K_\xi(x,\xi) \varphi(u_\xi(\xi,\tau)) d\xi d\tau, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T]. \quad (2.2.14)
\end{aligned}
$$

由式 (2.2.14) 推出

$$
\begin{aligned}
u_{xtt}(x,t) = & -\frac{a_1}{a_3} u_x(x,t) - a_1 \int_0^1 K_{\xi x}(x,\xi) u_\xi(\xi,\tau) d\xi - \frac{a_2}{a_3} u_{xt}(x,t) \\
& - a_2 \int_0^1 K_{\xi x}(x,\xi) u_{\xi,t}(\xi,t) d\xi - \frac{1}{a_3}\varphi(u_x(x,t)) \\
& - \int_0^1 K_{\xi x}(x,\xi) \varphi(u_\xi(\xi,t)) d\xi, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T]. \quad (2.2.15)
\end{aligned}
$$

方程 (2.2.15) 两端同乘以 $2u_{xt}$, 得

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left[u_{xt}^2 + \frac{a_1}{a_3} u_x^2 + \frac{2a_2}{a_3}\int_0^t u_{x\tau}^2(x,\tau) d\tau + \frac{2}{a_3}\int_0^{u_x} \varphi(s) ds\right] \\
= & 2\left[-a_1 \int_0^1 K_{\xi x}(x,\xi) u_\xi(\xi,\tau) d\xi - a_2 \int_0^1 K_{\xi x}(x,\xi) u_{\xi t}(\xi,t) d\xi \right. \\
& \left. - \int_0^1 K_{\xi x}(x,\xi) \varphi(u_\xi(\xi,t)) d\xi\right] u_{xt}, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T]. \quad (2.2.16)
\end{aligned}
$$

令 $E_1(x)$ 表示

$$
u_{1x}^2 + \frac{a_1}{a_3} u_{0x}^2 + \frac{2}{a_3}\left|\int_0^{u_{0x}(x)} \varphi(s) ds\right|.
$$

方程 (2.2.16) 两端对 t 积分, 并利用条件 (2.2.13) 和 (2.2.12), 有

$$
\begin{aligned}
& u_{xt}^2 + \frac{a_1}{a_3} u_x^2 + \frac{2a_2}{a_3}\int_0^t u_{x\tau}^2(x,\tau) d\tau + \frac{2}{a_3}\int_0^{u_x} \varphi(s) ds \\
\leqslant & E_1(x) + \int_0^t \left\{ \left[\int_0^1 4a_1 K_{\xi x}^2(x,\xi) d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 a_1 u_\xi^2(\xi,\tau) d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \left. + \left[\int_0^1 \frac{4a_2}{a_3} K_{\xi x}^2(x,\xi) d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 a_3 u_{\xi\tau}^2(\xi,\tau) d\xi\right]^{\frac{1}{2}} + C_1 \int_0^1 |\varphi(u_\xi(\xi,t))| d\xi \right\} |u_{x\tau}| d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant E_1(x) + \int_0^t \left\{ C_2 + a_1 \int_0^1 u_x^2(x,\tau)dx + a_3 \int_0^1 u_{x\tau}^2(x,\tau)dx \right.\\
&\quad \left. + C_1 \int_0^1 \left[A \int_0^{u_x(x,\tau)} \varphi(s)ds + B \right] dx \right\} |u_{x\tau}| d\tau \\
&\leqslant E_1(x) + \int_0^t [C_3 + C_4 E(0)] |u_{x\tau}| d\tau \\
&\leqslant E_1(x) + \frac{1}{4}[C_3 + C_4 E(0)]^2 T + \int_0^t u_{x\tau}^2 d\tau, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T]. \qquad (2.2.17)
\end{aligned}
$$

式 (2.2.17) 两端同乘以 A, 乘积两端分别加上 $\dfrac{2B}{a_3}$ 并应用式 (2.2.13), 得

$$
\begin{aligned}
&A u_{xt}^2 + \frac{Aa_1}{a_3} u_x^2 + \frac{2Aa_2}{a_3} \int_0^t u_{x\tau}^2(x,\tau)d\tau + \frac{2}{a_3} |\varphi(u_x)| \\
&\leqslant M_1(T) + A \int_0^t u_{x\tau}^2 d\tau, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T]. \qquad (2.2.18)
\end{aligned}
$$

由式 (2.2.18) 和 Gronwall 不等式给出

$$
A u_{xt}^2 + \frac{Aa_1}{a_3} u_x^2 + \frac{2Aa_2}{a_3} \int_0^t u_{x\tau}^2(x,\tau)d\tau + \frac{2}{a_3} |\varphi(u_x)| \leqslant M_1(T) e^{AT}, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T].
$$

所以

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_x\|_{C[0,1]}, \ \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_{xt}\|_{C[0,1]}, \ \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|\varphi(u_x)\|_{C[0,1]}, \ \int_0^t u_{x\tau}^2(x,\tau)dt \leqslant M_2(T), \qquad (2.2.19)
$$

其中 $M_2(T)$ 是依赖 T 的常数. 式 (2.2.14) 对 x 求导两次, 得估计

$$
|u_{xx}(x,t)| \leqslant M_3(T) + M_4(T) \int_0^t |u_{xx}(x,\tau)| d\tau, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T].
$$

应用 Gronwall 不等式有

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{C[0,1]} \leqslant M_5(T), \qquad (2.2.20)
$$

其中 $M_5(T)$ 是依赖 T 的常数. 类似地可知

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_{xxt}(\cdot,t)\|_{C[0,1]} \leqslant M_6(T), \qquad (2.2.21)
$$

其中 $M_6(T)$ 是依赖 T 的常数. 由式 (2.2.19)–(2.2.21) 推出

$$
\sup_{t\in[0,T_0)} \left(\|u_x\|_{C^1[0,1]} + \|u_{xt}\|_{C^1[0,1]} \right) < \infty.
$$

根据定理 2.2.1 和引理 2.2.1 知, 问题 (2.2.2)–(2.2.4) 存在唯一整体古典解. □

2.2.4 问题 (2.2.2)–(2.2.4) 整体解的不存在性

定理 2.2.3 设下列条件成立:

(1) $E(0) \leqslant 0$;

(2) $\varphi(s) \in C^1(\mathbb{R}), \varphi(s)s \leqslant 2(2\sigma+1)\int_0^s \varphi(y)dy + 2\sigma a_1 s^2$;

(3) $2\sigma\int_0^1 (u_0u_1 + a_3u_{0x}u_{1x})dx - a_2\int_0^1 u_{0x}^2 dx > 0$, 其中 $\sigma > 0$ 是一常数,

则问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的古典解在有限时刻爆破.

证明 用凸性方法证明. 设 $u(x,t)$ 是问题 (2.2.2)–(2.2.4) 在 $[0,1]\times[0,T]$ 上的古典解. 置

$$F(t) = \int_0^1 (u^2 + a_3u_x^2)dx + \int_0^1\int_0^t a_2u_x^2 dxdt + (T-t)\int_0^1 a_2u_{0x}^2 dx. \tag{2.2.22}$$

应用 Cauchy 不等式和方程 (2.2.2), 由式 (2.2.22) 推出

$$\begin{aligned}FF'' - (1+\sigma)(F')^2 \geqslant F\bigg[&-2(2\sigma+1)\int_0^1 \left(u_t^2 + 2a_3u_{xt}^2 + 2a_2\int_0^t u_{x\tau}^2 d\tau\right)dx \\ &- 2\int_0^1 \varphi(u_x)u_x dx - 2a_1\int_0^1 u_x^2 dx + 4\sigma a_2\int_0^1\int_0^t u_{xt}^2 dxdt\bigg].\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

由式 (2.2.23), (2.2.12) 和假定 (1), (2) 知

$$\begin{aligned}FF'' - (1+\sigma)(F')^2 \geqslant F\bigg\{&-2(2\sigma+1)\left[E(0) - 2\int_0^1\int_0^{u_x}\varphi(s)ds - a_1\int_0^1 u_x^2 dx\right] \\ &-2\int_0^1 \varphi(u_x)u_x dx - 2a_1\int_0^1 u_x^2 dx + 4\sigma a_2\int_0^1\int_0^t u_{xt}^2 dxdt\bigg\} \\ \geqslant& -2(2\sigma+1)FE(0) \geqslant 0, \quad t\in[0,T].\end{aligned}$$

我们看出对于所有的 $t\in[0,T]$, 有 $F(t)>0$, 并由上面的假定 (3) 知 $F'(0)>0$. 应用凸性方法, 存在一常数 t_0, 使得

$$\lim_{t\to t_0^-} (\|u\|_{L_2[0,1]}^2 + a_3\|u_{xt}\|_{L_2[0,1]}^2) = \infty$$

和

$$T < t_0 = \left[\int_0^1 (u_0^2 + a_3u_{0x}^2)dx\right] \bigg/ \left[2\sigma\int_0^1 (u_0u_1 + a_3u_{0x}u_{1x})dx - a_2\int_0^1 u_{0x}^2 dx\right]. \ \square$$

定理 2.2.4 设 $u(x,t)$ 是问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的古典解并满足条件 $u_0(x)$, $u_1(x)\in C^1[0,1], \varphi\in C^1(\mathbb{R})$,

$$2\alpha\int_0^s \varphi(z)dz + \varphi(s)s + (\alpha+1)a_1s^2 \geqslant 0, \quad \alpha\geqslant 1,$$

那么解 $u(x,t)$ 对所有时间不可能存在, 如果初值满足下列条件之一:

(1) $E(0)<0$;

(2) $E(0)=0, \int_0^1\left(u_0u_1+\frac{a_2u_{0x}^2}{2}+a_3u_{0x}u_{1x}\right)dx<0$;

(3) $E(0)>0, \int_0^1\left(u_0u_1+\frac{a_2u_{0x}^2}{2}+a_3u_{0x}u_{1x}\right)dx<0$, 且

$$\left[\int_0^1\left(u_0u_1+\frac{a_2u_{0x}^2}{2}+a_3u_{0x}u_{1x}\right)dx\right]^2\geqslant 8\left[\int_0^1(u_0^2+a_3u_{1x}^2)dx\right]E(0).$$

证明 定义 $F(t)=\int_0^1\left(u^2+a_2\int_0^t u_x^2d\tau+a_3u_x^2\right)dx$, 从而

$$F'(t)=2\int_0^1\left(uu_t+\frac{a_2u_x^2}{2}+a_3u_xu_{xt}\right)dx.$$

令 $f(t)$ 是 $[0,T)$ 上二阶连续可导的正实值函数. 下面将利用 f 的进一步的限制. 我们有

$$\begin{aligned}
&f^2(t)F'(t)-f^2(0)F'(0)\\
=&2\int_0^1\int_0^t\frac{d}{ds}\left[\left(uu_s+\frac{a_2u_x^2}{2}+a_3u_xu_{xs}\right)f^2(s)\right]dsdx\\
=&2\int_0^1\int_0^t[2f(s)f'(s)(uu_s+a_3u_xu_{xs})+f^2(s)(u_s^2+a_3u_{xs}^2)]dsdx\\
&+2a_2\int_0^1\int_0^t[f(s)f'(s)u_x^2]dsdx\\
&+2\int_0^1\int_0^t f^2(s)(uu_s+a_2u_xu_{xs}+a_3u_xu_{xss})dsdx.
\end{aligned}\tag{2.2.24}$$

对于 $\alpha\geqslant 1$ 得

$$\begin{aligned}
&2\int_0^1\int_0^t[2f(s)f'(s)(uu_s+a_3u_xu_{xs})+f^2(s)(u_s^2+a_3u_{xs}^2)]dsdx\\
=&2(1-\alpha)\int_0^1\int_0^t\{[(f(s)u)_s]^2+a_3[(f(s)u_x)_s]^2-[f'(s)]^2(u^2+a_3u_x^2)\}dsdx\\
&+2\alpha\int_0^1\int_0^t[2f(s)f'(s)(uu_s+a_3u_xu_{xs})+f^2(s)(u_s^2+a_3u_{xs}^2)]dsdx\\
\leqslant&2(\alpha-1)\int_0^1\int_0^t[f'(s)]^2(u^2+a_3u_x^2)dsdx\\
&+2\alpha\int_0^1\int_0^t\frac{d}{ds}[f(s)f'(s)(u^2+a_3u_x^2)]dsdx
\end{aligned}$$

$$- 2\alpha \int_0^1 \int_0^t [f'(s)]^2 (u^2 + a_3 u_x^2) dsdx$$
$$- 2\alpha \int_0^1 \int_0^t f'(s) f''(s) (u^2 + a_3 u_x^2) dsdx$$
$$+ 2\alpha \int_0^1 \int_0^t f^2(s) (u_s^2 + a_3 u_{xs}^2) dsdx. \tag{2.2.25}$$

对于式 (2.2.24) 右端的最后项进行分部积分, 利用方程 (2.2.2)，将式 (2.2.25) 代入式 (2.2.24), 断言

$$\begin{aligned}
&f^2(t)F'(t) - f^2(0)F'(0) \\
\leqslant& 2(\alpha-1) \int_0^1 \int_0^t [f'(s)]^2 (u^2 + a_3 u_x^2) dsdx + 2\alpha \int_0^1 f(t) f'(t) (u^2 + a_3 u_x^2) dsdx \\
&- 2\alpha f'(0) f(0) \int_0^1 (u_0^2 + a_3 u_{0x}^2) dx - 2\alpha \int_0^1 \int_0^t [f'(s)]^2 (u^2 + a_3 u_x^2) dsdx \\
&- 2\alpha \int_0^1 \int_0^t f'(s) f''(s) (u^2 + a_3 u_x^2) dsdx + 2a_2 \int_0^1 \int_0^t f(s) f'(s) u_x^2 dsdx \\
&+ 2 \int_0^1 \int_0^t f^2(s) [\alpha (u_s^2 + a_3 u_{xs}^2) - (a_1 u_x^2 + \varphi(u_x) u_x)] dsdx \\
\leqslant& 2\alpha f(t) f'(t) F(t) - 2\alpha f'(0) f(0) F(0) + 2\alpha \int_0^t f^2(s) E(0) ds \\
&- 2 \int_0^1 \int_0^t [(f'(s))^2 + \alpha f(s) f''(s)] (u^2 + a_3 u_x^2) dsdx \\
&+ 2a_2 (1-\alpha) \int_0^1 \int_0^t f(s) f'(s) u_x^2 dsdx - 4a_2 \alpha \int_0^1 \int_0^t f^2(s) u_{xs}^2 dsdx \\
&- 2 \int_0^1 \int_0^t f^2(s) \left[(\alpha+1) a_1 u_x^2 + 2\alpha \int_0^{u_x} \varphi(s) ds + \varphi(u_x) u_x \right] dsdx.
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

现在要求 f 满足 $f'(s) + \alpha f f'' \geqslant 0$, 为此, 取 $f(t) = e^{\delta t}, \delta > 0$. 因为

$$(\alpha+1) a_1 s^2 + 2\alpha \int_0^s \varphi(z) dz + \varphi(s) s \geqslant 0,$$

由式 (2.2.26) 有

$$\begin{aligned}
&f^2(t)F'(t) - f^2(0)F'(0) \\
\leqslant& 2\alpha f(t) f'(t) F(t) - 2\alpha f'(0) f(0) F(0) + 2\alpha \int_0^t f^2(s) E(0) ds.
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

由式 (2.2.27) 知

$$F'(t) \leqslant 2\alpha\delta F(t) + \left(F'(0) - 2\alpha\delta F(0) - \frac{\alpha E(0)}{\delta} \right) e^{-\alpha\delta t} + \frac{\alpha E(0)}{\delta}.$$

最后得

$$F(t) \leqslant H_0 e^{2\alpha\delta t} + L_0 e^{-2\delta t} + \frac{E(0)}{2\delta^2}, \tag{2.2.28}$$

其中

$$2(\alpha+1)\delta^2 H_0 = \delta F'(0) + 2\delta^2 F(0) + E(0),$$
$$2(\alpha+1)\delta^2 L_0 = 2\alpha\delta^2 F(0) - \delta F'(0) + \alpha E(0).$$

如果 $H_0 < 0$, 则对于充分大的 t, 式 (2.2.27) 的左端大于等于零, 但是式 (2.2.27) 的右端小于零. 这是一个矛盾. 所以可以断定问题 (2.2.2)–(2.2.4) 不存在整体古典解. 假定条件 (1)–(3) 充分保证 $H_0 < 0$(对于 δ 的适当选择). □

注 2.2.2 应用 2.2.1–2.2.4 子节的同样方法可以得到问题 (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6) 的类似情况. 容易应用问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的结果到问题 (2.2.1), (2.2.3), (2.2.4) 以及问题 (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6) 和问题 (2.2.1), (2.2.5), (2.2.6) 的结果.

2.2.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [45]. 与本节内容有关的文献见 [41]–[44], [46]–[47].

2.3 一类非线性波动方程整体解的存在性和不存在性

2.3.1 引言

在文献 [48] 中, 作者研究弹塑性杆纵向运动的弹塑性微结构模型弱非线性时, 提出了如下模型方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} = a(u_x^2)_x + f(x), \tag{2.3.1}$$

其中未知函数 $u(x,t)$ 是位移, $f(x)$ 是已知函数, $a < 0$ 是一常数, 进一步研究了方程 (2.3.1) 的特殊解、特殊解的不稳定性以及常应变解的不稳定性等.

现在研究下列四阶非线性波动方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \sigma(u_x)_x + f(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t > 0 \tag{2.3.2}$$

具有初边值条件

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,1] \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

的问题, 或具有初边值条件

$$\begin{aligned} &u_x(0,t) = u_x(1,t) = u_{x^3}(0,t) = u_{x^3}(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,1] \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

的问题, 或具有初边值条件

$$\begin{aligned} &u(0,t)=u(1,t)=u_x(0,t)=u_x(1,t)=0, \quad t>0, \\ &u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in[0,1] \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

的问题.

我们还考虑下列 Boussinesq 型方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}=\sigma(u)_{xx}+f(x,t), \quad x\in(0,1), \quad t>0 \tag{2.3.6}$$

具有初边值条件 (2.3.3) 的问题.

2.3.2 主要结果

定理 2.3.1 (1) 设 $\varphi\in H^4[0,1]$, $\psi\in H^2[0,1]$, 对任意 $T>0$, $f\in H^1([0,T];L^2[0,1])$, $\sigma\in C^2(\mathbb{R})$, $\sigma''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件, 且 $\sigma'(s)$ 下有界, 即存在一个常数 C_0, 使得对任意 $s\in\mathbb{R}$, $\sigma'(s)\geqslant C_0$, 则问题 (2.3.2), (2.3.3), 问题 (2.3.2), (2.3.4) 和问题 (2.3.2), (2.3.5) 的每一个问题都存在唯一整体古典解

$$u\in C([0,\infty);H^4[0,1])\cap C^1([0,\infty);H^2[0,1])\cap C^2([0,\infty);L^2[0,1]).$$

(2) 设 $\varphi\in H^5[0,1]$, $\psi\in H^3[0,1]$, 对于任意 $T>0$, $f\in H^1([0,T];H^1[0,1])$, $\sigma\in C^3(\mathbb{R})$, $\sigma'''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件和 $\sigma'(s)$ 下有界.

(a) 如果 $\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(1)=\varphi''(0)=\varphi''(1)=0$, $f(0,t)=f(1,t)=0$, $t>0$, 则问题 (2.3.2), (2.3.4) 存在唯一整体古典解

$$u\in C([0,\infty);H^5[0,1])\cap C^1([0,\infty);H^3[0,1])\cap C^2([0,\infty);H^1[0,1]).$$

(b) 如果 $\varphi^{(5)}(0)=\varphi^{(5)}(1)=\psi^{(3)}(0)=\psi^{(3)}(1)=0$, $f_x(0,t)=f_x(1,t)=0$, $t>0$, $\sigma''(0)=0$, 则问题 (2.3.2), (2.3.4) 存在唯一整体古典解

$$u\in C([0,\infty);H^5[0,1])\cap C^1([0,\infty);H^3[0,1])\cap C^2([0,\infty);H^1[0,1]).$$

定理 2.3.2 设 $\varphi\in H^4[0,1]$, $\psi\in H^2[0,1]$, 且 $\phi^{(4)}(0)=\phi^{(4)}(1)=\psi^{(2)}(0)=\psi^{(2)}(1)=0$; 对任意 $T>0$, $f\in H^1([0,T];L^2[0,1])$ 且对于 $t>0$, $f(0,t)=f(1,t)=0$; $\sigma\in C^3(\mathbb{R}),\sigma'(s)$ 下有界, $\sigma'''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件和 $\sigma''(0)=0$, 则 Cauchy 问题 (2.3.6), (2.3.4) 存在唯一整体广义解

$$u\in C([0,\infty);H^4[0,1])\cap C^1([0,\infty);H^2[0,1])\cap C^2([0,\infty);L^2[0,1]).$$

定理 2.3.3 设

(1) $f(x,t)=0, \sigma(s)s\leqslant KG(s), G(s)\leqslant-\beta|s|^{p+1}$, 其中 $G(s)=\displaystyle\int_0^s\sigma(\tau)d\tau, K>2$, $\beta>0$ 和 $p>1$ 是常数;

(2) $\varphi \in H^2[0,1], \psi \in L^2[0,1]$,

$$E_0 = \|\psi\|^2_{L^2[0,1]} + \|\varphi''\|^2_{L^2[0,1]} + 2\int_0^1 G(\varphi'(x))dx$$
$$\leqslant \frac{-2^{(p-3)/(p-1)}}{[(K-2)\beta/(p+3)]^{2/(p-1)}(1-e^{-(p-1)/4})^{4/(p-1)}} < 0,$$

则问题 (2.3.2), (2.3.3) 和问题 (2.3.2), (2.3.5) 的每一个问题解在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 u_x^2(x,s)dxdsd\tau \to \infty,$$

其中此处和以后的 $\widetilde{T}$ 对于不同的问题是不同的.

定理 2.3.4　设 $\sigma(s)$ 是一凸函数, $\sigma(0)=0, \sigma(s) \geqslant as^p$, 其中 $a>0$ 是一实常数, $p>1$ 是一偶数,

$$f(x,t)=0, \quad \int_0^1 \varphi(x)\cos\pi x dx \geqslant \frac{2}{\pi}(a\pi^{p-3})^{-1/(p-1)}, \quad \int_0^1 \psi(x)\cos\pi x dx > 0,$$

则问题 (2.3.2), (2.3.4) 的解在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t)\cos\pi x dx \to \infty, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]} \to \infty.$$

定理 2.3.5　设 $f(x,t)=0$, $-\sigma(s)$ 是一凸函数, $\sigma(0)=0, \sigma(s) \leqslant as^p$, 其中 $a<0$, $p>1$ 是实数,

$$\int_0^1 \varphi(x)\cos\pi x dx \leqslant -\frac{2}{\pi}(-a\pi^{p-3})^{-1/(p-1)}, \quad \int_0^1 \psi(x)\cos\pi x dx < 0,$$

则问题 (2.3.2), (2.3.4) 的解在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t)\cos\pi x dx \to -\infty, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]} \to \infty.$$

定理 2.3.6　(1) 设 $f(x,t)=0$,

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin\pi x dx \leqslant -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{a}\right)^{1/(p-1)} \quad 和 \quad \int_0^1 \psi(x)\sin\pi x dx < 0,$$

$\sigma(s)$ 是一凸函数, $\sigma(s) \geqslant as^p$, 其中 $a>0$ 是一实数, $p>1$ 是一偶数, 则问题 (2.3.6), (2.3.3) 的解 $u(x,t)$ 在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t)\sin\pi x dx \to -\infty, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]} \to \infty.$$

(2) 设 $f(x,t)=0$,

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin\pi x dx \geqslant \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{a}\right)^{1/(p-1)} \quad 和 \quad \int_0^1 \psi(x)\sin\pi x dx > 0,$$

$-\sigma(s)$ 是一凸函数, $\sigma(s)\leqslant as^p$, 其中 $a<0$ 和 $p>1$ 是实数, 则问题 (2.3.6), (2.3.3) 的解 $u(x,t)$ 在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t)\sin\pi x dx\to\infty, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}\to\infty.$$

2.3.3 局部解

首先考虑线性波动方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}=g(x,t), \quad x\in(0,1), \quad t>0 \tag{2.3.7}$$

具有初边值条件 (2.3.3) 或 (2.3.4) 或 (2.3.5). 利用积分估计和 Galerkin 方法可以证明下列引理.

引理 2.3.1 设 $\varphi\in H^4[0,1]$, $\psi\in H^2[0,1], g\in H^1([0,T];L^2[0,1])$, 则问题 (2.3.2), (2.3.3), 问题 (2.3.2), (2.3.4) 和问题 (2.3.2), (2.3.5) 的每一个问题都有唯一解 $u\in C([0,T];H^4[0,1])\cap C^1([0,T];H^2[0,1])\cap C^2([0,T];L^2[0,1])$ 和成立估计

$$\begin{aligned}
&\|u_{tt}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}+\|u_t(\cdot,t)\|^2_{H^2[0,1]}+\|u(\cdot,t)\|^2_{H^4[0,1]}\\
\leqslant\ & Ce^{CT}\Bigg(\|\varphi\|^2_{H^4[0,1]}+\|\psi\|^2_{H^2[0,1]}+\max_{t\in[0,T]}\|g(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}\\
&+\int_0^T(\|g(\cdot,\tau)\|^2_{L^2[0,1]}+\|g_\tau(\cdot,\tau)\|^2_{L^2[0,1]})d\tau\Bigg), \quad 0\leqslant t\leqslant T,
\end{aligned}$$

此处和以后的 C 均表示不依赖于 T 的常数.

对于 $M,T>0$, 构造基本空间

$$\begin{aligned}
B(M,T)=\Big\{w\big|\,& w\in C^2([0,T];L^2[0,1])\cap C^1([0,T];H^2[0,1])\cap C([0,T];H^4[0,1]), w \text{ 满}\\
&\text{足 (2.3.3) (w 满足 (2.3.4) 或 w 满足 (2.3.5)), 且 } \max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\|w(\cdot,t)\|^2_{H^4[0,1]}\\
&+\|w_t(\cdot,t)\|^2_{H^2[0,1]}+\|w_{tt}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}\Big)^{1/2}\leqslant M\Big\},
\end{aligned}$$

并赋予距离

$$\begin{aligned}
\rho(w,\overline{w})=\max_{0\leqslant t\leqslant T}(&\|w(\cdot,t)-\overline{w}(\cdot,t)\|^2_{H^4[0,1]}+\|w_t(\cdot,t)-\overline{w}_t(\cdot,t)\|^2_{H^2[0,1]}\\
&+\|w_{tt}(\cdot,t)-\overline{w}_{tt}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]})^{1/2}, \quad w,\ \overline{w}\in B(M,T).
\end{aligned}$$

现在定义映射 S 如下: $u = Sw$ 是方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \sigma(w_x)_x + f(x,t) \tag{2.3.8}$$

具有初边值条件 (2.3.3) 或初边值条件 (2.3.4) 或初边值条件 (2.3.5) 的解, 其中 $\sigma \in C^2(\mathbb{R}), \sigma''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件, $f \in H^1([0,T];L^2[0,1])$. 显然, S 映 $B(M,T)$ 到 $C([0,T];H^4[0,1]) \cap C^1([0,T];H^2[0,1]) \cap C^2([0,T];L^2[0,1])$. 应用引理 2.1.2 的方法可证, 如果 M 充分大, 且 T 相对于 M 充分小, 则 $S : B(M,T) \mapsto B(M,T)$ 是严格压缩的. 利用先验估计和 Gronwall 不等式可证, 对任意的 $T' > 0$, 问题 (2.3.2), (2.3.3) 或问题 (2.3.2), (2.3.4) 或问题 (2.3.2), (2.3.5) 最多有一解 $u \in C([0,T'];H^4[0,1]) \cap C^1([0,T'];H^2[0,1]) \cap C^2([0,T'];L^2[0,1])$.

其次, 定义映射 $\widetilde{S}$ 如下: $u = \widetilde{S}w$ 是方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \sigma(w)_{xx} + f(x,t)$$

具有初边值条件 (2.3.3) 的解, 其中 $\sigma \in C^3(\mathbb{R}), \sigma'''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件和 $f \in H^1([0,T];L^2[0,1])$. 显然, $\widetilde{S}$ 映 $B(M,T)$ 到 $C([0,T];H^4[0,1]) \cap C^1([0,T];H^2[0,1]) \cap C^2([0,T];L^2[0,1])$, 通过类似的证明过程, 可以得到上面同样的结果, 因此有下面的定理.

定理 2.3.7 设 $\varphi \in H^4[0,1], \psi \in H^2[0,1]$, 对于任意 $T > 0, f \in H^1([0,T];L^2[0,1])$, $\sigma \in C^2(\mathbb{R}), \sigma''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件 ($\sigma \in C^3(\mathbb{R})$, $\sigma'''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件), 则问题 (2.3.2), (2.3.3), 问题 (2.3.2), (2.3.4), 问题 (2.3.2), (2.3.5) 和问题 (2.3.6), (2.3.3) 的每一个问题都存在唯一局部广义解

$$u \in C([0,T_0);H^4[0,1]) \cap C^1([0,T_0);H^2[0,1]) \cap C^2([0,T_0);L^2[0,1]),$$

其中, 这里和以后 $[0,T_0)$ 表示解存在的最大时间区间, 且 T_0 对于不同的问题是不一样的. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)} (\|u_{tt}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} + \|u_t(\cdot,t)\|^2_{H^2[0,1]} + \|u(\cdot,t)\|^2_{H^4[0,1]}) < \infty, \tag{2.3.9}$$

则 $T_0 = \infty$.

定理 2.3.8 设定理 2.3.7 的条件成立, $\sigma \in C^3(\mathbb{R})$, 特别对于问题 (2.3.2), (2.3.4), $\sigma''(0) = 0$. 如果

$$\lambda = \sup_{\substack{x\in[0,1] \\ t\in[0,T_0)}} |u_x(x,t)| < \infty, \tag{2.3.10}$$

其中 $u(x,t)$ 和 T_0 是定理 2.3.7 所述的, 则 $T_0 = \infty$.

证明 方程 (2.3.2) 两端同乘以 u_t, 乘积在 $[0,1]$ 上积分, 两端各加 $(u(\cdot,t), u_t(\cdot,t))$, 进行分部积分, 再利用 Cauchy 不等式, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2+\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2+\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2)\\
=&(\sigma(u_x(\cdot,t))_x,u_t(\cdot,t))+(f(\cdot,t),u_t(\cdot,t))+(u(\cdot,t),u_t(\cdot,t))\\
\leqslant& C(\lambda)(\|u(\cdot,t)\|_{H^2[0,1]}^2+\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2)+\|f(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad (2.3.11)
\end{aligned}
$$

其中 $C(\lambda)$ 是依赖于 λ 的常数, $T\in[0,T_0)$, $(u,v)=\int_0^1 uvdx$. Gronwall 不等式给出

$$
\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t)\|_{H^2[0,1]}^2+\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2\\
\leqslant&\left(\|\varphi\|_{H^2[0,1]}^2+\|\psi\|_{L^2[0,1]}^2+\int_0^T\|f(\cdot,\tau)\|_{L^2[0,1]}^2d\tau\right)e^{2C(\lambda)T},\quad 0\leqslant t\leqslant T. \quad (2.3.12)
\end{aligned}
$$

方程 (2.3.2) 两端同乘以 u_{x^4t}, 乘积在 $[0,1]$ 上积分, 有

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u_{x^2t}(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2+\|u_{x^4}(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2)=(\sigma(u_x(\cdot,t))_x,u_{x^4t}(\cdot,t))+(f(\cdot,t),u_{x^4t}(\cdot,t)).
$$

由上述表达式推出

$$
\begin{aligned}
&\|u_{x^2t}(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2+\|u_{x^4}(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2\\
\leqslant&\|\varphi_{x^4}\|_{L^2[0,1]}^2+\|\psi_{x^2}\|_{L^2[0,1]}^2+\int_0^t\|\sigma(u_x(\cdot,\tau))_{x^3}\|_{L^2[0,1]}^2d\tau\\
&+\int_0^t\|u_{x^2t}(\cdot,\tau)\|_{L^2[0,1]}^2d\tau+2(f(\cdot,t),u_{x^4}(\cdot,t))-2(f(\cdot,0),\varphi_{x^4}(\cdot))\\
&+\int_0^t(\|f_t(\cdot,\tau)\|_{L^2[0,1]}^2+\|u_{x^4}(\cdot,\tau)\|_{L^2[0,1]}^2)d\tau\\
\leqslant&\frac{1}{2}\|u_{x^4}(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2+2\max_{t\in[0,T]}\|f(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2+2\|\varphi_{x^4}\|_{L^2[0,1]}^2+\|\psi_{x^2}\|_{L^2[0,1]}^2\\
&+C(\lambda)\int_0^t(\|u(\cdot,\tau)\|_{H^4[0,1]}^2+\|u_{x^2t}(\cdot,\tau)\|_{L^2[0,1]}^2)d\tau\\
&+\|f(\cdot,0)\|_{L^2[0,1]}^2+\int_0^T\|f_t(\cdot,\tau)\|_{L^2[0,1]}^2d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \quad (2.3.13)
\end{aligned}
$$

注意到这里进行分部积分时, 应用了条件 “$\sigma''(0)=0$”. 式 (2.3.13) 两端各加项 $\|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}+\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}$, 利用式 (2.3.12) 和 Gronwall 不等式给出

$$
\begin{aligned}
&\|u_t(\cdot,t)\|_{H^2[0,1]}^2+\|u(\cdot,t)\|_{H^4[0,1]}^2\\
\leqslant& Ce^{4C(\lambda)T}\left(\|\varphi\|_{H^4[0,1]}^2+\|\psi\|_{H^2[0,1]}^2+\max_{t\in[0,T]}\|f(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2\right.\\
&\left.+\int_0^T(\|f(\cdot,\tau)\|_{L^2[0,1]}^2+\|f_t(\cdot,\tau)\|_{L^2[0,1]}^2)d\tau\right),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad (2.3.14)
\end{aligned}
$$

其中 C 不依赖于 T 和 λ. 方程 (2.3.2) 两端同乘以 u_{tt}, 乘积在 $[0,1]$ 上积分, 并应用 Hölder 不等式, 得

$$\|u_{tt}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} \leqslant (\|u_{x^4}(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]} + \|\sigma(u_x(\cdot,t))_x\|_{L^2[0,1]} + \|f(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]})\|u_{tt}(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}. \tag{2.3.15}$$

因此

$$\|u_{tt}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} \leqslant 3\Big(\|u_{x^4}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} + C(\lambda)\|u(\cdot,t)\|^2_{H^2[0,1]} + \max_{t\in[0,T]}\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}\Big), \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.3.16}$$

从式 (2.3.14), (2.3.16) 和式 (2.3.12) 得到, 对于任意 $T\in[0,T_0)$, 有

$$\begin{aligned} F(T) &= \max_{t\in[0,T]}(\|u_{tt}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} + \|u_t(\cdot,t)\|^2_{H^2[0,1]} + \|u(\cdot,t)\|^2_{H^4[0,1]}) \\ &\leqslant (C(\lambda)+C)e^{4C(\lambda)T}\Bigg(\|\varphi\|^2_{H^4[0,1]} + \|\psi\|^2_{H^2[0,1]} + \max_{t\in[0,T]}\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} \\ &\quad + \int_0^T(\|f(\cdot,\tau)\|^2_{L^2[0,1]} + \|f_t(\cdot,\tau)\|^2_{L^2[0,1]})d\tau\Bigg). \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

如果 $T_0<\infty$, 则由式 (2.3.17) 知, $F(T)$ 是一单增函数, 且在 $[0,T_0)$ 有上界. 这表示 $\lim_{T\to T_0^-}F(T)$ 存在, 所以式 (2.3.9) 成立和 $T_0=\infty$. 这是一个矛盾. □

应用证明定理 2.1.1 的方法和证明定理 2.3.8 的方法, 可以证明问题 (2.3.2), (2.3.3) 和问题 (2.3.2), (2.3.4) 的解的下列正则性定理.

定理 2.3.9 设 $\varphi\in H^5[0,1], \psi\in H^3[0,1], f\in H^1([0,T];H^1[0,1])$, 对任意的 $T>0, \sigma\in C^3(\mathbb{R})$ 且 $\sigma'''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件.

(1) 如果 $\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(1)=\psi''(0)=\psi''(1)=0, f(0,t)=f(1,t)=0, t>0$, 则问题 (2.3.2), (2.3.3) 存在唯一整体古典解 $u\in C([0,T_0);H^5[0,1])\cap C^1([0,T_0);H^3[0,1])\cap C^2([0,T_0);H^1[0,1])$ 且 $u_{x^4}(0,t)=u_{x^4}(1,t)=0, t\in[0,T_0)$.

(2) 如果 $\varphi^{(5)}(0)=\varphi^{(5)}(1)=\psi^{(3)}(0)=\psi^{(3)}(1)=0, f_x(0,t)=f_x(1,t)=0, t>0$, $\sigma''(0)=0$, 则问题 (2.3.2), (2.3.4) 存在唯一整体古典解 $u\in C([0,T_0);H^5[0,1])\cap C^1([0,T_0);H^3[0,1])\cap C^2([0,T_0);H^1[0,1])$ 且 $u_{x^5}(0,t)=u_{x^5}(1,t)=0, t\in[0,T_0)$.

同时, 如果式 (2.3.10) 成立, 则 $T_0=\infty$.

2.3.4 解的整体存在性证明

引理 2.3.2 [49] 存在常数 $\varepsilon>0$ 和 $C(\varepsilon)>0$ 使得

$$\|D_x^k\phi\|^2_{L^2[0,1]} \leqslant C(\varepsilon)\|\phi\|^2_{L^2[0,1]} + \varepsilon\|D_x^l\phi\|^2_{L^2[0,1]}, \quad k\leqslant l.$$

定理 2.3.1 的证明 根据定理 2.3.8 和定理 2.3.9, 只需证明条件 (2.3.10) 成立即可. 令 $\sigma_0(s)=\sigma(s)-k_0s-\sigma(0)$, 其中 $k_0=\min\{C_0,0\}(\leqslant 0)$, 则 $\sigma_0(0)=0,\sigma_0'(s)=\sigma'(s)-k_0\geqslant 0$, $\sigma_0(s)$ 是一单增函数. 因此 $G(s)=\int_0^s\sigma_0(\tau)d\tau\geqslant 0$. 显然, 方程 (2.3.2) 等价于方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}-k_0u_{xx}=\sigma_0(u_x)_x+f(x,t). \tag{2.3.18}$$

不失一般性, 假定 $k_0<0$. 依引理 2.3.1 存在常数 $C_1>0$, 使得

$$\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}\leqslant C_1\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}-\frac{1}{2k_0}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]},\quad t>0. \tag{2.3.19}$$

因此

$$k_0\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}\geqslant C_1k_0\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}-\frac{1}{2}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]},\quad t>0. \tag{2.3.20}$$

方程 (2.3.18) 两端同乘以 u_t, 乘积在 $[0,1]$ 上积分, 两端各加项 $(1-C_1k_0)(u(\cdot,t),u_t(\cdot,t))$, 并进行分部积分, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\bigg[(1-C_1k_0)\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}+\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}+\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}\\&\quad+k_0\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}+2\int_0^1G(u_x(x,t))dx\bigg]\\&=2(f(\cdot,t),u_t(\cdot,t))+2(1-C_1k_0)(u(\cdot,t),u_t(\cdot,t)).\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

式 (2.3.21) 在 $[0,t]$ 上积分, 应用式 (2.3.20) 和 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}+\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}+\frac{1}{2}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}+2\int_0^1G(u_x(x,t))dx\\&\leqslant(1-C_1k_0)\|\varphi\|^2_{L^2[0,1]}+\|\psi\|^2_{L^2[0,1]}+\|\varphi''\|^2_{L^2[0,1]}+k_0\|\varphi'\|^2_{L^2[0,1]}\\&\quad+2\int_0^1G(\varphi'(x))dx+\int_0^t\|f(\cdot,\tau)\|^2_{L^2[0,1]}d\tau\\&\quad+(2-C_1k_0)\int_0^t(\|u(\cdot,\tau)\|^2_{L^2[0,1]}+\|u_t(\cdot,\tau)\|^2_{L^2[0,1]})d\tau.\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Gronwall 不等式给出

$$\begin{aligned}&\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}+\|u(\cdot,t)\|^2_{H^2[0,1]}\\&\leqslant Ce^{(2-C_1k_0)T}\left(\|\varphi\|^2_{H^2[0,1]}+\|\psi\|^2_{L^2[0,1]}+\int_0^1G(\varphi'(x))dx+\int_0^T\|f(\cdot,\tau)\|^2_{L^2[0,1]}d\tau\right),\\&\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

由式 (2.3.23) 和 Sobolev 嵌入定理推出, 对于任意 $T > 0$, 有

$$\max_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\0\leqslant x\leqslant 1}} |u_x(x,t)| \leqslant M, \tag{2.3.24}$$

其中 M 是一个不依赖于 T 的常数. 因为式 (2.3.24) 意味着式 (2.3.10) 成立, 则 $T_0 = \infty$. □

定理 2.3.2 的证明 在问题 (2.3.6), (2.3.3) 中, 令 $v(x,t) = \int_0^x u(\xi,t)d\xi$, 于是 $v_x(x,t) = u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 应满足下列问题:

$$v_{xtt} + v_{x^5} = \sigma(v_x)_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{2.3.25}$$

$$v_x(0,t) = v_x(1,t) = v_{x^3}(0,t) = v_{x^3}(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$v(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad v_t(x,0) = \widetilde{\psi}(x), \quad x \in [0,1], \tag{2.3.26}$$

其中 $\widetilde{\varphi}(x) = \int_0^x \varphi(\xi)d\xi$, $\widetilde{\psi}(x) = \int_0^x \psi(\xi)d\xi$.

考虑具有条件 (2.3.26) 的方程

$$v_{tt} + v_{x^4} = \sigma(v_x)_x + \widetilde{f}(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \tag{2.3.27}$$

其中 $\widetilde{f}(x,t) = \int_0^x f(\xi,t)d\xi$. 通过直接计算, 可见 $\widetilde{\varphi} \in H^5[0,1], \widetilde{\psi} \in H^3[0,1]$, 对于任意 $T > 0$, $\widetilde{f} \in H^1([0,T]; H^1[0,1])$, 且 $\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{\psi}(x), \widetilde{f}(x,t)$, $\sigma(s)$ 满足定理 2.3.9 的条件 (2). 应用定理 2.3.1 的结论 (2) 到问题 (2.3.27), (2.3.26) 知, 问题 (2.3.27), (2.3.26) 存在唯一整体古典解

$$v \in C([0,\infty); H^5[0,1]) \cap C^1([0,\infty); H^3[0,1]) \cap C^2([0,\infty); H^1[0,1]).$$

将这个 $v(x,t)$ 代入式 (2.3.27) 和式 (2.3.26), 式 (2.3.27) 对 x 求导, 并把 $v_x(x,t) = u(x,t)$ 代入所得结果的表达式和式 (2.3.26) 中, 可知

$$u \in C([0,\infty); H^4[0,1]) \cap C^1([0,\infty); H^2[0,1]) \cap C^2([0,\infty); L^2[0,1])$$

是问题 (2.3.6), (2.3.7) 的整体广义解. 应用先验估计和 Gronwall 不等式, 易证在以上空间中问题 (2.3.6), (2.3.3) 解的唯一性. □

2.3.5 解爆破的证明

定理 2.3.3 的证明 方程 (2.3.2)($f(x,t) = 0$) 两端乘以 u_t, 并对乘积在 $[0,1]$ 上积分得

$$\dot{E}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.3.28}$$

其中

$$E(t) = \|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} + \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} + 2\int_0^1 G(u_x(x,t))dx.$$

因此

$$E(t) = E(0) = E_0 < 0, \quad t > 0. \tag{2.3.29}$$

令

$$H(t) = \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} + \int_0^t \int_0^\tau \|u_x(\cdot,s)\|^2_{L^2[0,1]} ds d\tau.$$

利用定理 2.3.3 的条件 (1), 并注意到

$$\begin{aligned}
&K\int_0^1 G(u_x(x,t))dx \\
=&E_0 - \|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} - \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} + (K-2)\int_0^1 G(u_x(x,t))dx,
\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\ddot{H}(t) =& 2\int_0^1 \left(u_t^2(x,t) + u(x,t)u_{tt}(x,t) + \frac{1}{2}u_x^2(x,t)\right)dx \\
=& 2\int_0^1 \left(u_t^2(x,t) - u_{xx}^2(x,t) - \sigma(u_x(x,t))u_x(x,t) + \frac{1}{2}u_x^2(x,t)\right)dx \\
\geqslant& 2\int_0^1 \left(u_t^2(x,t) - u_{xx}^2(x,t) - KG(u_x(x,t)) + \frac{1}{2}u_x^2(x,t)\right)dx \\
=& 4\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} - 2E_0 + \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} - 2(K-2)\int_0^1 G(u_x(x,t))dx \\
\geqslant& -2E_0 + 2(K-2)\beta\int_0^1 |u_x(x,t)|^{p+1}dx.
\end{aligned} \tag{2.3.31}$$

由式 (2.3.31) 推出

$$\dot{H}(t) \geqslant -2E_0 t + 2(K-2)\beta\int_0^t\int_0^1 |u_x(x,\tau)|^{p+1}dxd\tau + \dot{H}(0), \tag{2.3.32}$$

$$H(t) \geqslant -E_0 t^2 + 2(K-2)\beta\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(x,s)|^{p+1}dxdsd\tau + \dot{H}(0)t + H(0), \tag{2.3.33}$$

其中 $\dot{H}(0) = 2\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx, H(0) = \|\varphi\|^2$. 由式 (2.3.31), (2.3.33) 得

$$\begin{aligned}
\ddot{H}(t) + H(t) \geqslant& 2(K-2)\beta\left(\int_0^1 |u_x(x,t)|^{p+1}dx + \int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(x,t)|^{p+1}dxdsd\tau\right) \\
&- E_0 t^2 + \dot{H}(0)t + H(0) - 2E_0.
\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

应用 Hölder 不等式有

$$\int_0^1 |u_x(x,t)|^{p+1}dx \geqslant \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^{p+1} \geqslant \|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^{p+1}, \tag{2.3.35}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(x,s)|^2 dxdsd\tau &\leqslant \int_0^t \left(\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(\cdot,s)|^{p+1}dxds\right)^{\frac{2}{p+1}} \tau^{\frac{p-1}{p+1}}d\tau \\ &\leqslant \left(\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(x,s)|^{p+1}dxdsd\tau\right)^{\frac{2}{p+1}} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{p-1}{p+1}},\end{aligned} \tag{2.3.36}$$

$$\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(x,s)|^{p+1}dxdsd\tau \geqslant 2^{\frac{p-1}{2}}t^{1-p}\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(x,s)|^2 dxdsd\tau\right)^{\frac{p+1}{2}} \tag{2.3.37}$$

将式 (2.3.35), (2.3.37) 代入式 (2.3.34), 并利用不等式

$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n), \quad a>0, \quad b>0, \quad n>1, \tag{2.3.38}$$

我们有

$$\begin{aligned}\ddot{H}(t)+H(t) \geqslant& 2(K-2)\beta t^{1-p}\left[\|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^{p+1} + \left(\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(x,s)|^2 dxdsd\tau\right)^{\frac{p+1}{2}}\right] \\ &- E_0t^2+\dot{H}(0)t+H(0)-2E_0 \\ \geqslant& 2^{\frac{3-p}{2}}(K-2)\beta t^{1-p}H^{\frac{p+1}{2}}(t) - E_0t^2+\dot{H}(0)t+H(0)-2E_0, \quad t\geqslant 1.\end{aligned} \tag{2.3.39}$$

从式 (2.3.32), (2.3.33) 看出, 当 $t\to\infty$ 时, $\dot{H}(t)\to\infty$ 且 $H(t)\to\infty$. 所以存在 $t_0\geqslant 1$, 使得 $\dot{H}(t)>0, H(t)>0$ $(t\geqslant t_0)$. 式 (2.3.39) 两端同乘以 $2\dot{H}(t)$, 并应用式 (2.3.32) 得

$$\frac{d}{dt}[\dot{H}^2(t)+H^2(t)] \geqslant C_2t^{1-p}\frac{d}{dt}H^{\frac{p+3}{2}}(t)+I(t), \quad t\geqslant t_0, \tag{2.3.40}$$

其中

$$C_2=\frac{4(K-2)\beta}{2^{\frac{p-3}{2}}(p+3)}, \quad I(t)=(-4E_0t+2\dot{H}(0))(-E_0t^2+\dot{H}(0)t+H(0)-2E_0).$$

由式 (2.3.40) 有

$$\frac{d}{dt}[t^{p-1}(\dot{H}^2(t)+H^2(t))-C_2H^{\frac{p+3}{2}}(t)] \geqslant t^{p-1}I(t), \quad t\geqslant t_0. \tag{2.3.41}$$

式 (2.3.41) 在 (t_0,t) 上对 t 积分得

$$\begin{aligned}&t^{p-1}(\dot{H}^2(t)+H^2(t))-C_2H^{\frac{p+3}{2}}(t)\\&\geqslant\int_{t_0}^{t}\tau^{p-1}I(\tau)d\tau+t_0^{p-1}(\dot{H}^2(t_0)+H^2(t_0))-C_2H^{\frac{p+3}{2}}(t_0),\quad t\geqslant t_0.\end{aligned}\tag{2.3.42}$$

注意到, 当 $t\to\infty$ 时, 式 (2.3.42) 趋于正无穷大, 因此存在一个 $t_1\geqslant t_0$, 使得当 $t\geqslant t_1$ 时, 式 (2.3.42) 的右端大于或等于零, 所以

$$t^{p-1}(\dot{H}^2(t)+H^2(t))\geqslant C_2H^{\frac{p+3}{2}}(t),\quad t\geqslant t_1.\tag{2.3.43}$$

式 (2.3.43) 两端开方, 得

$$\dot{H}(t)+H(t)\geqslant C_3t^{\frac{1-p}{2}}H^{\frac{p+3}{4}}(t),\quad t\geqslant t_1,\tag{2.3.44}$$

其中 $C_3=\sqrt{C_2}=2^{\frac{7-p}{4}}((K-2)\beta/(p+3))^{1/2}$. 由式 (2.3.33) 推出

$$H(t)\geqslant -E(0)t^2+\dot{H}(0)t+H(0).$$

根据引理 1.8.2, 存在一常数 $\tilde{T}$, 使得当 $t\to\tilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]}+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1u_x^2(x,s)dxdsd\tau\to\infty.\qquad\square$$

定理 2.3.4 的证明 方程 (2.3.2)($f(x,t)=0$) 两端同乘以 $\rho(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos\pi x$, 乘积在 $[0,1]$ 上积分, 并利用 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}\ddot{y}+\pi^4y&=\frac{\pi}{2}\int_0^1\sigma(u_x(x,t))_x\cos\pi xdx=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1\sigma(u_x(x,t))\sin\pi xdx\\&\geqslant\pi\sigma\left(\frac{\pi}{2}\int_0^1u_x(x,t)\sin\pi xdx\right)=\pi\sigma\left(-\frac{\pi^2}{2}\int_0^1u(x,t)\cos\pi xdx\right)\\&\geqslant a\pi^{p+1}y^p,\quad t>0.\end{aligned}\tag{2.3.45}$$

从式 (2.3.4) 知

$$y(0)=y_0,\quad \dot{y}(0)=y_1,\tag{2.3.46}$$

其中

$$y(t)=\int_0^1u(x,t)\rho(x)dx,\quad y_0=\int_0^1\varphi(x)\rho(x)dx\quad 和\quad y_1=\int_0^1\psi(x)\rho(x)dx.$$

因为 $y_0>0$ 和 $y_1>0$, 由 $y(t)$ 的连续性推出, 在 $t=0$ 点存在一个右邻域 $(0,\delta)$, 在此邻域 $\dot{y}(t)>0$, 所以 $y(t)>y_0>0$. 如果存在一点 t_0, 使得 $\dot{y}(t)>0$ $(t\in[0,t_0))$,

但 $\dot{y}(t_0)=0$, 则 $y(t)$ 在 $[0,t_0]$ 上是单增的, 即 $y(t)\geqslant y_0, t\in[0,t_0]$. 由式 (2.3.45) 推出, 在 $(0,t_0]$ 上

$$\ddot{y}\geqslant \pi^4 y(a\pi^{p-3}y^{p-1}-1)>\pi^4 y_0(a\pi^{p-3}y_0^{p-1}-1)\geqslant 0 \tag{2.3.47}$$

和在 $[0,t_0]$ 上 $\dot{y}(t)$ 是单增的. 这与 $\dot{y}(t_0)=0$ 矛盾. 所以 $\dot{y}(t)>0$ 和当 $t>0$ 时, $y(t)>y_0$.

式 (2.3.45) 两端同乘以 $2\dot{y}$, 乘积在 $[0,t]$ 上积分, 有

$$\dot{y}^2\geqslant C_4(y^{p+1}-y_0^{p+1})-\pi^4(y^2-y_0^2)+y_1^2=B(y), \tag{2.3.48}$$

其中 $C_4=\dfrac{2a\pi^{p+1}}{p+1}$. 因为 $B(y_0)=y_1^2>0$ 和

$$B'(y)=2a\pi^{p+1}y^p-2\pi^4 y>2\pi^4 y_0(a\pi^{p-3}y_0^{p-1}-1)\geqslant 0,$$

$B(y)>B(y_0)>0, t>0$. 式 (2.3.48) 两端开方得

$$\dot{y}\geqslant [C_4(y^{p+1}-y_0^{p+1})-\pi^4(y^2-y_0^2)+y_1^2]^{1/2},\quad t>0. \tag{2.3.49}$$

式 (2.3.49) 表示 $y(t)$ 存在的区间 $[0,\widetilde{T})$ 是有限的, 即

$$\widetilde{T}\leqslant\int_{y_0}^{\infty}[C_4(y^{p+1}-y_0^{p+1})-\pi^4(y^2-y_0^2)+y_1^2]^{-1/2}dy<\infty,$$

且当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时, $y(t)\to\infty$, 即当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时, $\displaystyle\int_0^1 u(x,t)\cos\pi x dx\to\infty$. 注意到 $\|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}^2\geqslant\dfrac{1}{2}y^2(t)$, 得当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时, $\|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]}\to\infty$. □

定理 2.3.5 和定理 2.3.6 的证明　应用证明定理 2.3.4 的方法, 可证定理 2.3.5 和定理 2.3.6. □

2.3.6　关于方程 (2.3.1) 和方程 (2.3.50); 两个例子

在这一子节中, 应用定理 2.3.1, 定理 2.3.9, 定理 2.3.5 和定理 2.3.6 到方程 (2.3.1) 和方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}=a(u^2)_{xx} \tag{2.3.50}$$

上.

定理 2.3.10　(1) 设 $\varphi\in H^4[0,1],\psi\in H^2[0,1],f\in L^2[0,1]$, 则问题 (2.3.1), (2.3.3), 问题 (2.3.1), (2.3.4), 问题 (2.3.1), (2.3.5) 和问题 (2.3.50), (2.3.3) 存在唯一局部广义解

$$u\in C([0,T_0);H^4[0,1])\cap C^1([0,T_0);H^2[0,1])\cap C^2([0,T_0);L^2[0,1]).$$

(2) 设 $\varphi \in H^5[0,1], \psi \in H^3[0,1], f \in H^1[0,1]$. 如果 $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0, f(0) = f(1) = 0$, 则问题 (2.3.1), (2.3.3) 存在唯一局部古典解 $u \in C([0,T_0);H^5[0,1]) \cap C^1([0,T_0);H^3[0,1]) \cap C^2([0,T_0);H^1[0,1])$, 且 $u_{x^4}(0,t) = u_{x^4}(1,t) = 0, t \in [0,T_0)$.

(3) 如果 $f(x) = 0, \int_0^1 \varphi(x)\cos \pi x dx \leqslant \frac{2}{a}$ 和 $\int_0^1 \psi(x)\cos \pi x dx < 0$, 则问题 (2.3.1), (2.3.4) 的解 $u(x,t)$ 在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t)\cos \pi x dx \to -\infty, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]} \to \infty.$$

(4) 如果

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin \pi x dx \geqslant -\frac{2\pi}{a} \quad 和 \quad \int_0^1 \psi(x)\sin \pi x dx > 0,$$

则问题 (2.3.50), (2.3.3) 的解 $u(x,t)$ 在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t)\sin \pi x dx \to \infty, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]} \to \infty.$$

例 2.3.1 取 $\sigma(s) = as^p$, 其中 $a \neq 0$ 是一实数, $p > 1$ 是一自然数.

(1) 当 $a > 0, p$ 是一奇数时, 显然 $\sigma \in C^3(\mathbb{R}), \sigma'''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件且 $\sigma'(s)$ 下有界. 如果初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别满足定理 2.3.1 和定理 2.3.2 的条件, 则根据定理 2.3.1 和定理 2.3.2 对应的每一个问题 (2.3.2), (2.3.3), 问题 (2.3.2), (2.3.4), 问题 (2.3.2), (2.3.5) 和问题 (2.3.6), (2.3.3) 都存在唯一整体古典解.

(2) 当 $a \neq 0, p$ 是一偶数时, 看出 $\sigma(s)$ $(a > 0)$ 是一凸函数, $-\sigma(s)$ $(a < 0)$ 也是一凸函数. 如果 $f(x,t) = 0$, 初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 满足条件

$$\int_0^1 \varphi(x)\rho(x)dx \geqslant \left(|a|\pi^{p-3}\right)^{-1/(p-1)}, \quad \int_0^1 \psi(x)\rho(x)dx > 0,$$

其中 $\rho(x) = \operatorname{sgn}(a)\frac{\pi}{2}\cos \pi x$, 根据定理 2.3.4 和定理 2.3.5, 对应问题 (2.3.2), (2.3.4) 的解 $u(x,t)$ 在定理 2.3.4 和定理 2.3.5 的意义下在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破.

如果 $f(x,t) = 0$, 初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 满足条件

$$\int_0^1 \varphi(x)\rho(x)dx \geqslant \left(\frac{\pi^2}{|a|}\right)^{1/(p-1)}, \quad \int_0^1 \psi(x)\rho(x)dx > 0,$$

其中 $\rho(x) = -\operatorname{sgn}(a)\frac{\pi}{2}\sin \pi x$, 则根据定理 2.3.6 对应的 Boussinesq 型方程 (2.3.6) 的初边值问题 (2.3.3) 的解 $u(x,t)$ 在定理 2.3.6 的意义下在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破.

例 2.3.2 设 $\sigma(x) = a|s|^{p-1}s$, 其中 $a \neq 0$ 和 $p > 1$ 均为实数.

(1) 设 $a > 0, p \geqslant 3$, 则有 $\sigma \in C^3(\mathbb{R}), \sigma'''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件, $\sigma''(0) = 0$, 和 $\sigma'(s) = ap|s|^{p-1} \geqslant 0$, 即 $\sigma'(s)$ 下有界. 如果 $f(x,t), \varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别满足定理 2.3.1 和定理 2.3.2 的条件, 那么每一个对应的问题 (2.3.2), (2.3.3), 问题 (2.3.2), (2.3.4), 问题 (2.3.2), (2.3.5) 和问题 (2.3.6), (2.3.3) 都存在唯一整体古典解.

(2) 设 $a < 0$, $p > 1$, 则 $\sigma(s)s = a|s|^{p+1}$, $G(s) = \int_0^s \sigma(\tau)d\tau = \dfrac{a}{p+1}|s|^{p+1}$ 或 $\sigma(s)s = KG(s)$ 和 $G(s) = -\beta|s|^{p+1}$, 其中 $K = p+1 > 2, \beta = -\dfrac{a}{p+1} > 0$. 如果 $f(x,t) = 0, \varphi \in H^2[0,1]$ 和 $\psi \in L^2[0,1]$, 使得

$$\begin{aligned} E_0 &= \|\psi\|^2_{L^2[0,1]} + \|\varphi''\|^2_{L^2[0,1]} + \frac{2a}{p+1}\int_0^1 |\varphi'(x)|^{p+1}dx \\ &\leqslant \frac{-2^{(p-3)/(p-1)}}{(-a(p-1)/(p+1)(p+3))^{2/(p-1)}(1-e^{-(p-1)/4})^{4/(p-1)}}, \end{aligned}$$

那么根据定理 2.3.3 知, 每一个对应的问题 (2.3.2), (2.3.3) 和问题 (2.3.2), (2.3.5) 都在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2[0,1]} + \int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 u_x^2(x,s)dxdsd\tau \to \infty.$$

2.3.7 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [50]. 与本节有关的文献见 [36], [38], [42], [51]–[60].

2.4 一类非线性四阶波动方程解的渐近性质和解的爆破

2.4.1 引言

2.2 节研究了第一初边值问题 (2.2.2)–(2.2.4) 和第二初边值问题 (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6) 整体古典解的存在性与不存在性. 本节讨论第一初边值问题 (2.2.2)–(2.2.4) 解的渐近性质和解的爆破; 讨论第二初边值问题 (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6) 解的爆破; 最后研究初边值问题 (2.2.1), (2.2.3), (2.2.4) 解的渐近性质和解的爆破.

2.4.2 初边值问题 (2.2.2)–(2.2.4) 解的渐近性质

定理 2.4.1 设 $u(x,t)$ 是问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的整体古典解, 则在下列假定下,

(1) 对于所有的 $s \in \mathbb{R}$, $2G(s) \leqslant s\varphi(s)$;

(2) 对于所有的 $s \in \mathbb{R}$, $G(s) \geqslant 0$;

(3) $u_0, u_1 \in H^1(0,1)$,

有

$$E_1(t) \leqslant E_1(0)e^{1-\omega t},$$

其中

$$\omega = \left[\frac{1}{a_2} + \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + \max\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_3}\right\} + \max\left\{1, \frac{a_3}{a_1}\right\}\right]^{-1},$$

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(|u_t|^2 + a_1|u_x|^2 + a_3|u_{xt}|^2\right) dx + \int_0^1 G(u_x)dx,$$

而 $G(s) = \int_0^s \varphi(\tau)d\tau.$

证明　经简单计算, 对于问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的任意整体古典解给出

$$\begin{aligned} E_1(S) - E_1(T) &= -a_2\int_0^S\int_0^1 |u_{xt}|^2 dxdt + a_2\int_0^T\int_0^1 |u_{xt}|^2 dxdt \\ &= a_2\int_S^T\int_0^t |u_{xt}|^2 dxdt, \quad 0 \leqslant S \leqslant T < \infty. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

方程 (2.2.2) 两端乘以 $u(x,t)$, 乘积在 $(S,T)\times(0,1)$ 上积分, 并进行分部积分, 得

$$\begin{aligned} &\int_S^T\int_0^1 (a_1u_x^2 - u_t^2 - a_3u_{xt}^2 + 2G(u_x))dxdt \\ =& -\left[\int_0^1 uu_t dx\right]_S^T - \frac{a_2}{2}\left[\int_0^1 u_x^2 dx\right]_S^T - a_3\left[\int_0^1 u_{xt}u_x dx\right]_S^T \\ &+ \int_S^T\int_0^1 (2G(u_x) - \varphi(u_x)u_x)dxdt, \quad 0 \leqslant S < T < \infty. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

因为

$$2\int_S^T E_1(t)dt = \int_S^T\int_0^1 (|u_t|^2 + a_1|u_x|^2 + a_3|u_{xt}|^2 + 2G(u_x))dxdt, \tag{2.4.3}$$

式 (2.4.2) 两端各加项 $2\int_S^T\int_0^1 (|u_t|^2 + a_3|u_{xt}|^2)dxdt$, 有

$$\begin{aligned} 2\int_S^T E_1(t)dt =& 2\int_S^T\int_0^1 (|u_t|^2 + a_3|u_{xt}|^2)dxdt - \left[\int_0^1 uu_t dx\right]_S^T - \left[\frac{a_2}{2}\int_0^1 |u_x|^2 dx\right]_S^T \\ &- a_3\left[\int_0^1 u_xu_{xt}dx\right]_S^T + \int_S^T\int_0^1 [2G(u_x) - \varphi(u_x)u_x]dxdt. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

根据假定 (1) 由式 (2.4.4) 推出

$$\begin{aligned} 2\int_S^T E_1(t)dt \leqslant& 2\int_S^T\int_0^1 (|u_t|^2 + a_3|u_{xt}|^2)dxdt - \left[\int_0^1 uu_t dx\right]_S^T \\ &- \left[\frac{a_2}{2}\int_0^1 |u_x|^2 dx\right]_S^T - a_3\left[\int_0^1 u_xu_{xt}dx\right]_S^T. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

利用 $E_1(t)$ 的非增性、Poincaré 不等式、Cauchy 不等式和 $E_1(t)$ 的定义知

$$2\int_S^T\int_0^1|u_t|^2dxdt\leqslant 2\int_S^T\int_0^1|u_{xt}|^2dxdt=\frac{2}{a_2}[E_1(S)-E_1(T)]\leqslant\frac{2}{a_2}E_1(S); \tag{2.4.6}$$

$$2a_3\int_S^T\int_0^1|u_{xt}|^2dxdt=\frac{2a_3}{a_2}[E_1(S)-E_1(T)]\leqslant\frac{2a_3}{a_2}E_1(S); \tag{2.4.7}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1uu_tdx\right|&\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(|u|^2+|u_t|^2)dx\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(|u_x|^2+|u_{xt}|^2)dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{a_1}{a_1}|u_x|^2+\frac{a_3}{a_3}|u_{xt}|^2\right)dx\leqslant\max\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_3}\right\}E_1(t);\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

$$\frac{a_2}{2}\int_0^1|u_x|^2dx\leqslant\frac{a_2}{a_1}E_1(t); \tag{2.4.9}$$

$$\left|a_3\int_0^1u_{xt}u_xdx\right|\leqslant\frac{1}{2}a_3\int_0^1(|u_{xt}|^2+|u_x|^2)dx\leqslant\max\left\{1,\frac{a_3}{a_1}\right\}E_1(t). \tag{2.4.10}$$

应用估计 (2.4.6)–(2.4.10), 由式 (2.4.5) 断言

$$\int_S^TE_1(t)dt\leqslant\left[\frac{1}{a_2}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_2}{2a_1}+\max\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_3}\right\}+\max\left\{1,\frac{a_3}{a_1}\right\}\right]E_1(S),\quad 0\leqslant S<T<\infty. \tag{2.4.11}$$

令 $T\to\infty$, 由式 (2.4.11) 推出

$$\int_S^\infty E_1(t)dt\leqslant\left[\frac{1}{a_2}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_2}{2a_1}+\max\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_3}\right\}+\max\left\{1,\frac{a_3}{a_1}\right\}\right]E_1(s),\quad\forall s\geqslant 0.$$

由引理 1.8.10 知

$$E_1(t)\leqslant E_1(0)e^{1-\omega t},\quad\forall t\geqslant 0.$$

□

2.4.3 初边值问题 (2.2.2)–(2.2.4) 和初边值问题 (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6) 解的爆破

下面应用不同于定理 2.3.3 和定理 2.3.4 的证明方法, 给出初边值问题 (2.2.2)–(2.2.4) 和初边值问题 (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6) 解的爆破的充分条件.

定理 2.4.2 设

(1) $\varphi(s)s\leqslant KG(s), G(s)\leqslant-\alpha|s|^{q+1}$, 其中 $G(s)=\int_0^s\varphi(\tau)d\tau, K>2,\alpha>0$ 和 $q>1$ 是常数;

(2) $u_0, u_1 \in H^1(0,1)$,

$$E(0) = \|u_1\|^2_{L^2(0,1)} + a_1\|u_{0x}\|^2_{L^2(0,1)} + a_3\|u_{1x}\|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^1 G(u_{0x}(x))dx$$
$$\leqslant \frac{-2^{\frac{2(q-2)}{q-1}}}{\left[\frac{(K-2)\alpha}{q+3}\right]^{\frac{2}{q-1}}\left[\min\left\{1, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}\right\}\right]^{\frac{q+1}{q-1}}(1-e^{-\frac{q-1}{4}})^{\frac{4}{q-1}}} < 0,$$

则初边值问题 (2.2.2)–(2.2.4) 的解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破, 即当 $t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + a_3\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + a_2\int_0^t\int_0^1 u_x^2(x,\tau)dxd\tau \to \infty.$$

证明 我们知道 $E(t) = E(0)$. 令

$$M(t) = \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + a_3\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + a_2\int_0^t\int_0^1 u_x^2(x,\tau)dxd\tau, \quad (2.4.12)$$

于是

$$\dot{M}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)u_t(x,t)dx + 2a_3\int_0^1 u_x(x,t)u_{xt}(x,t)dx + a_2\int_0^1 u_x^2(x,t)dx. \quad (2.4.13)$$

利用假定 (1), 方程 (2.3.2), 分部积分, 且注意到

$$K\int_0^1 G(u_x(x,t))dx = E(0) - \|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} - a_1\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} - a_3\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}$$
$$- 2a_2\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2(x,\tau)dxd\tau + (K-2)\int_0^1 G(u_x(x,t))dx,$$

得

$$\begin{aligned}
\ddot{M}(t) =& 2\int_0^1 \{u_t^2(x,t) + u_{tt}(x,t)u(x,t) + a_3u_{xt}^2(x,t) \\
&+ a_3u_x(x,t)u_{xtt}(x,t) + a_2u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\}dx \\
=& 2\int_0^1 \{u_t^2(x,t) + u(x,t)[a_1u_{xx}(x,t) + a_2u_{xxt}(x,t) + a_3u_{xxtt}(x,t) \\
&+ \varphi(u_x(x,t))_x] + a_3u_{xt}^2(x,t) + a_3u_x(x,t)u_{xtt}(x,t) + a_2u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\}dx \\
=& 2\int_0^1 \{u_t^2(x,t) - a_1u_x^2(x,t) + a_3u_{xt}^2(x,t) - \varphi(u_x(x,t))u_x(x,t)\}dx \\
\geqslant& 2\int_0^1 \{2u_t^2(x,t) - E(0) + a_3u_{xt}^2(x,t) - (K-2)G(u_x(x,t))\}dx \\
\geqslant& 4\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + 2a_3\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} - 2E(0) \\
&+ 2(K-2)\alpha\int_0^1 |u_x(x,t)|^{q+1}dx > 0, \quad t > 0.
\end{aligned} \quad (2.4.14)$$

由式 (2.4.14) 知

$$\dot{M}(t) \geqslant -2E(0)t + 2(K-2)\alpha \int_0^t \int_0^1 |u_x(x,\tau)|^{q+1} dx d\tau + \dot{M}(0), \quad (2.4.15)$$

$$M(t) \geqslant -E(0)t^2 + 2(K-2)\alpha \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 |u_x(x,s)|^{q+1} dx ds d\tau + \dot{M}(0)t + M(0), \quad (2.4.16)$$

其中

$$\dot{M}(0) = 2\int_0^1 u_0(x)u_1(x)dx + 2a_3 \int_0^1 u_{0x}(x)u_{1x}(x)dx + a_2\|u_{0x}\|^2_{L^2(0,1)},$$
$$M(0) = \|u_0\|^2_{L^2(0,1)} + a_3\|u_{0x}\|^2_{L^2(0,1)}.$$

由式 (2.4.14)–(2.14.16) 得

$$\begin{aligned}
&\ddot{M}(t) + \dot{M}(t) + M(t) \\
\geqslant & 4\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + 2(K-2)\alpha\left[\int_0^1 |u_x(x,t)|^{q+1}dx \right.\\
&\left. + \int_0^t\int_0^1 |u_x(x,\tau)|^{q+1}dxd\tau + \int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(x,s)|^{q+1}dxdsd\tau\right] \\
& + 2a_3\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} - 2E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right) + \dot{M}(0)(t+1) + M(0). \quad (2.4.17)
\end{aligned}$$

将式 (2.4.13) 代入式 (2.4.17) 的左端, 有

$$\begin{aligned}
&\ddot{M}(t)+M(t)+2\int_0^1 u(x,t)u_t(x,t)dx+2a_3\int_0^1 u_x(x,t)u_{xt}(x,t)dx+a_2\int_0^1 u_x^2(x,t)dx \\
\geqslant & 4\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + 2(K-2)\alpha\left[\int_0^1 |u_x(x,t)|^{q+1}dx + \int_0^t\int_0^1 |u_x(x,\tau)|^{q+1}dxd\tau\right.\\
&\left. + \int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 |u_x(x,s)|^{q+1}dxdsd\tau\right] \\
& + 2a_3\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} - 2E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right) + \dot{M}(0)(t+1) + M(0). \quad (2.4.18)
\end{aligned}$$

因为 $\ddot{M}(t) > 0, M(t) \geqslant 0$ 和

$$2\int_0^1 u(x,t)u_t(x,t)dx \leqslant \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)},$$

$$2a_3\int_0^1 u_x(x,t)u_{xt}(x,t)dx \leqslant a_3\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + a_3\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)},$$

由式 (2.4.18) 得

$$\begin{aligned}\ddot{M}(t)+M(t)\geqslant&(K-2)\alpha\Big[\int_0^1|u_x(x,t)|^{q+1}dx+\int_0^t\int_0^1|u_x(x,\tau)|^{q+1}dxd\tau\\&+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1|u_x(x,s)|^{q+1}dxdsd\tau\Big]\\&-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{M(0)}{2}.\end{aligned}\tag{2.4.19}$$

应用 Hölder 不等式和 Poincaré 不等式, 有

$$\int_0^1|u_x(x,t)|^{q+1}dx\geqslant\|u_x(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^2(0,1)}\geqslant\|u(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^2(0,1)},\tag{2.4.20}$$

$$\int_0^t\int_0^1|u_x(x,\tau)|^2dxd\tau\leqslant t^{\frac{q-1}{q+1}}\left(\int_0^t\int_0^1|u_x(x,\tau)|^{q+1}dxd\tau\right)^{\frac{2}{q+1}}.\tag{2.4.21}$$

由式 (2.4.21) 推出

$$\int_0^t\int_0^1|u_x(x,\tau)|^{q+1}dxd\tau\geqslant t^{\frac{1-q}{2}}\left(\int_0^t\int_0^1|u_x(x,\tau)|^2dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}.\tag{2.4.22}$$

将式 (2.4.20) 和式 (2.4.22) 代入式 (2.4.19), 并利用不等式

$$(a+b+c)^n\leqslant 2^{2(n-1)}(a^n+b^n+c^n),\quad a,b,c>0,\quad n>1,\tag{2.4.23}$$

得到

$$\begin{aligned}\ddot{M}(t)+M(t)\geqslant&(K-2)\alpha\left[\frac{1}{2}\|u(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^2(0,1)}\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\|u_x(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^2(0,1)}t^{\frac{1-q}{2}}\left(\int_0^t\int_0^1|u_x(x,t)|^2dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}\right]\\&-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{1}{2}M(0)\\\geqslant&(K-2)\alpha 2^{2-q}t^{1-q}\Big[\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}\\&+\int_0^t\int_0^1u_x^2(x,\tau)dxd\tau\Big]^{\frac{q+1}{2}}-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)\\&+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{1}{2}M(0)\\\geqslant&(K-2)\alpha 2^{2-q}\left[\min\left\{1,\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_2}\right\}\right]^{\frac{q+1}{2}}t^{1-q}M^{\frac{q+1}{2}}(t)\\&-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{1}{2}M(0),\quad t\geqslant 1.\end{aligned}\tag{2.4.24}$$

容易由式 (2.4.15) 和式 (2.4.16) 看出, 当 $t\to\infty$ 时, $\dot{M}(t)\to\infty$ 和 $M(t)\to\infty$. 因此存在一个 $t_0\geqslant 1$, 使得 $\dot{M}(t)>0, M(t)>0$. 式 (2.4.24) 两端同乘以 $2\dot{M}(t)$ 并应用式 (2.4.15), 有

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{M}^2(t)+M^2(t)\right]\geqslant C_1 t^{1-q}\frac{d}{dt}M^{\frac{q+3}{2}}(t)+J(t),\quad t\geqslant t_0, \tag{2.4.25}$$

其中

$$C_1=\frac{2(K-2)\alpha}{2^{q-3}(q+3)}\left[\min\left\{1,\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_2}\right\}\right]^{\frac{q+1}{2}},$$
$$J(t)=[-4E(0)t+2\dot{M}(0)]\left[-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{1}{2}M(0)\right].$$

由式 (2.4.15) 推出

$$\frac{d}{dt}[t^{q-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t))-C_1M^{\frac{q+3}{2}}(t)]\geqslant t^{q-1}J(t),\quad t\geqslant t_0. \tag{2.4.26}$$

上式在 (t_0,t) 上积分, 得

$$\begin{aligned}&t^{q-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t))-C_1M^{\frac{q+3}{2}}(t)\\ \geqslant&\int_{t_0}^t\tau^{q-1}J(\tau)d\tau+t_0^{q-1}(\dot{M}^2(t_0)+M^2(t_0))-C_1M^{\frac{q+3}{2}}(t_0),\quad t\geqslant t_0.\end{aligned} \tag{2.4.27}$$

注意到, 当 $t\to\infty$ 时, 式 (2.4.27) 右端趋于正无穷大, 所以存在一个 $t_1\geqslant t_0$, 使得当 $t\geqslant t_1$ 时, 式 (2.4.27) 的右端大于等于零. 因此

$$t^{q-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t))\geqslant C_1M^{\frac{q+3}{2}}(t),\quad t\geqslant t_1. \tag{2.4.28}$$

式 (2.4.28) 两端开方, 有

$$\dot{M}(t)+M(t)\geqslant C_2t^{\frac{1-q}{2}}M^{\frac{q+3}{4}}(t),\quad t\geqslant t_1,$$

其中 $C_2=\sqrt{C_1}$.

由式 (2.4.16) 知

$$M(t)\geqslant -E(0)t^2+\dot{M}(0)t+M(0).$$

根据引理 1.8.2, 存在一常数 $\tilde{T}$, 使得当 $t\to\tilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}+a_3\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}+a_2\int_0^t\int_0^1u_x^2(x,\tau)dxd\tau\to\infty. \qquad \square$$

定理 2.4.3 设 $u(x,t)$ 是问题 (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6) 的古典解, 又设满足下列条件:

(1) $\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_0(x)\cos\pi x dx = y_0 > 0,\ \frac{\pi}{2}\int_0^1 u_1(x)\cos\pi x dx = y_1 > 0.$

(2) (i) $\varphi(s)\in C^2(\mathbb{R})$ 是偶凸函数, 且满足 $\varphi(0)=0$ 和 $\varphi(\pi y_0)-a_1\pi y_0\geqslant 0$;

(ii) $\varphi(s)$ 当 $s\to\infty$ 时足够快, 使得积分

$$A=\frac{a_2\pi^2}{1+a_3\pi^2}\int_{y_0}^{\infty}\left\{y_1^2+\frac{2}{1+a_3\pi^2}\int_{\pi y_0}^{\pi z}[\varphi(s)-a_1 s]ds\right\}^{-\frac{1}{2}}dz$$

收敛, 且 $A<1$, 则问题 (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6) 的解在有限时刻

$$t_1\leqslant T_0=-\frac{1+a_3\pi^2}{a_2\pi^2}\ln(1-A)$$

爆破, 即当 $t\to t_1^-$ 时,

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 u(x,t)\cos\pi x dx\to\infty,\quad \|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}\to\infty. \tag{2.4.29}$$

证明 令

$$y(t)=\frac{\pi}{2}\int_0^1 u(x,t)\cos\pi x dx.$$

方程 (2.2.2) 两端同乘以 $\frac{\pi}{2}\cos\pi x$, 乘积在 (0,1) 上积分, 并分部积分, 得

$$(1+a_3\pi^2)\ddot{y}+a_2\pi^2\dot{y}+a_1\pi^2 y=\frac{\pi}{2}\int_0^1\varphi(u_x)_x\cos\pi x dx. \tag{2.4.30}$$

因为 $\varphi(s)$ 是偶凸函数, 应用分部积分和 Jensen 不等式, 有

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\int_0^1\varphi(u_x)_x\cos\pi x dx&=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1\varphi(u_x)\sin\pi x dx\geqslant\pi\varphi\left(\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_x\sin\pi x dx\right)\\&=\pi\varphi\left(-\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 u\cos\pi x dx\right)=\pi\varphi(\pi y).\end{aligned} \tag{2.4.31}$$

把式 (2.4.31) 代入式 (2.4.30), 得

$$\ddot{y}+\frac{a_2\pi^2}{1+a_3\pi^2}\dot{y}\geqslant\frac{\pi^2}{1+a_3\pi^2}[\varphi(\pi y)-a_1\pi y]$$

和

$$y(0)=y_0>0,\quad \dot{y}(0)=y_1>0.$$

因为

$$\sigma_2=\frac{a_1\pi^2}{1+a_3\pi^2}>0,\quad \sigma_3=\frac{\pi^2}{1+a_3\pi^2}>0,\quad \sigma_1=\frac{a_2\pi^2}{1+a_3\pi^2}>0\quad 和\quad \sigma_4=\pi,$$

所以根据引理 1.8.1 知, 当 $t\to t_1^-$ 时,

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 u(x,t)\cos\pi x dx\to\infty,$$

从而当 $t\to t_1^-$ 时, $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}\to\infty$. □

2.4.4　关于问题 (2.2.1), (2.2.3), (2.2.4)

在此节中, 应用定理 2.4.1、定理 2.4.2 和定理 2.3.3 到方程 (2.2.1).

定理 2.4.4　设 $u(x,t)$ 是问题 (2.2.1), (2.2.3), (2.2.4) 的整体古典解. 又设 $a_n>0,n$ 是一个奇数, $u_0,u_1\in H^1(0,1)$, 则

$$E_2(t)\leqslant E_2(0)e^{1-\omega t},$$

其中

$$\omega=\left\{\frac{1}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{C_0^2}+\max\left\{\frac{1}{C_0^2},\frac{1}{\beta}\right\}+\max\left\{1,\frac{\beta}{C_0^2}\right\}\right\}^{-1},$$

$$E_2(t)=\frac{1}{2}\int_0^1(|u_t|^2+C_0^2|u_x|^2+\beta|u_{xt}|^2)dx+\int_0^1 G_1(u_x)dx$$

和

$$G_1(s)=\int_0^s C_0^2a_n\tau^n d\tau.$$

证明　在定理 2.4.4 的假定下, 容易看出, 定理 2.4.1 的假定 (1) 和 (2) 满足. 所以定理 2.4.4 的结论成立. □

定理 2.4.5　设

(1) $n=2k+1,K=\dfrac{2k+3}{2},q=2k+1,\alpha=\dfrac{C_0^2|a_n|}{2(2k+2)}>0,k=1,2,\cdots,\ a_n<0$;

(2) $u_0,u_1\in H^1[0,1]$,

$$\begin{aligned}E_3(0)&=\|u_1\|^2_{L^2(0,1)}+C_0^2\|u_{0x}\|^2_{L^2(0,1)}+\beta\|u_{1x}\|^2_{L^2(0,1)}+\int_0^1 G_1(u_{0x}(x))dx\\&\leqslant\frac{-2^{\frac{2(q-2)}{q-1}}}{\left[\dfrac{(K-2)\alpha}{q+3}\right]^{\frac{2}{q-1}}\left[\min\left\{1,\dfrac{1}{\beta},\dfrac{1}{\gamma}\right\}\right]^{\frac{q+1}{q-1}}(1-e^{-\frac{q-1}{4}})^{\frac{4}{q-1}}}<0,\end{aligned}$$

其中

$$E_3(t)=\|u_t\|^2_{L^2(0,1)}+C_0^2\|u_x\|^2_{L^2(0,1)}+\beta\|u_{xt}\|^2_{L^2(0,1)}+2\gamma\int_0^t\|u_{x\tau}\|^2d\tau+\int_0^1 G_1(u_x)dx.$$

则问题 (2.2.1), (2.2.3), (2.2.4) 的整体古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻 $\tilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \beta\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \gamma\int_0^t\int_0^1 u_x^2(x,\tau)dxd\tau \to \infty.$$

证明 根据定理 2.4.2, 只需证明定理 2.4.2 的条件 (1) 和 (2) 成立. 事实上, 因为

$$\varphi(s)s = C_0^2 a_n s^{n+1} = C_0^2 a_n s^{2k+2}, \quad KG(s) = \frac{(2k+3)C_0^2 a_n}{2(2k+2)} s^{2k+2},$$

所以 $\varphi(s)s < KG(s)$ 成立. 显然, $G(s) = \dfrac{C_0^2 a_n s^{2k+2}}{2k+2} \leqslant -\alpha|s|^{q+1}$. 因此定理 2.4.2 的条件 (1) 成立. 因为

$$\frac{-2^{\frac{2(q-2)}{q-1}}}{\left[\dfrac{(K-2)\alpha}{q+3}\right]^{\frac{2}{q-1}}\left[\min\left\{1,\dfrac{1}{\beta},\dfrac{1}{\gamma}\right\}\right](1-e^{-\frac{q-1}{4}})^{\frac{4}{q-1}}} < 0,$$

所以定理 2.4.2 的条件 (2) 也成立. □

定理 2.4.6 令 $u(x,t)$ 是问题 (2.2.1), (2.2.3), (2.2.4) 的古典解. 设下列条件成立:

(1) $\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 u_0(x)\cos\pi x dx = y_0 > 0, \dfrac{\pi}{2}\int_0^1 u_1(x)\cos\pi x dx = y_1 > 0.$

(2) (i) $a_n > 0, n$ 是一偶数且 $a_n(\pi y_0)^{n-1} \geqslant C_0^2$;

(ii) 积分

$$A = \frac{\gamma\pi^2}{1+\beta\pi^2}\int_{y_0}^{\infty}\left\{y_1^2 + \frac{2}{1+\gamma\pi^2}\int_{\pi y_0}^{\pi z}(C_0^2 a_n s^n - C_0^2 s)ds\right\}^{-\frac{1}{2}} dz < 1,$$

则问题 (2.2.1), (2.2.3), (2.2.4) 的古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻

$$t_2 \leqslant T_1 = -\frac{1+\beta\pi^2}{\gamma\pi^2}\ln(1-A)$$

爆破, 即当 $t \to t_2^-$ 时,

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 u(x,t)\cos\pi x dx \to \infty, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \to \infty.$$

证明 因为 $a_n > 0$ 和 n 是偶数, 显然, $C_0^2 a_n s^n$ 是一偶凸函数. 定理 2.4.3 的另外条件也成立. □

2.4.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [61]. 与本节内容有关的文献见 [40]–[47].

2.5 广义立方双色散方程的初边值问题

2.5.1 引言

此节研究下列广义立方双色散方程的初边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} - au_{xxtt} + bu_{x^4} - du_{xxt} = f(u)_{xx}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{2.5.1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2.5.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.5.3}$$

其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, $f(s)$ 是给定的非线性函数, $\Omega = (0,l)$, $a > 0$, $b > 0$ 和 d 是常数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初值函数, 且满足边值条件 (2.5.2).

在物理问题中有不少方程可以化为方程 (2.5.1). 事实上, 非线性波在波导管中传播时, 经过波导管侧面, 波导管和外部介质的能量交换的可能性是不可忽略的. 如果考虑由超弹性材料 (即 Murnaghan 材料) 制成的非线性弹性杆的表面和由 Winkler 或者 Pasternak [62] 提出的介质间的交换模型, 则杆的纵向位移满足下面的双色散方程 (DDE):

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{4}(6u^2 + au_{tt} - bu_{xx})_{xx}. \tag{2.5.4}$$

此方程由 Hamilton 原理 (见 [63], [64]) 得到. 类似地, 可得一般的双色散方程 (CDDE, 见 [63], [64]):

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{4}(cu^3 + 6u^2 + au_{tt} - bu_{xx} + du_t)_{xx}, \tag{2.5.5}$$

其中 $u(x,t)$ 是纵向位移, 且与弯曲 $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ 成比例, $U(x,t)$ 是横向位移, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 和 $d \neq 0$ 是依赖于杨氏模型, 切变模数 μ, 波导管密度 ρ 和 Poisson 系数 ν 的一些常数. 显然, 如果 $f(u) = \dfrac{c}{4}u^3 + \dfrac{3}{2}u^2$ 以及 a, b 和 d 分别由 $\dfrac{a}{4}$, $\dfrac{b}{4}$ 和 $\dfrac{d}{4}$ 代替, 方程 (2.5.1) 变成方程 (2.5.5).

为了得到初边值问题 (2.5.1)–(2.5.3) 的整体广义解和整体古典解, 考虑下列辅助问题

$$v_{tt} - v_{xx} - av_{xxtt} + bv_{x^4} - dv_{xxt} = f(v_x)_x, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{2.5.6}$$

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \quad v_{xxx}(0,t) = v_{xxx}(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2.5.7}$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \qquad v_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.5.8}$$

首先证明辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 存在光滑的整体古典解, 然后作变换 $v_x(x,t) = u(x,t)$, $\varphi_x(x) = u_0(x)$ 和 $\psi_x(x) = u_1(x)$, 可获得初边值问题 (2.5.1)–(2.5.3) 整体

广义解和整体古典解的存在性和唯一性. 下面利用 Galerkin 方法证明辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 存在整体广义解和整体古典解.

Galerkin 方法是 Галеркин Б Г 于 1915 年在论文 [340] 中发表的数学物理问题的近似解法, 到目前为止, 已经发展成研究非线性偏微分方程和计算数学的重要方法之一. 现以 Galerkin 方法证明二阶线性波动方程初边值问题解的存在性与唯一性为例说明应用 Galerkin 方法的主要步骤. 考虑二阶线性波动方程的初边值问题 (I):

$$\begin{aligned}
&u_{tt}-u_{xx}=f(x,t), \quad x\in(0,1), \quad t>0,\\
&u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, \quad t>0,\\
&u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad x\in[0,1],
\end{aligned}$$

其中 $u(x,t)$ 是未知函数, $f(x,t)$ 是已知函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是给定的初值函数. 应用 Galerkin 方法证明初边值问题 (I) 解的存在性时, 首先在 $L^2(0,1)$ 空间中建立一标准正交基. 为此, 令 $\{y_n(x)\}$ 是由下列常微分方程的特征值问题

$$\begin{aligned}
&y''+\lambda y=0, \quad x\in(0,1),\\
&y(0)=y(1)=0
\end{aligned}$$

的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots)$ 对应的特征函数构成的 $L^2(0,1)$ 中的一标准正交基. 然后设初边值问题 (I) 的 Galerkin 近似解为

$$u_{N_0}(x,t)=\sum_{i=1}^{N_0}\alpha_{N_0i}(t)y_i(x),$$

其中 $\alpha_{N_0i}(t)$ 是待定函数, N_0 是一自然数. 设 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 可以分别表示为以下形式

$$u_0(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iy_i(x), \quad u_1(x)=\sum_{i=1}^{\infty}b_iy_i(x),$$

其中 a_i 和 $b_i(i=1,2,\cdots)$ 是常数. 将近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 代入初边值问题 (I) 中的方程后所得结果两端同乘以 $y_s(x)$, 并在 $(0,1)$ 上积分得

$$(u_{N_0tt}-u_{N_0xx},y_s)=(f,y_s), \quad s=1,2,\cdots,N_0. \tag{a}$$

将近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 和初值函数的近似

$$u_{0N_0}(x)=\sum_{i=1}^{N_0}a_iy_i(x), \quad u_{1N_0}(x)=\sum_{i=1}^{N_0}b_iy_i(x)$$

代入初值条件, 有

$$\alpha_{N_0s}(0)=a_s, \quad \alpha_{N_0st}(0)=b_s, \quad s=1,2,\cdots,N_0. \tag{b}$$

利用常微分方程理论可证, Cauchy 问题 (a), (b) 存在解 $\alpha_{N_0s}\in C^2[0,1](s=1,2,\cdots,N_0)$. 这时近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 为已知. 然后对近似解序列 $\{u_{N_0}(x,t)\}_{N_0=1}^{\infty}$ 和它的导数序列作估计, 使得收敛到初边值问题 (I) 弱解所需要的近似解序列 $\{u_{N_0}(x,t)\}_{N_0=1}^{\infty}$ 和它的一定的导数序列范数的有界性. 于是利用弱紧性定理 1.3.1 可证收敛的函数在一定收敛意义下满足初边值问题 (I) 的方程和初边值条件, 得到初边值问题 (I) 的弱解. 为了得到广义解或古典解, 需要提高近似解序列的估计. 利用 Sobolev 嵌入定理可得初边值问题 (I) 的广义解或古典解. 唯一性是显然的. 下面介绍应用 Galerkin 方法研究非线性高阶波动方程的初边值问题.

2.5.2 辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 的整体解

令 $\{y_s(x)\}$ 是下列特征值问题

$$y''+\lambda y=0,\quad x\in\Omega,\quad y'(0)=y'(l)=0$$

的特征值λ_i $(i=1,2,\cdots)$ 对应的特征函数构成的 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基.

令

$$v_{N_0}(x,t)=\sum_{i=1}^{N_0}\alpha_{N_0i}(t)y_i(x)$$

是辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 的 Galerkin 近似解, 其中 N_0 是一自然数, $\alpha_{N_0i}(t)$ $(i=1,2,\cdots,N_0)$ 是待定的函数. 假定初值 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 可分别表示为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_iy_i(x),\quad \psi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_iy_i(x),$$

其中 β_i, γ_i $(i=1,2,\cdots)$ 是常数. 然后辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 中的 $v(x,t)$ 以 $v_{N_0}(x,t)$ 代替, $\varphi(x)$ 以 $\varphi_{N_0}(x)=\sum_{i=1}^{N_0}\beta_iy_i(x)$ 代替, $\psi(x)$ 以 $\psi_{N_0}(x)=\sum_{i=1}^{N_0}\gamma_iy_i(x)$ 代替, 得到求解 $v_{N_0}(x,t)$ 的下列问题:

$$v_{N_0tt}-v_{N_0xx}-av_{N_0xxtt}+bv_{N_0x^4}-dv_{N_0xxt}=f(v_{N_0x})_x, \tag{2.5.9}$$

$$v_{N_0x}(0,t)=v_{N_0x}(l,t)=0,\quad v_{N_0x^3}(0,t)=v_{N_0x^3}(l,t)=0, \tag{2.5.10}$$

$$v_{N_0}(x,0)=\varphi_{N_0}(x),\quad v_{N_0t}(x,0)=\psi_{N_0}(x). \tag{2.5.11}$$

式 (2.5.9) 和式 (2.5.11) 两端分别乘以 $y_s(x)$, 并在 Ω 上积分得

$$(v_{N_0tt}-v_{N_0xx}-av_{N_0xxtt}+bv_{N_0x^4}-dv_{N_0xxt},y_s)=(f(v_{N_0x})_x,y_s), \tag{2.5.12}$$

$$\alpha_{N_0s}(0)=\beta_s,\quad \alpha_{N_0st}(0)=\gamma_s,\quad s=1,2,\cdots,N_0. \tag{2.5.13}$$

引理 2.5.1 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 并存在一个常数 C_0, 使得对任意的 $s\in\mathbb{R}$, $f'(s)\geqslant C_0$, $\varphi\in H^2(\Omega)$, $\psi\in H^1(\Omega)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 满足边值条件 (2.5.7), 则对于任意的 N_0,

Cauchy 问题 (2.5.12), (2.5.13) 存在整体古典解 $\alpha_{N_0s} \in C^2[0,T]$ $(s=1,2,\cdots,N_0)$. 同时, 下列估计成立

$$\|v_{N_0}(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|v_{N_0t}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant C_1(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.5.14}$$

此处的 $C_1(T)$ 和今后的 $C_i(T)$ $(i=2,3,\cdots)$ 是依赖于 T, 但不依赖于 N_0 的常数.

证明 令 $f_0(s) = f(s) - \delta s - f(0)$, 其中 $\delta = \min\{C_0, 0\}(\leqslant 0)$, 则 $f_0(0)=0$, $f_0'(s) = f'(s) - \delta \geqslant 0$ 和 $f_0(s)$ 是一单增函数, 则 $F(s) = \int_0^s f_0(\tau)d\tau \geqslant 0$. 显然, 方程 (2.5.6) 等价于下列方程:

$$v_{tt} - v_{xx} - av_{xxtt} + bv_{x^4} - dv_{xxt} - \delta v_{xx} = f_0(v_x)_x. \tag{2.5.15}$$

而方程 (2.5.12) 等价于下列方程组

$$\begin{aligned}&(v_{N_0tt} - v_{N_0xx} - av_{N_0xxtt} + bv_{N_0x^4} - dv_{N_0xxt} - \delta v_{N_0xx}, y_s)\\&= (f_0(v_{N_0x})_x, y_s), \quad s=1,2,\cdots,N_0.\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

式 (2.5.12) 两端乘以 $2\alpha_{N_0st}(t)$, 对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 两端各加 $2(v_{N_0}, v_{N_0t})$, 进行分部积分并运用 Gronwall 不等式有

$$\begin{aligned}&\|v_{N_0}(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|v_{N_0t}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega))}^2\\&\leqslant e^{C_2(|\delta|+2|d|+1)T}\left(\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + 2\int_\Omega F(\varphi_x(x))dx + 1\right), \quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

因此式 (2.5.14) 由式 (2.5.17) 立得. 类似于文献 [53] 中的引理 2.1 或利用式 (2.5.17) 和 Leray-Schauder 不动点定理, 可以证明 Cauchy 问题 (2.5.12), (2.5.13) 存在解

$$\alpha_{N_0s} \in C^2[0,T], \quad s=1,2,\cdots,N_0. \qquad \square$$

引理 2.5.2 设引理 2.5.1 的条件成立. 若 $f\in C^3(\mathbb{R})$, $\varphi \in H^5(\Omega)$ 和 $\psi \in H^4(\Omega)$, 则辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 的近似解满足下列估计:

$$\|v_{N_0}\|_{H^5(\Omega)}^2 + \|v_{N_0t}\|_{H^4(\Omega)}^2 + \|v_{N_0tt}\|_{H^3(\Omega)}^2 \leqslant C_2(T), \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.5.18}$$

证明 式 (2.5.12) 两端同乘以 $2\lambda_s^2\alpha_{N_0st}$, 对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 进行分部积分, 利用式 (2.5.14) 并注意到 $H^2(\Omega)$ 嵌入到 $C^1(\bar\Omega)$, 推出

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|v_{N_0xxt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{N_0x^3}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a\|v_{N_0x^3t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b\|v_{N_0x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2)\\&\leqslant C_3(T)(\|v_{N_0xx}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|v_{N_0x^3}\|_{L^2(\Omega)}^2) + 2(|d|+1)\|v_{N_0x^3t}\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned} \tag{2.5.19}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理, Young 不等式和 Gronwall 不等式, 断定

$$\begin{aligned}
&\|v_{N_0xxt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{N_0x^3}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{N_0x^3t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{N_0x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leqslant C_4(T)\left(\|\varphi\|_{H^4(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{H^3(\Omega)}^2 + 1\right), \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

类似地, 式 (2.5.12) 两端同乘以 $-2\lambda_s^3\alpha_{N_0st}$, 对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 对 t 积分, 有

$$\begin{aligned}
&\|v_{N_0x^3t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{N_0x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a\|v_{N_0x^4t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b\|v_{N_0x^5}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leqslant 2|d|\int_0^t \|v_{N_0x^4\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - 2\int_0^t f''(0)v_{N_0xx}^2(l,\tau)v_{N_0x^4\tau}(l,\tau)d\tau \\
&\quad + 2\int_0^t f''(0)v_{N_0xx}^2(0,\tau)v_{N_0x^4\tau}(0,\tau)d\tau \\
&\quad + 2\int_0^t\int_\Omega \left(f'''(v_{N_0x})v_{N_0xx}^3 + 3f''(v_{N_0x})v_{N_0xx}v_{N_0x^3} + f'(v_{N_0x})v_{N_0x^4}\right)v_{N_0x^4\tau}dxd\tau \\
&\quad + \|\psi_{x^3}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_{x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a\|\psi_{x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b\|\varphi_{x^5}\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

应用分部积分法, Sobolev 嵌入定理, 式 (2.5.14) 和式 (2.5.20), 发现

$$\begin{aligned}
&-2\int_0^t f''(0)v_{N_0xx}^2(l,\tau)v_{N_0x^4\tau}(l,\tau)d\tau \\
&= -2f''(0)\left[v_{N_0xx}^2(l,t)v_{N_0x^4}(l,t) - v_{N_0xx}^2(l,0)v_{N_0x^4}(l,0)\right] \\
&\quad + 2f''(0)\int_0^t \left(v_{N_0xx}^2(l,\tau)\right)_\tau v_{N_0x^4}(l,\tau)d\tau \\
&\leqslant 2|f''(0)|\Bigg[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|v_{N_0xx}(\cdot,t)\|_{C(\bar\Omega)}\right)^2\|v_{N_0x^4}(\cdot,t)\|_{C(\bar\Omega)} + \|\varphi_{xx}\|_{C(\bar\Omega)}^2\|\varphi_{x^4}\|_{C(\bar\Omega)} \\
&\quad + 4\int_0^t \|v_{N_0xx}(\cdot,\tau)\|_{C(\bar\Omega)}\|v_{N_0xx\tau}(\cdot,\tau)\|_{C(\bar\Omega)}\|v_{N_0x^4}(\cdot,\tau)\|_{C(\bar\Omega)}d\tau\Bigg] \\
&\leqslant C_5(T) + C_6\|\varphi\|_{H^3(\Omega)}\|\varphi\|_{H^5(\Omega)} + \frac{b}{4}\|v_{N_0x^5}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \int_0^t \|v_{N_0x^5}(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

类似于式 (2.5.22), 可证

$$\begin{aligned}
&2\int_0^t f''(0)v_{N_0xx}^2(0,\tau)v_{N_0x^4\tau}(0,\tau)d\tau \\
&\leqslant C_7(T) + C_8\|\varphi\|_{H^3(\Omega)}^2\|\varphi\|_{H^5(\Omega)} + \frac{b}{4}\|v_{N_0x^5}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \int_0^t \|v_{N_0x^5}(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

利用 Sobolev 嵌入定理, 式 (2.5.14)–(2.5.20), 断言

$$2\int_0^t\int_\Omega\left(f'''(v_{N_0x})v_{N_0xx}^3+3f''(v_{N_0x})v_{N_0xx}v_{N_0x^3}+f'(v_{N_0x})v_{N_0x^4}\right)v_{N_0x^4t}dxd\tau$$

$$\leqslant C_9(T)+\int_0^t\|v_{N_0x^4\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau. \tag{2.5.24}$$

将式 (2.5.22)–(2.5.24) 代入式 (2.5.21), 并应用 Gronwall 不等式得

$$\|v_{N_0x^3t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_{N_0x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_{N_0x^4t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_{N_0x^5}\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant C_{10}(T),\quad t\in[0,T]. \tag{2.5.25}$$

方程 (2.5.12) 两端同乘以 $\alpha_{N_0stt}(t)+\lambda_s^2\alpha_{N_0stt}(t)$, 对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 利用 Cauchy 不等式, 估计 (2.5.12) 和 (2.5.25) 以及 Sobolev 嵌入定理有

$$\|v_{N_0tt}\|_{H^3(\Omega)}^2\leqslant C_{11}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.5.26}$$

□

定理 2.5.1 在引理 2.5.2 的条件下, 辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 存在唯一整体广义解

$$v\in C([0,T];H^5(\Omega))\cap C^1([0,T];H^4(\Omega))\cap C^2([0,T];H^3(\Omega))=A. \tag{2.5.27}$$

证明 由式 (2.5.18), Sobolev 嵌入定理和紧性原理知, 辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 存在整体广义解 $v\in A$. 解的唯一性显然. □

引理 2.5.3 设引理 2.5.2 的条件成立. 若 $\varphi\in H^7(\Omega)$, $\psi\in H^6(\Omega)$, $f\in C^4(\mathbb{R})$, $f^{(i)}(0)=0\ (i=2,4)$, 则辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 的近似解满足下列条件:

$$\|v_{N_0}\|_{H^7(\Omega)}^2+\|v_{N_0t}\|_{H^6(\Omega)}^2+\|v_{N_0tt}\|_{H^5(\Omega)}^2+\|v_{N_0t^3}\|_{H^4(\Omega)}^2\leqslant C_{12}(T),\quad t\in[0,T]. \tag{2.5.28}$$

证明 方程 (2.5.12) 两端同乘以 $-2\lambda_s^5\alpha_{N_0st}(t)$, 对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 进行分部积分并应用 Gronwall 不等式, 得

$$\|v_{N_0x^5t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_{N_0x^6}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_{N_0x^6t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_{N_0x^7}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leqslant C_{13}(T)\left(\|\varphi\|_{H^7(\Omega)}^2+\|\psi\|_{H^6(\Omega)}^2+1\right),\quad t\in[0,T]. \tag{2.5.29}$$

同样, 方程 (2.5.12) 两端乘以 $\lambda_s^4\alpha_{N_0stt}(t)$ 有

$$\begin{aligned}&\|v_{N_0x^4tt}\|_{L^2(\Omega)}^2+a\|v_{N_0x^5tt}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&=(-v_{N_0x^5}+bv_{N_0x^7}-dv_{N_0x^5t}-f(v_{N_0x})_{x^4},v_{N_0x^5tt})\\&\leqslant\frac{a}{4}\|v_{N_0x^5tt}\|_{L^2(\Omega)}^2+C_{14}\left(\|v_{N_0x^5}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_{N_0x^7}\|_{L^2(\Omega)}^2\right.\\&\quad\left.+\|v_{N_0x^5t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|f(v_{N_0x})_{x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned} \tag{2.5.30}$$

由式 (2.5.18)–(2.5.30) 推出

$$\|v_{N_0x^4tt}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_{N_0x^5tt}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{15}(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.5.31}$$

类似可得

$$\|v_{N_0x^3t^3}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_{N_0x^4t^3}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{16}(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.5.32}$$

综合式 (2.5.12), (2.5.18), (2.5.29), (2.5.31) 和式 (2.5.32) 得估计 (2.5.28). □

应用引理 2.5.3 以及证明定理 2.5.1 的同样方法可得下面的定理.

定理 2.5.2 在引理 2.5.3 的条件下, 辅助问题 (2.5.6)–(2.5.8) 有唯一的整体古典解

$$v \in C([0,T]; C^5(\bar{\Omega})) \cap C^1([0,T]; C^4(\bar{\Omega})) \cap C^2([0,T]; C^3(\bar{\Omega})) = B.$$

2.5.3 初边值问题 (2.5.1)–(2.5.3) 的整体解

定理 2.5.3 设 $u_0 \in H^4(\Omega)$, $u_1 \in H^3(\Omega)$, $f \in C^3(\mathbb{R})$ 和 $f'(s)$ 下有界, 则初边值问题 (2.5.1)–(2.5.3) 存在唯一整体广义解

$$u \in C([0,T]; H^4(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^3(\Omega)) \cap C^2([0,T]; H^2(\Omega)) = D.$$

证明 式 (2.5.9) 对 x 求导得

$$v_{N_0xtt} - v_{N_0x^3} - av_{N_0x^3tt} + bv_{N_0x^5} - dv_{N_0x^3t} = f(v_{N_0x})_{xx}. \tag{2.5.33}$$

令

$$v_{N_0x}(x,t) = u_{N_0}(x,t). \tag{2.5.34}$$

将式 (2.5.34) 代入式 (2.5.33), (2.5.10) 和式 (2.5.11), 有

$$u_{N_0tt} - u_{N_0xx} - au_{N_0xxtt} + bu_{N_0x^4} - dv_{N_0xxt} = f(u_{N_0})_{xx}, \tag{2.5.35}$$

$$u_{N_0}(0,t) = u_{N_0}(l,t) = 0, \quad u_{N_0xx}(0,t) = u_{N_0xx}(l,t) = 0, \tag{2.5.36}$$

$$u_{N_0}(x,0) = u_{0N_0}(x), \quad u_{N_0t}(x,0) = u_{1N_0}(x), \tag{2.5.37}$$

其中, 在式 (2.5.37) 中 $u_{0N_0}(x) = \sum_{i=1}^{N_0} a_iy_i(x)$ 和 $u_{1N_0}(x) = \sum_{i=1}^{N_0} b_iy_i(x)$ 分别是

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_iy_i(x) \quad 和 \quad u_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_iy_i(x)$$

的近似解, 其中 a_i, b_i 是常数.

由式 (2.5.34) 和 (2.5.18) 推出

$$\|u_{N_0}\|_{H^4(\Omega)} + \|u_{N_0t}\|_{H^3(\Omega)} + \|u_{N_0tt}\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C_{17}(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.5.38}$$

由式 (2.5.38) 和 Sobolev 嵌入定理, 发现

$$\|u_{N_0}\|_{C^{3,\lambda}(\bar{\Omega})}+\|u_{N_0t}\|_{C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})}+\|u_{N_0tt}\|_{C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})}\leqslant C_{18}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{2.5.39}$$

其中 $0<\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$. 由式 (2.5.39) 和 Ascoli-Arzelá 定理导出, 存在一个函数 $u(x,t)$ 和 $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 的一个子序列, 仍记为 $\{u_{N_0}(x,t)\}$, 使得当 $N_0\to\infty$ 时, $\{u_{N_0x^i}(x,t)\}$ $(i=0,1,2)$ 和 $\{u_{N_0x^it}(x,t)\}$ $(i=0,1)$ 分别在 $\bar{Q}_T$ 上一致收敛于 $u_{x^i}(x,t)$ $(i=0,1,2)$ 和 $u_{x^it}(x,t)$ $(i=0,1)$. 子序列 $\{u_{N_0x^i}(x,t)\}$ $(i=0,1,2,3,4)$, $\{u_{N_0x^it}(x,t)\}$ $(i=0,1,2,3)$ 和 $\{u_{N_0x^itt}(x,t)\}$ $(i=0,1,2)$ 在 $L^2(Q_T)$ 上分别弱收敛于 $u_{x^i}(x,t)$ $(i=0,1,2,3,4)$, $u_{x^it}(x,t)$ $(i=0,1,2,3)$ 和 $u_{x^itt}(x,t)$ $(i=0,1,2)$. 因此初边值问题 (2.5.1)–(2.5.3) 有整体广义解 $u\in D$.

现在, 证明初边值问题 (2.5.1)–(2.5.3) 解的唯一性.

令 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是初边值问题 (2.2.1)–(2.2.3) 的两个广义解, 所以 $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ 满足下列初边值问题:

$$u_{tt}-u_{xx}-au_{xxtt}+bu_{x^4}-du_{xxt}=f(u_1)_{xx}-f(u_2)_{xx},\quad x\in\Omega,\quad t>0,\tag{2.5.40}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u_{xx}(0,t)=u_{xx}(l,t)=0,\quad t\geqslant 0,\tag{2.5.41}$$

$$u_(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in\Omega.\tag{2.5.42}$$

方程 (2.5.40) 两端同乘以 $2u_t$, 在 Ω 上积分, 对所得方程两端各加 $2\displaystyle\int_\Omega uu_tdx$ 项, 且进行分部积分, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+a\|u_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)}+b\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\&=-2d\|u_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)}-2\int_\Omega\Big[f''(u_1+\theta(u_2-u_1))uu_{1x}+f'(u_2)u_x\Big]u_{xt}dx+2\int_\Omega uu_tdx\\&\leqslant 2|d|\|u_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)}+2\max_{0\leqslant t\leqslant T,x\in\Omega}|f''(u_1+\theta(u_2-u_1))u_{1x}|\int_\Omega|u||u_{xt}|dx\\&\quad+2\max_{0\leqslant t\leqslant T,x\in\Omega}|f'(u_2)|\int_\Omega|u_x||u_{xt}|dx+\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant C_{19}(T)\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

上式运用 Gronwall 不等式给出

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)}=0.$$

因此得唯一性. □

定理 2.5.4 设 $u_0\in H^6(\Omega)$, $u_1\in H^5(\Omega)$, $f\in C^4(\Omega)$, $f^{(i)}(0)=0$ $(i=2,4)$ 和 $f'(s)$ 下有界, 则初边值问题 (2.5.1)–(2.2.3) 有唯一的整体古典解 $u(x,t)$.

证明 根据定理 2.5.2, $v(x,t) \in B$ 满足方程 (2.5.6) 和初边值条件 (2.5.7), (2.5.8). 方程 (2.5.6) 对 x 求导, 并将 $v_x(x,t) = u(x,t)$ 代入所获方程, 可见 $u(x,t)$ 是初边值问题 (2.5.1)–(2.5.3) 的整体广义解, 解的唯一性是显然的. □

2.5.4 初边值问题 (2.5.1)–(2.5.3) 整体解的不存在性

定理 2.5.5 设 $u(x,t)$ 是初边值问题 (2.5.1)–(2.5.3) 的广义解或古典解. 又设下列条件成立:

(1) $-\dfrac{\pi}{2l}\displaystyle\int_\Omega u_0(x)\sin\frac{\pi x}{l}dx = \alpha > 0, -\frac{\pi}{2l}\int_\Omega u_1(x)\sin\frac{\pi x}{l}dx = \beta > 0.$

(2) (a) $f(s) \in C^2(\mathbb{R})$ 是满足

$$f(0) = 0 \quad 和 \quad f(\alpha) - \frac{l^2 + b\pi^2}{l^2}\alpha \geqslant 0$$

的一偶且凸的函数;

(b) 当 $s \to \infty$ 时, $f(s)$ 增长得足够快, 使得当 $d > 0$ 时, 积分

$$\mathcal{B} = \frac{d\pi^2}{l^2 + a\pi^2}\int_\alpha^\infty \left[\beta^2 + \frac{2\pi^2}{l^2 + a\pi^2}\int_\alpha^y \left(f(s) - \frac{l^2 + b\pi^2}{l^2}s\right)ds\right]^{-\frac{1}{2}} dy \quad (2.5.43)$$

收敛, 同时, $\mathcal{B} < 1$; 对于 $d \leqslant 0$, 积分

$$\bar{T}_2 = \int_\alpha^\infty \left[\beta^2 + \frac{2\pi^2}{l^2 + a\pi^2}\left(\int_\alpha^y f(s)ds - \frac{l^2 + b\pi^2}{2l^2}y^2\right) + \frac{\pi^2(l^2 + b\pi^2)}{l^2(l^2 + a\pi^2)}\alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}} dy \quad (2.5.44)$$

收敛. 则当 $d > 0$ 时, 对某个有限时刻 $t_0 \leqslant \bar{T}_1 = -\dfrac{l^2 + a\pi^2}{d\pi^2}\ln(1 - \mathcal{B})$,

$$\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in\Omega}|u(x,t)| = \infty. \quad (2.5.45)$$

当 $d \leqslant 0$ 时, 对某个时刻 $t_0 \leqslant \bar{T}_2$,

$$\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in\Omega}|u(x,t)| = \infty, \quad (2.5.46)$$

其中 $\bar{T}_2$ 由式 (2.5.44) 给定.

证明 令

$$\phi(t) = -\frac{\pi}{2l}\int_\Omega u(x,t)\sin\frac{\pi x}{l}dx.$$

方程 (2.5.1) 两端同乘以 $\dfrac{\pi}{2l}\sin\dfrac{\pi x}{l}$, 并在 Ω 上积分和分部积分, 得

$$\left(1 + \frac{a\pi^2}{l^2}\right)\ddot{\phi} + \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{b\pi^4}{l^4}\right)\phi + \frac{d\pi^2}{l^2}\dot{\phi} = -\frac{\pi}{2l}\int_\Omega f(u)_{xx}\sin\frac{\pi x}{l}dx. \quad (2.5.47)$$

因为 $f(s)$ 是一偶且凸的函数, 进行分部积分并利用 Jensen 不等式有

$$\begin{aligned}
&-\frac{\pi}{2l}\int_{\Omega} f(u)_{xx}\sin\frac{\pi x}{l}dx=\frac{\pi^3}{2l^3}\int_{\Omega} f(u)\sin\frac{\pi x}{l}dx\\
&\qquad\geqslant\frac{\pi^2}{l^2}f\left(-\frac{\pi}{2l}\int_{\Omega} u\sin\frac{\pi x}{l}dx\right)=\frac{\pi^2}{l^2}f(\phi).
\end{aligned}\tag{2.5.48}$$

将式 (2.5.48) 代入式 (2.5.47) 可知

$$\ddot{\phi}+\frac{d\pi^2}{l^2+a\pi^2}\dot{\phi}+\frac{\pi^2(l^2+b\pi^2)}{l^2(l^2+a\pi^2)}\phi\geqslant\frac{\pi^2}{l^2+a\pi^2}f(\phi),\tag{2.5.49}$$

$\phi(0)=\alpha>0$ 和 $\dot{\phi}(0)=\beta>0$. 因为

$$\sigma_2=\frac{\pi^2(l^2+b\pi^2)}{l^2(l^2+a\pi^2)}>0,\quad \sigma_3=\frac{\pi^2}{l^2+a\pi^2}>0,\quad \sigma_1=\frac{d\pi^2}{l^2+a\pi^2}>0$$

是任意实数且 $\sigma_4=1$, 所以根据引理 1.8.1 知

$$\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in\Omega}|u(x,t)|=\infty. \qquad \square$$

推论 2.5.1 对于每一 p, $1\leqslant p\leqslant\infty$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}|u(x,t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

在有限时刻爆破.

2.5.5 初边值问题 (2.5.5), (2.5.2), (2.5.3) 和初边值问题 (2.5.4), (2.5.2), (2.5.3)

下面将上述定理运用到初边值问题 (2.5.5), (2.5.2), (2.5.3) 和初边值问题 (2.5.4), (2.5.2), (2.5.3) 上.

定理 2.5.6 设 $u_0\in H^4(\Omega)$, $u_1\in H^3(\Omega)$, 则初边值问题 (2.5.5), (2.5.2), (2.5.3) 存在唯一的整体广义解 $u\in C([0,T];H^4(\Omega))\cap C^1([0,T];H^3(\Omega))\cap C^2([0,T];H^2(\Omega))$.

证明 根据定理 2.5.3, 只需证明 $f'(u)=\frac{1}{4}(3cu^2+12u)$ 为下有界. 事实上,

$$f'(u)=\frac{1}{4}(3cu^2+12u)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3c}u+\frac{6}{\sqrt{3c}}\right)^2-\frac{3}{c}\geqslant-\frac{3}{c}. \qquad \square$$

根据压缩映射原理或 Galerkin 方法可证初边值问题 (2.5.4), (2.5.2), (2.5.3) 存在唯一局部广义解和唯一局部古典解. 由定理 2.5.5 可得下面的定理.

定理 2.5.7 设 $u(x,t)$ 是初边值问题 (2.5.4), (2.5.2), (2.5.3) 的广义解. 又设下列条件成立:

(1) $-\dfrac{\pi}{2l}\displaystyle\int_\Omega u_0(x)\sin\frac{\pi x}{l}dx=\alpha>0,\ -\frac{\pi}{2l}\int_\Omega u_1(x)\sin\frac{\pi x}{l}dx=\beta>0$;

(2) $\dfrac{3}{2}\alpha^2-\dfrac{l^2+b\pi^2}{l^2}\alpha\geqslant 0$,

则对某一有限时刻 $t_0\leqslant \bar{T}_2$,

$$\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in\Omega}|u(x,t)|=\infty. \tag{2.5.50}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}\bar{T}_2&=\int_\alpha^\infty\left[\beta^2+\frac{2\pi^2}{l^2+a\pi^2}\left(\int_\alpha^y\frac{3s^2}{2}ds-\frac{l^2+b\pi^2}{2l^2}y^2\right)+\frac{\pi^2(l^2+b\pi^2)}{l^2(l^2+a\pi^2)}\alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}}dy\\&=\int_\alpha^\infty\left[\beta^2+\frac{\pi^2}{l^2+a\pi^2}\left(y^3-\alpha^3-\frac{l^2+b\pi^2}{l^2}y^2\right)+\frac{\pi^2(l^2+b\pi^2)}{l^2(l^2+a\pi^2)}\alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}}dy\end{aligned}$$

收敛, 式 (2.5.50) 由定理 2.5.5 立得. □

2.5.6 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [65]. 与本节内容有关的文献见 [6], [13], [42], [66]–[74].

2.6 具有阻尼的非线性双曲型方程的初边值问题

2.6.1 引言

本节研究下列具有阻尼的非线性双曲型方程

$$u_{tt}+k_1u_{x^4}+k_2u_{x^4t}+g(u_{xx})_{xx}=f(x,t),\quad x\in\Omega,\quad t>0, \tag{2.6.1}$$

带有初边值条件

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)=0,\quad t>0, \tag{2.6.2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in\overline{\Omega} \tag{2.6.3}$$

的初边值问题或带有初边值条件

$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\quad u_{x^3}(0,t)=u_{x^3}(1,t)=0,\quad t>0, \tag{2.6.4}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in\overline{\Omega} \tag{2.6.5}$$

的初边值问题或带有初边值条件

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\quad t>0, \tag{2.6.6}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in\overline{\Omega} \tag{2.6.7}$$

的初边值问题, 其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, k_1 和 k_2 是两个正常数, $g(s)$ 是一给定的非线性函数, $f(x,t)$ 是一已知函数, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是给定的初值函数, 且满足连续性条件: 在式 (2.6.3) 中

$$\varphi_{x^{2k}}(0)=\varphi_{x^{2k}}(1)=\psi_{x^{2k}}(0)=\psi_{x^{2k}}(1)=0,\quad k=0,1;$$

在式 (2.6.5) 中

$$\varphi_{x^{2k+1}}(0)=\varphi_{x^{2k+1}}(1)=\psi_{x^{2k+1}}(0)=\psi_{x^{2k+1}}(1)=0,\quad k=0,1,$$

以及 $\Omega=(0,1)$.

方程 (2.6.1) 描写一类具有线性阻尼和依赖于强迫力的外部项的非线性杆模型的运动, 关于方程 (2.6.1) 的更多物理解释, 可进一步参见文献 [75], [76].

下面应用 Galerkin 方法证明问题 (2.6.1)–(2.6.3) 或问题 (2.6.1), (2.6.4), (2.6.5) 存在唯一整体广义解和唯一整体古典解. 我们还证明问题 (2.6.1), (2.6.6), (2.6.7) 存在唯一局部广义解. 最后给出问题 (2.6.1), (2.6.6), (2.6.7) 解爆破的充分条件.

2.6.2 解的整体存在性与唯一性

为了证明问题 (2.6.1)–(2.6.3) 存在整体广义解和整体古典解, 现在引入 $L^2(\Omega)$ 中一标准正交基. 令 $y_i(x)$ 是由特征值问题

$$y''+\lambda y=0,\quad x\in\Omega,$$
$$y(0)=y(1)=0$$

的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots)$ 对应的特征函数构成的 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基.

并令

$$u_{N_0}(x,t)=\sum_{i=1}^{N_0}\alpha_{N_0i}(t)y_i(x) \tag{2.6.8}$$

是问题 (2.6.1)–(2.6.3) 的 Galerkin 近似解, 其中 $\alpha_{N_0i}(t)(i=1,2,\cdots,N_0)$ 是待定函数, N_0 是一自然数. 假定初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可以表为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iy_i(x),\quad \psi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}b_iy_i(x),$$

其中 a_i, $b_i(i=1,2,\cdots)$ 是常数. 把近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 代入式 (2.6.1), 两端同乘以 $y_s(x)$, 且在 Ω 上积分, 得

$$(u_{N_0tt}+k_1u_{N_0x^4}+k_2u_{N_0x^4t}+g(u_{N_0xx})_{xx},y_s)=(f,y_s),\quad s=1,2,\cdots,N_0. \tag{2.6.9}$$

将近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 和初值函数的近似

$$\varphi_{N_0}(x)=\sum_{i=1}^{N_0}a_iy_i(x),\quad \psi_{N_0}(x)=\sum_{i=1}^{N_0}b_iy_i(x)$$

代入式 (2.6.3), 有

$$\alpha_{N_0s}(0)=a_s,\quad \alpha_{N_0st}(0)=b_s,\quad s=1,2,\cdots,N_0. \tag{2.6.10}$$

引理 2.6.1 设 $g\in C^2(\mathbb{R})$, $G(s)=\int_0^s g(y)dy\geqslant 0$, $\forall s\in\mathbb{R}$, $g(0)=0$; $f\in L^2(Q_T)$; $\varphi\in H^3(\Omega)$ 和 $\psi\in L^2(\Omega)$, 则对于每一个 N_0, 常微分方程组的 Cauchy 问题 (2.6.9), (2.6.10) 存在古典解 $\alpha_{N_0s}\in C^2[0,T](s=1,2,\cdots,N_0)$ 和成立以下估计

$$\begin{aligned}&\|u_{N_0}\|^2_{H^2(\Omega)}+\|u_{N_0t}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^2t}\|^2_{L^2(Q_t)}+\int_\Omega\int_0^{u_{N_0x^2}}g(y)dydx\\&\leqslant C_1(T),\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

此处和以后的 $C_1(T)$ 和 $C_i(T)(i=2,3,\cdots)$ 是依赖于 T, 但不依赖于 N_0 的常数, $Q_t=\Omega\times(0,t)$.

证明 方程 (2.6.9) 两端同乘以 $2\alpha_{N_0st}$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 两端各加项 $2(u_{N_0},u_{N_0t})$, 并对 x 分部积分, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|u_{N_0}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0t}\|^2_{L^2(\Omega)}+k_1\|u_{N_0x^2}\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_\Omega\int_0^{u_{N_0x^2}}g(y)dydx\right)\\&+2k_2\|u_{N_0x^2t}\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+2\|u_{N_0t}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0}\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.6.12}$$

注意到在式 (2.6.12) 中用到了标准正交基 $y_i(x)$ 在 Ω 的边界上的下列性质:

$$y_i^{(2m)}(0)=y_i^{(2m)}(1),\quad m=0,1,2,\cdots;\quad i=1,2,\cdots,$$

其中 $(2m)$ 表示函数 $y_i(x)$ 导数的阶数. 由式 (2.6.12), Gronwall 不等式给出

$$\begin{aligned}&\|u_{N_0}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0t}\|^2_{L^2(\Omega)}+k_1\|u_{N_0x^2}\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\quad+2k_2\|u_{N_0x^2t}\|^2_{L^2(Q_t)}+2\int_\Omega\int_0^{u_{N_0x^2}}g(y)dydx\\&\leqslant e^{2T}\Bigg((1+k_1)\|\varphi\|^2_{H^2(\Omega)}+\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\quad+2\int_\Omega\int_0^{\varphi_{x^2}}g(y)dy+\|f\|^2_{L^2(Q_t)}+1\Bigg),\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

由式 (2.6.13) 推出估计 (2.6.11) 成立.

类似于文献 [53] 中的引理 2.1, 应用 Leray-Schauder 不动点定理可以证明 Cauchy 问题 (2.6.9), (2.6.10) 存在解 $\alpha_{N_0s}\in C^2[0,T](s=1,2,\cdots,N_0)$. □

引理 2.6.2 设引理 2.6.1 的条件和下列条件成立: $g\in C^3(\mathbb{R})$, $\forall s\in\mathbb{R}$, $g'(s)\geqslant 0$, $g''(0)=0$; $\varphi\in H^5(\Omega)$; $\psi\in H^3(\Omega)$; $f_x\in L^2(Q_T)$ 和 $f(0,t)=f(1,t)=0$, 则近似

解 $u_{N_0}(x,t)$ 有估计

$$\|u_{N_0t^2}\|^2_{L^2(Q_t)} + \|u_{N_0}\|^2_{H^5(\Omega)} + \|u_{N_0t}\|^2_{H^3(\Omega)} + \|u_{N_0t}\|^2_{H^5(Q_t)} \leqslant C_2(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.6.14}$$

证明 方程 (2.6.9) 两端同乘以 $\lambda_s \alpha_{N_0s}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 并分别对 t 和对 x 分部积分, 推出

$$\begin{aligned}
&-2\int_0^t\int_\Omega u_{N_0t^2}u_{N_0x^2}dxd\tau + 2k_1\int_0^t\int_\Omega u^2_{N_0x^3}dxd\tau \\
&+k_2\int_0^t \frac{d}{d\tau}\|u_{N_0x^3}\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau + 2\int_0^t\int_\Omega g'(u_{N_0x^2})u^2_{N_0x^3}dxd\tau \\
=&-2\int_0^t\int_\Omega fu_{N_0x^2}dxd\tau.
\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

对 t 分部积分可知

$$\begin{aligned}
-2\int_0^t\int_\Omega u_{N_0x^2}u_{N_0\tau^2}dxd\tau =& -2\int_\Omega u_{N_0t}u_{N_0x^2}dx + 2\int_\Omega \psi_{N_0}\varphi_{N_0x^2}dx \\
&+2\int_\Omega\int_0^t u_{N_0\tau}u_{N_0x^2\tau}dxd\tau.
\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

将式 (2.6.16) 代入式 (2.6.15), 应用 Hölder 不等式, 引理假定和式 (2.6.11), 得到

$$\|u_{N_0x^3}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{N_0x^3}\|^2_{L^2(Q_t)} \leqslant C_3(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.6.17}$$

方程 (2.6.9) 两端同乘以 $2\lambda_s^2\alpha_{N_0st}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|u_{N_0x^2t}\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1\|u_{N_0x^4}\|^2_{L^2(\Omega)}) + 2k_2\|u_{N_0x^4t}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
=&-2\int_\Omega (g''(u_{N_0x^2})u^2_{N_0x^3}u_{N_0x^4t} + g'(u_{N_0x^2})u_{N_0x^4}u_{N_0x^4t})dx + 2\int_\Omega fu_{N_0x^4t}dx.
\end{aligned} \tag{2.6.18}$$

由式 (2.6.11), (2.6.17) 和 Sobolev 嵌入定理推出

$$\|u_{N_0}\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leqslant C_4(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.6.19}$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理有

$$\|u_{N_0x^3}\|_{L^4(\Omega)} \leqslant C_5\|u_{N_0x^3}\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\Omega)}\|u_{N_0x^3}\|^{\frac{1}{4}}_{H^1(\Omega)}. \tag{2.6.20}$$

利用 Young 不等式, 式 (2.6.11), (2.6.17), (2.6.19) 和式 (2.6.20), 由式 (2.6.18) 推出

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|u_{N_0x^2t}\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1\|u_{N_0x^4}\|^2_{L^2(\Omega)}) + k_2\|u_{N_0x^4t}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant& C_6(T)\|u_{N_0x^4}\|^2_{L^2(\Omega)} + C_7\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C_8(T), \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{2.6.21}$$

由式 (2.6.21), Gronwall 不等式给出

$$\|u_{N_0x^2t}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^4}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^4t}\|^2_{L^2(Q_t)}\leqslant C_9(T),\quad t\in[0,T].\tag{2.6.22}$$

方程 (2.6.9) 两端同乘以 $\alpha_{N_0st^2}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 在 $(0,t)$ 上对 t 积分, 注意到式 (2.6.11), (2.6.22) 和 Sobolev 嵌入定理, 得

$$\|u_{N_0tt}\|_{L^2(Q_t)}\leqslant C_{10}(T),\quad t\in[0,T].\tag{2.6.23}$$

方程 (2.6.9) 两端同乘以 $-2\lambda_s^3\alpha_{N_0st}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 并对 x 积分, 有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u_{N_0x^3t}\|^2_{L^2(\Omega)}+k_1\|u_{N_0x^5}\|^2_{L^2(\Omega)})+2k_2\|u_{N_0x^5t}\|^2_{L^2(\Omega)}\\&+2\int_\Omega g(u_{N_0x^2})_{x^3}u_{N_0x^5t}dx=2(f_x,u_{N_0x^5t}).\end{aligned}\tag{2.6.24}$$

应用 Hölder 不等式, 式 (2.6.11), (2.6.22) 和 Sobolev 嵌入定理, 由式 (2.6.24) 可见

$$\|u_{N_0x^3t}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^5}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^5t}\|^2_{L^2(Q_t)}\leqslant C_{11}(T),\quad t\in[0,T].\tag{2.6.25}$$

从式 (2.6.11), (2.6.23) 和式 (2.6.25) 看出, 式 (2.6.14) 成立. □

定理 2.6.1　在引理 2.6.2 的条件下, 问题 (2.6.1)–(2.6.3) 存在唯一整体广义解 $u(x,t)$, 即 $u(x,t)$ 满足等式

$$\int_0^T\int_\Omega[u_{tt}+k_1u_{x^4}+k_2u_{x^4t}+g(u_{xx})_{xx}-f(x,t)]h(x,t)dxdt=0,\quad\forall h\in L^2(Q_T)$$

和在古典意义下满足初边值条件. 解 $u(x,t)$ 有连续导数 $u_{x^i}(x,t)(i=1,2)$ 和广义导数 $u_{x^i}(x,t)$, $u_{x^it}(x,t)(i=3,4,5)$ 和 $u_{tt}(x,t)$.

证明　由引理 2.6.2 和 Sobolev 嵌入定理知

$$\|u_{N_0}\|_{C^{4,\lambda}(\overline{\Omega})}\leqslant C_{12}(T),\quad\|u_{N_0t}\|_{C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})}\leqslant C_{13}(T),\quad t\in[0,T],\tag{2.6.26}$$

其中 $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. 由式 (2.6.26) 和 Ascoli-Arzelá 定理推得存在一个函数 $u(x,t)$ 和 $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 的子序列, 仍记为 $\{u_{N_0}(x,t)\}$, 使得当 $N_0\to\infty$ 时, $\{u_{N_0}(x,t)\}$, $\{u_{N_0x}(x,t)\}$ 和 $\{u_{N_0x^2}(x,t)\}$ 在 $\overline{Q}_T$ 上分别一致收敛于 $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ 和 $u_{x^2}(x,t)$. 由估计 (2.6.14) 还知道, 子序列 $\{u_{N_0x^i}(x,t)\}$, $\{u_{N_0x^it}(x,t)\}(i=3,4,5)$, $\{u^2_{N_0x^3}(x,t)\}$ 和 $\{u_{N_0t^2}(x,t)\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中分别弱收敛于 $u_{x^i}(x,t)$, $u_{x^it}(x,t)$ $(i=3,4,5)$, $u^2_{x^3}(x,t)$ 和 $u_{t^2}(x,t)$. 这样一来, 根据空间 $L^2(Q_T)$ 的弱紧性定理可以证明问题 (2.6.1)–(2.6.3) 存在整体广义解.

现在证明广义解 $u(x,t)$ 的唯一性. 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是问题 (2.6.1)–(2.6.3) 的两个广义解. 令 $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. 于是 $w(x,t)$ 满足下列初边值问题

$$w_{tt}+k_1w_{x^4}+k_2w_{x^4t}+g(u_{1xx})_{xx}-g(u_{2xx})_{xx}=0,\quad x\in\Omega,\quad t>0, \tag{2.6.27}$$

$$w(0,t)=w(1,t)=0,\quad w_{xx}(0,t)=w_{xx}(1,t)=0,\quad t>0, \tag{2.6.28}$$

$$w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=0,\quad x\in\Omega. \tag{2.6.29}$$

方程 (2.6.27) 两端同乘以 $2w_t(x,t)$, 两端各加 $2ww_t$ 项, 且在 Ω 上积分, 经计算得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}+k_1\|w_{x^2}\|^2_{L^2(\Omega)})+2k_2\|w_{x^2t}\|^2_{L^2(\Omega)}\\&=-2\int_\Omega g'(u_{1xx}+\theta(u_{2xx}-u_{1xx}))w_{xx}w_tdx+2\int_\Omega ww_tdx,\end{aligned} \tag{2.6.30}$$

其中 $0<\theta<1$. 因为 $g'(u_{1xx}+\theta(u_{2xx}-u_{1xx}))$ 是有界的, 由式 (2.6.30) 知

$$\begin{aligned}&\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_{xxt}\|^2_{L^2(Q_t)}\\&\leqslant C_{14}\int_0^t(\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)})d\tau,\end{aligned}$$

其中 C_{14} 是一常数. Gronwall 不等式给出

$$\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)}=0.$$

因此 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$. □

为了进一步证明, 问题 (2.6.1)–(2.6.3) 存在整体解, 对近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 作进一步估计.

引理 2.6.3 设引理 2.6.2 的条件成立和满足下列条件: $g\in C^7(\mathbb{R})$, $g^{(2m)}(0)=0(m=2,3)$; $\varphi\in H^9(\Omega)$; $\psi\in H^9(\Omega)$; $f\in H^1((0,T);H^3(\Omega))\cap C^1([0,T];H^1(\Omega))$, $f(x,0)\in H^5(\Omega)$ 和 $f_{x^{2m}}(0,t)=f_{x^{2m}}(1,t)=0\ (m=1,2)$. 那么近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 有估计

$$\|u_{N_0}\|^2_{H^7(\Omega)}+\|u_{N_0t}\|^2_{H^7(\Omega)}+\|u_{N_0t^2}\|^2_{H^5(\Omega)}+\|u_{N_0t^3}\|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant C_{15}(T),\quad t\in[0,T]. \tag{2.6.31}$$

证明 方程 (2.6.9) 两端同乘以 $2\alpha_{N_0st}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 且对 x 分部积分, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u_{N_0x^5t}\|^2_{L^2(\Omega)}+k_1\|u_{N_0x^7}\|^2_{L^2(\Omega)})+2k_2\|u_{N_0x^7t}\|^2_{L^2(\Omega)}\\&+2\int_\Omega g(u_{N_0x^2})_{x^5}u_{N_0x^7t}dx=2\int_\Omega f_{x^3}u_{N_0x^7t}dx.\end{aligned} \tag{2.6.32}$$

经直接计算, 由式 (2.6.32) 可见

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u_{N_0x^5t}\|_{L^2(\Omega)}^2+k_1\|u_{N_0x^7}\|_{L^2(\Omega)}^2)+k_2\|u_{N_0x^7t}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\leqslant C_{16}(T)\|u_{N_0x^7}\|_{L^2(\Omega)}^2+C_{17}\|f_{x^3}\|_{L^2(\Omega)}^2+C_{18}(T).\end{aligned}\tag{2.6.33}$$

由式 (2.6.33), Gronwall 不等式给出

$$\|u_{N_0x^5t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{N_0x^7}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{N_0x^7t}\|_{L^2(Q_t)}^2\leqslant C_{19}(T),\quad t\in[0,T].\tag{2.6.34}$$

方程 (2.6.9) 对 t 求导, 有

$$(u_{N_0t^3}+k_1u_{N_0x^4t}+k_2u_{N_0x^4t^2}+g(u_{N_0x^2})_{x^2t},y_s)=(f_t,y_s).\tag{2.6.35}$$

式 (2.6.35) 两端同乘以 $-\lambda_s^5\alpha_{N_0st^2}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 对 x 分部积分, 应用式 (2.6.34) 和 Sobolev 嵌入定理, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u_{N_0x^5t^2}\|_{L^2(\Omega)}^2+k_1\|u_{N_0x^7t}\|_{L^2(\Omega)}^2)+2k_2\|u_{N_0x^7t^2}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\leqslant C_{20}(T)\|u_{N_0x^7t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|f_{x^3t}\|_{L^2(\Omega)}^2+C_{21}(T).\end{aligned}\tag{2.6.36}$$

方程 (2.6.9) 两端同乘以 $-\lambda_s^5\alpha_{N_0st^2}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 对 x 分部积分, 并取 $t=0$, 有 $\|u_{N_0x^5t^2}(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant C_{22}$. 由 Gronwall 不等式, 从式 (2.6.36) 推出

$$\|u_{N_0x^5t^2}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{N_0x^7t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{N_0x^7t^2}\|_{L^2(Q_t)}^2\leqslant C_{23}(T),\quad t\in[0,T].\tag{2.6.37}$$

式 (2.6.35) 两端同乘以 $\alpha_{N_0st^3}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和知

$$\|u_{N_0t^3}\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant C_{24},\quad t\in[0,T].\tag{2.6.38}$$

式 (2.6.35) 两端同乘以 $-\lambda_s\alpha_{N_0st^3}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 并对 x 分部积分, 有

$$\|u_{N_0xt^3}\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant C_{25}(T),\quad t\in[0,T].\tag{2.6.39}$$

由式 (2.6.14), (2.6.34), (2.6.37), (2.6.38) 和式 (2.6.39) 推出式 (2.6.31) 成立. □

定理 2.6.2 设在引理 2.6.3 的条件下. 问题 (2.6.1)–(2.6.3) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)$.

证明 由式 (2.6.31) 和 Sobolev 嵌入定理知

$$\begin{aligned}&\|u_{N_0}\|_{C^6(\overline{\Omega})}\leqslant C_{26}(T),\quad \|u_{N_0t}\|_{C^6(\overline{\Omega})}\leqslant C_{27}(T),\\&\|u_{N_0t^2}\|_{C^4(\overline{\Omega})}\leqslant C_{28}(T),\quad \|u_{N_0t^3}\|_{C(\overline{\Omega})}\leqslant C_{29}(T),\quad t\in[0,T].\end{aligned}\tag{2.6.40}$$

应用估计 (2.6.40) 和 Ascoli-Arzelá 定理, 可证问题 (2.6.1)–(2.6.3) 存在唯一整体古典解. 因为广义解是唯一的, 所以古典解也是唯一的. □

类似地, 可以证明以下定理.

定理 2.6.3 设 $g \in C^3(\mathbb{R})$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $G(s) = \int_0^s g(y)dy \geqslant 0$, $g'(s) \geqslant 0$; $\varphi \in H^5(\Omega)$; $\psi \in H^3(\Omega)$ 和 $f_x \in L^2(Q_T)$, 那么问题 (2.6.1), (2.6.4), (2.6.5) 存在唯一整体广义解 $u(x,t)$, 即 $u(x,t)$ 满足等式

$$\int_0^T \int_\Omega [u_{tt} + k_1 u_{x^4} + k_2 u_{x^4 t} + g(u_{xx})_{xx} - f(x,t)]h(x,t)dxdt = 0, \quad \forall h \in L^2(Q_T),$$

并在古典意义下满足初边值条件 (2.6.4), (2.6.5). 解 $u(x,t)$ 具有连续导数 $u_{x^i}(x,t)$ $(i = 1,2)$ 和广义导数 $u_{x^i}(x,t)$, $u_{x^i t}(x,t)(i = 3,4,5)$, $u_{tt}(x,t)$.

除以上假定外, 如果 $g \in C^7(\mathbb{R})$; $\varphi \in H^9(\Omega)$; $\psi \in H^9(\Omega)$; $f \in H^1((0,T); H^3(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^1(\Omega))$, $f(x,0) \in H^5(\Omega)$ 和 $f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0$, 则问题 (2.6.1), (2.6.4), (2.6.5) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)$.

2.6.3 解的爆破

在这一节中我们讨论解的爆破. 如在 2.1 节中应用压缩映射原理可以证明具有初边值条件 (2.6.6), (2.6.7) 的方程 (2.6.1)($f(x,t) = 0$) 存在唯一局部广义解. 于是可得下列定理.

定理 2.6.4 设 $\varphi \in H^4(\Omega)$, $\psi \in H^2(\Omega)$ 和 $g \in C^3(\mathbb{R})$, 则问题 (2.6.1), (2.6.6), (2.6.7) 存在唯一局部广义解 $u \in C([0,T_0); H^4(\Omega))$, $u_t \in C([0,T_0); H^2(\Omega)) \cap L^2([0,T_0); H^4(\Omega))$, $u_{tt} \in L^2(Q_{T_0})$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间空间.

定理 2.6.5 设

(1)

$$sg(s) \leqslant KG(s), \quad G(s) \leqslant -\alpha|s|^{p+1},$$

其中 $G(s) = \int_0^s g(\tau)d\tau$, $K > 2$, $\alpha > 0$ 和 $p > 1$ 是常数;

(2) $k_2 = 1$, $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} E(0) &= \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1\|\varphi_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega G(\varphi_{xx})dx \\ &\leqslant \frac{-4}{[(K-2)\alpha/(p+3)]^{\frac{2}{p-1}}(1 - e^{-\frac{p-1}{4}})^{\frac{4}{p-1}}} < 0, \end{aligned}$$

则问题 (2.6.1)($f(x,t) = 0$), (2.6.6), (2.6.7) 的广义解在有限时刻 $\tilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega u^2_{xx}(x,\tau)dxd\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega u^2_{xx}(x,s)dxdsd\tau \to \infty.$$

证明 方程 (2.6.1) 两端同乘以 $2u_t$, 乘积在 Ω 上积分, 得

$$\dot{E}(t)=0,\quad t>0, \tag{2.6.41}$$

其中

$$E(t)=\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+k_1\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_\Omega G(u_{xx}(x,t))dx$$
$$+2k_2\int_0^t\|u_{xx\tau}\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau.$$

因此

$$E(t)=E(0),\quad t>0. \tag{2.6.42}$$

令

$$M(t)=\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\int_\Omega u^2_{xx}(x,\tau)dxd\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega u^2_{xx}(x,s)dxdsd\tau, \tag{2.6.43}$$

从而

$$\dot{M}(t)=2\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx+\int_\Omega u^2_{xx}(x,t)dx+\int_0^t\int_\Omega u^2_{xx}(x,\tau)dxd\tau. \tag{2.6.44}$$

应用定理 2.6.5 的条件 (1) 和注意到

$$K\int_\Omega G(u_{xx})dx=E(0)-\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}-2k_2\int_0^t\|u_{xx\tau}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau$$
$$-k_1\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+(K-2)\int_\Omega G(u_{xx}(x,t))dx, \tag{2.6.45}$$

得到

$$\begin{aligned}\ddot{M}(t)&=2\int_\Omega\left[u_t^2(x,t)+u(x,t)u_{tt}(x,t)+u_{xx}(x,t)u_{xxt}(x,t)+\frac{1}{2}u^2_{xx}(x,t)\right]dx\\&=2\int_\Omega\Big[u_t^2(x,t)-k_1u^2_{xx}(x,t)-k_2u_{xx}(x,t)u_{xxt}(x,t)-u_{xx}(x,t)g(u_{xx}(x,t))\\&\quad+u_{xx}(x,t)u_{xxt}(x,t)+\frac{1}{2}u^2_{xx}(x,t)\Big]dx\\&\geqslant 2\int_\Omega\left[u_t^2(x,t)-k_1u^2_{xx}(x,t)-KG(u_{xx}(x,t))+\frac{1}{2}u^2_{xx}(x,t)\right]dx\\&\geqslant 4\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}-2E(0)+2(K-2)\alpha\int_\Omega|u_{xx}(x,t)|^{p+1}dx\\&\quad+\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}>0,\quad t>0.\end{aligned} \tag{2.6.46}$$

由式 (2.6.46) 推出

$$\dot{M}(t) \geqslant -2E(0)t + 2(K-2)\alpha \int_0^t \int_\Omega |u_{xx}(x,\tau)|^{p+1} dx d\tau + \dot{M}(0), \tag{2.6.47}$$

$$M(t) \geqslant -E(0)t^2 + 2(K-2)\alpha \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |u_{xx}(x,s)|^{p+1} dx ds d\tau + \dot{M}(0)t + M(0), \tag{2.6.48}$$

其中

$$\dot{M}(0) = 2\int_\Omega \varphi(x)\psi(x)dx + \int_\Omega \psi_{xx}^2(x)dx, \quad M(0) = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

从式 (2.6.46)–(2.6.48) 知

$$\begin{aligned}\ddot{M}(t) + \dot{M}(t) + M(t) \geqslant & 4\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(K-2)\alpha \left[\int_\Omega |u_{xx}(x,t)|^{p+1} dx\right.\\ & \left. + \int_0^t \int_\Omega |u_{xx}(x,\tau)|^{p+1} dx d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |u_{xx}(x,s)|^{p+1} dx ds d\tau\right]\\ & + \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)\\ & + \dot{M}(0)(t+1) + M(0).\end{aligned} \tag{2.6.49}$$

将式 (2.6.44) 代入式 (2.6.49) 的左端, 得

$$\begin{aligned}& \ddot{M}(t) + 2\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dt + \int_\Omega u_{xx}^2(x,t)dx + \int_0^t \int_\Omega u_{xx}^2(x,\tau)dx d\tau + M(t)\\ \geqslant & 4\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(K-2)\alpha \left[\int_\Omega |u_{xx}(x,t)|^{p+1} dx\right.\\ & \left. + \int_0^t \int_\Omega |u_{xx}(x,\tau)|^{p+1} dx d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |u_{xx}(x,s)|^{p+1} dx ds d\tau\right]\\ & + \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right) + \dot{M}(0)(t+1) + M(0).\end{aligned} \tag{2.6.50}$$

因为 $\ddot{M}(t) > 0$, $M(t) \geqslant 0$ 以及

$$2\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx \leqslant \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

由式 (2.6.50) 有

$$\begin{aligned}\ddot{M}(t) + M(t) \geqslant & (K-2)\alpha \left[\int_\Omega |u_{xx}(x,t)|^{p+1} dx + \int_0^t \int_\Omega |u_{xx}(x,\tau)|^{p+1} dx d\tau\right.\\ & \left. + \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |u_{xx}(x,s)|^{p+1} dx ds d\tau\right] - 2E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)\\ & + \frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1) + \frac{1}{2}M(0).\end{aligned} \tag{2.6.51}$$

应用 Hölder 不等式和 Poincaré 不等式, 得

$$\int_{\Omega} |u_{xx}(x,t)|^{p+1} dx \geqslant \|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^{p+1} \geqslant \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^{p+1} \geqslant \|u\|_{L^2(\Omega)}^{p+1}, \tag{2.6.52}$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u_{xx}(x,\tau)|^2 dx d\tau \leqslant t^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u_{xx}(x,\tau)|^{p+1} dx d\tau \right)^{\frac{2}{p+1}}, \tag{2.6.53}$$

$$\int_0^t \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |u_{xx}(x,s)|^2 dx ds d\tau \leqslant \left(\int_0^t \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |u_{xx}(x,s)|^{p+1} dx ds d\tau \right)^{\frac{2}{p+2}} \left(\frac{t^2}{2} \right)^{\frac{p-1}{p+1}}. \tag{2.6.54}$$

由式 (2.6.53) 和式 (2.6.54) 分别推出

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u_{xx}(x,\tau)|^{p+1} dx d\tau \geqslant t^{\frac{1-p}{2}} \left[\int_0^t \int_{\Omega} |u_{xx}(x,\tau)|^2 dx d\tau \right]^{\frac{p+1}{2}} \tag{2.6.55}$$

和

$$\int_0^t \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |u_{xx}(x,s)|^{p+1} dx ds d\tau \geqslant 2^{\frac{p-1}{2}} t^{1-p} \left[\int_0^t \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |u_{xx}(x,s)|^2 dx ds d\tau \right]^{\frac{p+1}{2}}. \tag{2.6.56}$$

把式 (2.6.52), (2.6.55) 和式 (2.6.56) 代入式 (2.6.51), 并利用不等式

$$(a+b+c)^n \leqslant 2^{2(n-1)}(a^n+b^n+c^n), \quad a,b,c,>0, \quad n>1,$$

得

$$\begin{aligned}
\ddot{M}(t) + M(t) \geqslant & (K-2)\alpha \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)}^{p+1} + t^{\frac{1-p}{2}} \left[\int_0^t \int_{\Omega} |u_{xx}(x,\tau)|^2 dx d\tau \right]^{\frac{p+1}{2}} \right. \\
& \left. + 2^{\frac{p-1}{2}} t^{1-p} \left[\int_0^t \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |u_{xx}(x,s)|^2 dx ds d\tau \right]^{\frac{p+1}{2}} \right\} \\
& - E(0) \left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right) + \frac{1}{2} \dot{M}(0)(t+1) + \frac{1}{2} M(0) \\
\geqslant & 2^{1-p}(K-2)\alpha t^{1-p} M^{\frac{p+1}{2}}(t) - E(0) \left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right) \\
& + \frac{1}{2} \dot{M}(0)(t+1) + \frac{1}{2} M(0), \quad t \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{2.6.57}$$

我们看出从式 (2.6.47) 和式 (2.6.48) 推出, 当 $t \to \infty$ 时, $\dot{M}(t) \to \infty$ 且 $M(t) \to \infty$. 所以存在一个 $t_0 \geqslant 1$, 使得当 $t \geqslant t_0$ 时, $\dot{M}(t) > 0$, $M(t) > 0$. 式 (2.6.57) 两端同乘以 $2\dot{M}(t)$ 并应用式 (2.6.47), 有

$$\frac{d}{dt}[\dot{M}^2(t) + M^2(t)] \geqslant C_{30} t^{1-p} \frac{d}{dt} M^{\frac{p+3}{2}}(t) + Q(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{2.6.58}$$

其中 $C_{30} = \dfrac{2(K-2)\alpha}{2^{p-2}(p+3)}$,

$$Q(t) = [-4E(0)t + 2\dot{M}(0)]\left[-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{1}{2}M(0)\right].$$

由式 (2.6.58) 得

$$\frac{d}{dt}[t^{p-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t)-C_{30}M^{\frac{p+3}{2}}(t)] \geqslant t^{p-1}Q(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{2.6.59}$$

式 (2.6.59) 在 (t_0,t) 上积分, 可见

$$\begin{aligned}&t^{p-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t)-C_{30}M^{\frac{p+3}{2}}(t))\\ \geqslant& \int_{t_0}^{t}\tau^{p-1}Q(\tau)d\tau + t_0^{p-1}(\dot{M}^2(0)+M^2(0)) - C_{30}M^{\frac{p+3}{2}}(t_0), \quad t\geqslant t_0.\end{aligned} \tag{2.6.60}$$

注意到当 $t\to\infty$ 时, 式 (2.6.60) 的右端趋于正无穷大, 因此存在 $t_1 \geqslant t_0$, 使得当 $t_0 \geqslant t_1$ 时, 式 (2.6.60) 的右端大于等于零. 因而

$$t^{p-1}(\dot{M}(t)+M(t))^2 \geqslant t^{p-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t)) \geqslant C_{30}M^{\frac{p+3}{2}}(t), \quad t\geqslant t_1. \tag{2.6.61}$$

式 (2.6.61) 两端开方, 得

$$\dot{M}(t)+M(t) \geqslant t^{\frac{1-p}{2}}C_{30}^{\frac{1}{2}}M^{\frac{p+3}{4}}(t), \quad t\geqslant t_1. \tag{2.6.62}$$

由式 (2.6.48) 推出

$$M(t) \geqslant -E(0)t^2 + \dot{M}(0) + M(0).$$

根据引理 1.8.2 存在一常数 $\tilde{T}$, 使得当 $t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega u_{xx}^2(x,\tau)dxd\tau + \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega u_{xx}^2(x,s)dxdsd\tau \to \infty. \qquad \square$$

2.6.4 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [77]. 与本节内容有关的文献见 [53], [78]–[82], [363], [364].

2.7 具有粘性阻尼的拟线性波动方程初边值问题解的整体存在性

2.7.1 引言

本节考虑下列具有粘性阻尼和源项的拟线性波动方程初边值问题

$$u_{tt} - \Delta u_t - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i(u_{x_i}) + f(u_t) = g(u), \quad x\in\Omega, \quad t>0, \tag{2.7.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t\geqslant 0, \tag{2.7.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x\in\Omega \tag{2.7.3}$$

解的整体存在性, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中具有充分光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\sigma_i(i=1,2,\cdots,N), f$ 和 g 是满足随后详细说明的某些条件.

形如 (2.7.1) 的方程是描述速度型材料构成的粘弹性固体 (例如, 当维数 $N=1$ 时, 是杆, 当 $N=2$ 时, 是板) 运动的一类非线性发展方程, 见文献 [83]–[86].

下面证明在一定假设下问题 (2.7.1)–(2.7.3) 存在唯一整体弱解. 当维数等于 1 时, 对应的问题 (2.7.1)–(2.7.3) 在一定条件下存在唯一整体广义解和唯一整体古典解.

2.7.2 弱解的整体存在性

在这一节, 我们考虑问题 (2.7.1)–(2.7.3) 弱解的整体存在性.

定理 2.7.1 设

(i) $\sigma_i \in C^1(\mathbb{R}), \sigma_i'(s) \geqslant C_0$, 且

$$|\sigma_i(s)| \geqslant C_1|s|^{\alpha+1}, \quad |s| \geqslant M_1,$$
$$|\sigma_i(s)| \leqslant C_2(1+|s|^{\alpha+1}), \quad s\in\mathbb{R}, \quad i=1,2,\cdots,N.$$

此处和以后的 C_0 是一常数, $\alpha \geqslant 0$, M_i 和 $C_i(i=1,2,\cdots)$ 是正常数, 特别地, 当 $\alpha=0, k_0=\min\{C_0,0\}$ 时, $C_1>-k_0$.

(ii) $f\in C(\mathbb{R})$ 和下列两个条件之一成立:

(ii$_1$) $f(s)s \geqslant -C_3(s^2+1), |f(s)| \leqslant C_4(1+|s|^{\beta+1}), s\in\mathbb{R}$, 其中 $0\leqslant\beta\leqslant\dfrac{4}{N}(\alpha+2\geqslant N)$; $0\leqslant\beta\leqslant\dfrac{4}{N}, \beta+2<\dfrac{N(\alpha+2)}{N-\alpha-2}(\alpha+2<N)$.

(ii$_2$) $f(s)s\geqslant 0, |f(s)|\leqslant C_4(1+|s|^{\beta+1}), s\in\mathbb{R}$; $|f(s)|\geqslant C_5|s|^{\beta+1}, |s|\geqslant M_2$, 其中 $0\leqslant\beta<\infty(\alpha+2\geqslant N); \beta+2<\dfrac{N(\alpha+2)}{N-\alpha-2}(\alpha+2<N)$.

(iii) $g\in C(\mathbb{R}), |g(s)|\leqslant C_6(|s|^{\gamma+1}+1), s\in\mathbb{R}$, 其中 $0\leqslant\gamma<\alpha(\alpha+2\geqslant N); 0\leqslant\gamma<\alpha, \gamma+1\leqslant\dfrac{N(\alpha+2)(\beta+1)}{(N-\alpha-2)(\beta+2)}(\alpha+2<N)$.

(iv) $u_0\in W_0^{1,\alpha+2},\ u_1\in L^2(\Omega)$,

则对于任意的 $T>0$, 问题 (2.7.1)–(2.7.3) 在 $[0.T]$ 上存在弱解 u, 且具有下列性质:

如果条件 (ii$_1$) 成立,

$$u\in U=L^\infty([0,T];W_0^{1,\alpha+2}(\Omega))\cap W^{1,\infty}([0,T];L^2(\Omega))\cap H^1([0,T];H_0^1(\Omega));$$

如果条件 (ii$_2$) 成立,

$$u\in U\cap W^{1,\beta+2}([0,T];L^{\beta+2}(\Omega)).$$

为了证明定理 2.7.1, 引入下面的引理.

引理 2.7.1 [86] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的任意有界区域, $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一正常数 N_ε, 使得对于所有的 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)(2 \leqslant p < \infty)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}(u, w_k)^2\right)^{1/2} + \varepsilon\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

定理 2.7.1 的证明 由假定 (ii), (iii) 和 Sobolev 嵌入定理知

$$W_0^{1,\alpha+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{(\gamma+1)(\beta+2)'}(\Omega), \quad L^{\alpha+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\gamma+2}(\Omega), \quad W_0^{1,\alpha+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta+2}(\Omega). \tag{2.7.4}$$

令 $\tilde{\sigma}_i(s) = \sigma_i(s) - \sigma_i(0) - k_0 s$. 显然 $\tilde{\sigma}_i \in C^1(\mathbb{R})$, $\tilde{\sigma}_i(0) = 0$, $\tilde{\sigma}_i'(s) \geqslant 0$, 且根据假定 (i)

$$\begin{aligned}
&|\tilde{\sigma}_i(s)| \geqslant \frac{C_1}{2}|s|^{\alpha+1}, \quad |s| \geqslant M_3, \\
&|\tilde{\sigma}_i(s)| \leqslant C_7(1 + |s|^{\alpha+1}), \quad s \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \cdots, N.
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

方程 (2.7.1) 等价于下列方程

$$u_{tt} - \Delta u_t - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{\sigma}_i(u_{x_i}) - k_0\Delta u + f(u_t) = g(u). \tag{2.7.6}$$

第一步, Galerkin 近似和先验估计.

令 $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $W_0^{1,\alpha+2}(\Omega)$ 中的一基, 它在 $L^2(\Omega)$ 中正交. 设

$$u^n(t) = \sum_{k=1}^{n} T_{kn}(t) w_k,$$

其中系数 $T_{kn}(t)$ 满足下列方程组:

$$\begin{aligned}
&(u_{tt}^n(t), w_k) + (\nabla u_t^n(t), \nabla w_k) + \sum_{i=1}^{N}(\tilde{\sigma}_i(u_{x_i}^n(t)), w_{kx_i}) + k_0(\nabla u^n(t), \nabla w_k) \\
&\quad + (f(u_t^n(t)), w_k) = (g(u^n(t)), w_k), \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n,
\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

$$\begin{aligned}
&u^n(0) = u_0^n \to u_0 \text{ 在 } W_0^{1,\alpha+2}(\Omega) \text{ 中强收敛}, \\
&u_t^n(0) = u_1^n \to u_1 \text{ 在 } L^2(\Omega) \text{ 中强收敛}.
\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

由 $\tilde{\sigma}_i'$ $(i = 1, \cdots, N)$, f 和 g 的连续性, 方程组 (2.7.7), (2.7.8) 对于所有 n 在某区间 $(0, T_n)$ 上存在解. 对于所有的 n, 取 $T_n = T$ 之一作估计.

为了简单起见, 我们用 C, M 和 $C_i(i = 7, 8, \cdots)$ 表示不依赖于 n 的不同的正常数. 在式 (2.7.7) 中用 u_t^n 代替 w_k, 并进行分部积分, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\int_0^{u_{x_i}^n(t)} \tilde{\sigma}_i(s)dsdx - \int_\Omega\int_0^{u^n(t)} g(s)dsdx\right) \\
&\quad + \|\nabla u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -(f(u_t^n(t)), u_t^n(t)) - k_0(\nabla u^n(t), \nabla u_t^n(t)).
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

应用式 (2.7.5), $|s|^{\alpha+1} \leqslant \dfrac{2}{C_1}|\tilde{\sigma}_i(s)| + M_3^{\alpha+1}(s \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, N)$, 由此推出, 当 $s < 0$ 时, $|s|^{\alpha+1} \leqslant \dfrac{-2}{C_1}\tilde{\sigma}_i(s) + M_3^{\alpha+1}$ 和

$$\int_s^0 |\tau|^{\alpha+1}d\tau \leqslant \frac{2}{C_1}\int_0^s \tilde{\sigma}_i(\tau)d\tau + M_3^{\alpha+1}|s|, \quad i = 1, \cdots, N.$$

所以对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 利用 Young 不等式, 有

$$\frac{1}{\alpha+2}|s|^{\alpha+2} = \left|\int_0^s |\tau|^{\alpha+1}d\tau\right| \leqslant \frac{2}{C_1}\int_0^s \tilde{\sigma}_i(\tau)d\tau + \frac{1}{2(\alpha+2)}|s|^{\alpha+2} + C_8, \quad (2.7.10)$$

应用式 (2.7.10), Poincaré 不等式和式 (2.7.5) 得

$$2\sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}^n(t)} \tilde{\sigma}_i(s)dsdx \geqslant C_9\|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+2} - C_{10}, \quad (2.7.11)$$

$$2\sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{0x_i}^n} \tilde{\sigma}_i(s)dsdx \leqslant C_{11}(1 + \|u_0^n\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+2}). \quad (2.7.12)$$

根据假定 (iii), Young 不等式和式 (2.7.4) 知

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega \int_0^{u^n(t)} g(s)dsdx &\leqslant 2C_6\int_\Omega \left(|u^n(t)| + \frac{1}{\gamma+2}|u^n(t)|^{\gamma+2}\right)dx \\ &\leqslant \frac{C_9}{2}\|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+2} + C_{12}. \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

由假定 (ii_1)

$$(f(u_t^n(t)), u_t^n(t)) \geqslant -C_3(\|u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\Omega|). \quad (2.7.14)$$

由假定 (ii_2)

$$(f(u_t^n(t)), u_t^n(t)) \geqslant C_5(\|u_t^n(t)\|_{L^{\beta+2}(\Omega)}^{\beta+2} - M_2^{\beta+2}|\Omega|). \quad (2.7.15)$$

显然,

$$-k_0(\nabla u^n(t), \nabla u_t^n(t)) \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{14}(1 + \|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+2}). \quad (2.7.16)$$

(1) 如果假定 (ii_1) 成立, 在 $(0, t)$ 上对式 (2.7.9) 积分, 并将式 (2.7.11)–(2.7.14) 和式 (2.7.16) 代入, 有

$$\begin{aligned} &\|u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_9}{2}\|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+2} + \int_0^t \|\nabla u_t^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ \leqslant{}& \|u_1^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{15}(\|u_0\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+2} + 1) \\ &+ C_{16}\int_0^t (\|u_t^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^n(\tau)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+2} + 1)d\tau, \end{aligned}$$

$$\|u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+2} + \int_0^t \|\nabla u_t^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leqslant M, \quad t \in [0,T]. \quad (2.7.17)$$

(2) 如果假定 (ii_2) 成立, 利用上述同样的方法和应用式 (2.7.11)–(2.7.13), (2.7.15) 和式 (2.7.16), 得

$$\begin{aligned}&\|u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+2}\\ &+ \int_0^t (\|u_t^n(\tau)\|_{L^{\beta+2}(\Omega)}^{\beta+2} + \|\nabla u_t^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2) d\tau \leqslant M, \quad t \in [0,T]. \quad (2.7.18)\end{aligned}$$

定义算子 $B: W_0^{1,\alpha+2}(\Omega) \mapsto W^{-1,(\alpha+2)'}(\Omega)$ 如下: 对于任意的 $u, v \in W_0^{1,\alpha+2}(\Omega)$,

$$(Bu, v) = \sum_{i=1}^N (\tilde{\sigma}_i(u_{x_i}), v_{x_i}), \quad (2.7.19)$$

其中 $W^{-1,(\alpha+2)'}(\Omega)$ 是 $W_0^{1,\alpha+2}(\Omega)$ 的对偶空间, 则由 Hölder 不等式, 式 (2.7.5) 和式 (2.7.17)(如果假定 (ii_1) 成立) 或式 (2.7.18)(如果假定 (ii_2) 成立) 有

$$\begin{aligned}|(Bu^n(t), v)| &\leqslant \left(\sum_{i=1}^N \|\tilde{\sigma}_i(u_{x_i}^n(t))\|_{L^{(\alpha+2)'}(\Omega)}^{(\alpha+2)'} \right)^{\frac{1}{(\alpha+2)'}} \|v\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}\\ &\leqslant C(1 + \|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+1}) \|v\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)},\\ \|Bu^n(t)\|_{W^{-1,(\alpha+2)'}(\Omega)} &\leqslant C(1 + \|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\alpha+1}) \leqslant M, \quad t \in [0,T]. \quad (2.7.20)\end{aligned}$$

如果假定 (ii_1) 成立, 应用 Gagliardo-Nirenberg 不等式和式 (2.7.17), 有

$$\begin{aligned}\int_0^t \|f(u_t^n(\tau))\|_{L^{(\beta+2)'}(\Omega)}^{(\beta+2)'} d\tau &\leqslant C \int_0^t (1 + \|u_t^n(\tau)\|_{L^{\beta+2}(\Omega)}^{\beta+2}) d\tau\\ &\leqslant C \int_0^t (1 + \|u_t^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^{\beta+2-N\beta/2} \|\nabla u_t^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^{N\beta/2}) d\tau\\ &\leqslant C \int_0^t (1 + \|\nabla u_t^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2) d\tau\\ &\leqslant M, \quad t \in [0,T]. \quad (2.7.21)\end{aligned}$$

如果假定 (ii_2) 成立, 应用式 (2.7.18), 有

$$\int_0^t \|f(u_t^n(\tau))\|_{L^{(\beta+2)'}(\Omega)}^{(\beta+2)'} d\tau \leqslant C \int_0^t (1 + \|u_t^n(\tau)\|_{L^{\beta+2}(\Omega)}^{\beta+2}) d\tau \leqslant M, \quad t \in [0,T]. \quad (2.7.22)$$

应用假定 (iii), 式 (2.7.4), (2.7.17) 或式 (2.7.18), 有

$$\begin{aligned}\|g(u^n(t))\|_{L^{(\beta+2)'}(\Omega)}^{(\beta+2)'} &\leqslant C(1 + \|u^n(t)\|_{L^{(\gamma+1)(\beta+2)'}(\Omega)}^{(\gamma+1)(\beta+2)'})\\ &\leqslant C(1 + \|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{(\gamma+1)(\beta+2)'}) \leqslant M, \quad t \in [0,T]. \quad (2.7.23)\end{aligned}$$

在式 (2.7.7) 中用 $v \in W_0^{1,\alpha+2}(\Omega)$ 代替 w_k, 并应用 Hölder 不等式, 式 (2.7.4), (2.7.20)–(2.7.23), 得

$$\begin{aligned}
|(u_{tt}^n(t), v)| \leqslant {} & C(\|\nabla u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|Bu^n(t)\|_{W^{-1,(\alpha+2)'}(\Omega)} \\
& + \|\nabla u^n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(u_t^n(t))\|_{L^{(\beta+2)'}(\Omega)} \\
& + \|g(u^n(t))\|_{L^{(\beta+2)'}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}, \quad \forall v \in W_0^{1,\alpha+2}, \\
\|u_{tt}^n(t)\|_{W^{-1,(\alpha+2)'}(\Omega)} \leqslant {} & C(\|\nabla u_t^n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(u_t^n(t))\|_{L^{(\beta+2)'}(\Omega)} + 1), \\
\int_0^t \|u_{tt}^n(\tau)\|_{W^{-1,(\alpha+2)'}(\Omega)}^{(\beta+2)'} d\tau \leqslant {} & C\int_0^t (\|\nabla u_t^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f(u_t^n(\tau))\|_{L^{(\beta+2)'}(\Omega)}^{(\beta+2)'} + 1)d\tau \\
\leqslant {} & M, \quad t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{2.7.24}$$

第二步, 极限过程.

利用式 (2.7.17), (2.7.18), (2.7.20)–(2.7.24), 可以从 $\{u^n\}$ 中抽出一子序列, 仍记为 $\{u^n\}$, 使得当 $n \to \infty$ 时,

在 $L^\infty([0,T]; W_0^{1,\alpha+2}(\Omega))$ 中, u^n 弱 $*$ 收敛于u, (2.7.25)

如果假定 (ii$_1$) 成立, 在 $L^\infty([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T]; H_0^1(\Omega))$ 中 u_t^n 弱 $*$ 收敛于 u_t, (2.7.26)

如果假定 (ii$_2$) 成立, 在 $L^\infty([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T]; H_0^1) \cap L^{\beta+2}(Q_T)$ 中 u_t^n 弱 $*$ 收敛于 u_t, (2.7.27)

在 $L^\infty([0,T]; W^{-1,(\alpha+2)'}(\Omega))$ 中 Bu^n 弱 $*$ 收敛于 ξ, (2.7.28)

在 $L^{(\beta+2)'}(Q_T)$ 中 $f(u_t^n)$ 弱 $*$ 收敛于 η, (2.7.29)

在 $L^\infty([0,T]; L^{(\beta+2)'}(\Omega))$ 中 $g(u^n)$ 弱 $*$ 收敛于 χ, (2.7.30)

在 $L^{(\beta+2)'}([0,T]; W^{-1,(\alpha+2)'}(\Omega))$ 中 u_{tt}^n 弱 $*$ 收敛于 u_{tt}. (2.7.31)

根据引理 2.7.1, 式 (2.7.25) 和式 (2.7.26) 或式 (2.7.27), 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在分别不依赖于 u^n 和 u_t^n 的正常数 $N_{1\varepsilon}$ 和 $N_{2\varepsilon}$, 使得, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\|u^n(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{N_{1\varepsilon}} (u^n - u, w_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\|u^n(t) - u(t)\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant M\varepsilon, \quad t \in [0, T],$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \|u_t^n(\tau) - u_t(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\
\leqslant {} & 2\left(\sum_{k=1}^{N_{2\varepsilon}} \int_0^T (u_t^n(\tau) - u_t(\tau), w_k)^2 d\tau + \varepsilon^2 \int_0^T \|u_t^n(\tau) - u_t(\tau)\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 d\tau\right) \\
\leqslant {} & M\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{2.7.32}$$

由 ε 的任意性知,

在 $L^\infty([0,T]; L^2(\Omega))$ 中 u^n 强收敛于 u, 且在 Q_T 上几乎处处收敛,

在 $L^2(Q_T)$ 中 u_t^n 强收敛于 u_t, 且在 Q_T 上几乎处处收敛. (2.7.33)

从式 (2.7.25), (2.7.26) 或式 (2.7.27) 和式 (2.7.31) 推出, 当 $n \to \infty$ 时, 在 $L^2[0,T]$ 中 (u^n, w_k) 弱收敛于 (u, w_k),

在 $L^2[0,T]$ 中 (u_t^n, w_k) 弱收敛于 (u_t, w_k),

在 $L^{(\beta+2)'}[0,T]$ 中, (u_{tt}^n, w_k) 弱收敛于 $(u_{tt}, w_k), k = 1, 2, \cdots$. (2.7.34)

注意到 $H^1[0,T] \hookrightarrow C[0,T]$ 和 $W^{1,(\beta+2)'}[0,T] \hookrightarrow C[0,T]$, 由式 (2.7.33) 有

$$(u^n(0), w_k) \to (u(0), w_k), \quad (u_t^n(0), w_k) \to (u_t(0), w_k), \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.7.35}$$

因此,

在 $W_0^{1,\alpha+2}(\Omega)$ 中 $u(0) = u_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_t(0) = u_1$. (2.7.36)

在式 (2.7.7) 中令 $n \to \infty$, 由式 (2.7.25)–(3.7.31) 推出, 对于所有 $v \in L^{\beta+2}([0,T]; W_0^{1,\alpha+2}(\Omega)) (\subset L^{\beta+2}(Q_T))$,

$$\int_0^T [(u_{tt}, v) + (\nabla u_t, \nabla v) + k_0(\nabla u, \nabla v) + (\xi, v) + (\eta, v) - (\chi, v)]dt = 0,$$

即 u 在 $L^{(\beta+2)'}([0,T]; W^{-1,(\alpha+2)'}(\Omega))$ 中满足方程

$$u_{tt} - \Delta u_t - k_0 \Delta u + \xi + \eta - \chi = 0. \tag{2.7.37}$$

现在, 证明 $\eta = f(u_t), \chi = g(u)$ 且 $\xi = Bu$, 由式 (2.7.37) 和式 (2.7.36) 得定理 2.7.1 的论断.

由 $f(s)$ 的连续性和式 (2.7.33) 知, 在 Q_T 上几乎处处 $f(u_t^n) \to f(u_t)$. 所以根据 Egoroff 定理, 对于任意的 $\delta > 0$, 存在一可测集合 $Q \subset Q_T$, 使得 $|Q| < \delta$, 其中 $|Q|$ 是 Q 的测度, 且当 $n \to \infty$ 时, 在 Q_δ 上一致地 $f(u_t^n) \to f(u_t)$, 其中 $Q_\delta = Q_T - Q$. 如果假定 (ii$_1$) 成立, 则由式 (2.7.26) 知 $u_t \in L^\infty([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T]; H_0^1(\Omega))$. 在式 (2.7.21) 中 $f(u_t^n), u_t^n$, 和 ∇u_t^n 分别由 $f(u_t), u_t$ 和 ∇u_t 代入, 给出 $f(u_t) \in L^{(\beta+2)'}(Q_T)$. 如果假定 (ii$_2$) 成立, 则由式 (2.7.27) 知 $u_t \in L^{\beta+2}(Q_T)$. 所以不等式 $|f(u_t)| \leqslant C_4(1 + |u_t|^{\beta+1})$ 意味着 $f(u_t) \in L^{(\beta+2)'}(Q_T)$. 因此, 对于任意的 $\beta_1 : \beta_1 > \beta$, 根据嵌入定理和式 (2.7.29) 知

$$\|f(u_t^n) - f(u_t)\|_{L^{(\beta_1+2)'}(Q)} \leqslant \|f(u_t^n) - f(u_t)\|_{L^{(\beta+2)'}(Q)} \delta^{\frac{\beta_1 - \beta}{(\beta+1)(\beta_1+1)}} \leqslant C\delta^{\frac{\beta_1 - \beta}{(\beta+1)(\beta_1+1)}}. \tag{2.7.38}$$

当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned} &\|f(u_t^n) - f(u_t)\|_{L^{(\beta_1+2)'}(Q_T)} \\ \leqslant &\|f(u_t^n) - f(u_t)\|_{L^{(\beta_1+2)'}(Q)} + \|f(u_t^n) - f(u_t)\|_{L^{(\beta_1+2)'}(Q_\delta)} \\ \leqslant &C\delta^{\frac{\beta_1 - \beta}{(\beta+1)(\beta_1+1)}}. \end{aligned} \tag{2.7.39}$$

由 δ 的任意性知,

在 $L^{(\beta_1+2)'}(Q_T)$ 中 $f(u_t^n) \to f(u_t)$ 是强收敛. (2.7.40)

由式 (2.7.40), (2.7.29) 和弱 * 极限的唯一性, 看出在 $L^{(\beta_1+2)'}(Q_T)$ 中 $\eta = f(u_t)$.

因为 $C_c^\infty(Q_T)$ 在 $L^{\beta+2}(Q_T)$ 中稠密, 对于任意的 $\varphi \in L^{\beta+2}(Q_T)$, 存在一序列 $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in C_c^\infty(Q_T)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 使得在 $L^{\beta+2}(Q_T)$ 中 $\varphi_n \to \varphi$ 是强收敛, 且当 $n \to \infty$ 时,

$$\left|\int_0^T (f(u_t) - \eta, \varphi_n - \varphi) d\tau\right| \leqslant \|f(u_t) - \eta\|_{L^{(\beta+2)'}(Q_T)} \|\varphi_n - \varphi\|_{L^{\beta+2}(Q_T)} \to 0. \tag{2.7.41}$$

所以

$$\int_0^T (f(u_t) - \eta, \varphi) d\tau = \lim_{n\to\infty} \int_0^T (f(u_t) - \eta, \varphi_n) d\tau = 0,$$

在 $L^{(\beta+2)'}(Q_T)$ 中 $f(u_t) = \eta$. (2.7.42)

由式 (2.7.33), (2.7.23) 和式 (2.7.30), 应用上面同样的方法, 易得对于任意的 $\gamma_1 > \gamma$, 当 $n \to \infty$ 时,

在 $L^{(\gamma_1+2)'}(\Omega)$ 中 $g(u^n(t)) \to g(u(t))$ 是强收敛,

在 $L^{(\gamma+2)'}(\Omega)$ 中 $g(u(t)) = \chi(t)$, $t \in [0, T]$. (2.7.43)

应用单调性方法证明 $\xi = Bu$ 如下.

显然, 由式 (2.7.19) 定义的算子 B 是单调且半连续的, 即对于任意的 $u, v, w \in W_0^{1,\alpha+2}(\Omega)$, $(Bu - Bv, u - v) \geqslant 0$; 且映射 $s \mapsto (B(u + sv), w)$ 是一从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射.

事实上, 不失一般性, 我们假定 $|s| < 1$. 因为当 $s \to 0$ 时, 在 Ω 上几乎处处有 $u_{x_i} + sv_{x_i} \to u_{x_i}$, 根据 $\sigma_i(s)$ 的连续性, 当 $s \to 0$ 时, 在 Ω 上几乎处处有 $\sigma_i(u_{x_i} + sv_{x_i}) \to \sigma_i(u_{x_i})(i = 1, 2, \cdots, N)$. 根据假定 (i) 得

$$|\sigma_i(u_{x_i} + sv_{x_i}) - \sigma_i(u_{x_i})|^{(\alpha+2)'} \leqslant C(|u_{x_i}|^{\alpha+2} + |v_{x_i}|^{\alpha+2} + 1) \quad (i = 1, \cdots, N).$$

所以应用 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\begin{aligned} |(B(u + sv) - Bu, w)| &\leqslant \sum_{i=1}^N |(\sigma_i(u_{x_i} + sv_{x_i}) - \sigma_i(u_{x_i}), w_{x_i})| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^N \|\sigma_i(u_{x_i} + sv_{x_i}) - \sigma(u_{x_i})\|_{L^{(\alpha+2)'}(\Omega)} \|w\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)} \to 0 \quad (s \to 0). \end{aligned}$$

对于任意的 $v \in L^{\beta+2}([0, T]; W_0^{1,\alpha+2})$,

$$\xi_n(t) = \int_0^t (Bu^n(\tau) - Bv(\tau), u^n(\tau) - v(\tau))\, d\tau \geqslant 0, \quad t \in [0, T]. \tag{2.7.44}$$

在式 (2.7.7) 中 w_k 用 u^n 代替, 并在 $(0,t)$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^t (Bu^n(\tau),u^n(\tau))d\tau = &-\int_0^t (u_{tt}^n(\tau),u^n(\tau))d\tau - \frac{1}{2}\|\nabla u^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &- k_0\int_0^t \|\nabla u^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - \int_0^t (f(u_t^n(\tau)),u^n(\tau))d\tau \\ &+ \int_0^t (g(u^n(\tau)),u^n(\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{2.7.45}$$

应用式 (2.7.33), (2.7.26) 或式 (2.7.27), 当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\int_0^t (u_{tt}^n(\tau),u^n(\tau))d\tau &= (u_t^n(t),u^n(t)) - (u_1^n,u_0^n) - \int_0^t \|u_t^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ &\to (u_t(t),u(t)) - (u_1,u_0) - \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ &= \int_0^t (u_{tt}(\tau),u(\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{2.7.46}$$

如果选择一实数 $\beta_1:\beta+2<\beta_1+2\leqslant\dfrac{N(\alpha+2)}{N-\alpha-2}(\alpha+2<N);\beta<\beta_1(\alpha+2\geqslant N)$, 则 $W_0^{1,\alpha+2}(\Omega)\hookrightarrow L^{\beta_1+2}(\Omega)$. 所以由式 (2.7.25) 得

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u^n(\tau)\|_{L^{\beta_1+2}(\Omega)}^{\beta_1+2}d\tau &\leqslant C\int_0^T \|u^n(\tau)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\beta_1+2}d\tau \\ &\leqslant C\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(\Omega)}^{\beta_1+2}\right)T\leqslant M, \end{aligned} \tag{2.7.47}$$

在 $L^{\beta_1+2}(Q_T)$ 中 $u^n\to u$ 是弱 * 收敛.

由式 (2.7.40) 和式 (2.7.47) 推出, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\int_0^t (f(u_t^n),u^n)d\tau \to \int_0^t (f(u_t),u)d\tau. \tag{2.7.48}$$

如果选择一实数 $\gamma_1:\gamma+2<\gamma_1+2\leqslant\dfrac{N(\alpha+2)}{N-\alpha-2}(\alpha+2<N);\gamma<\gamma_1(\alpha+2\geqslant N)$, 则 $W_0^{1,\alpha+2}\hookrightarrow L^{\gamma_1+2}(\Omega)$. 所以由式 (2.7.25) 和式 (2.7.43) 知, 对于几乎处处 $t\in[0,T]$, 在 $L^{\gamma_1+2}(\Omega)$ 中 $u^n(t)\to u(t)$ 是弱 * 收敛,

$$(g(u^n(t)),u^n(t))\to(g(u(t)),u(t)). \tag{2.7.49}$$

由假定 (iii), 式 (2.7.17) 或式 (2.7.18) 知

$$\begin{aligned}|(g(u^n),u^n)| &\leqslant \|g(u^n(t))\|_{L^{(\gamma+2)'}(\Omega)}\|u^n(t)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)} \\ &\leqslant C(1+\|u^n(t)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)}^{\gamma+1})\|u^n(t)\|_{L^{\gamma+2}(\Omega)} \\ &\leqslant M,\quad t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{2.7.50}$$

又由式 (2.7.49), (2.7.50) 和 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\int_0^t (g(u^n), u^n)d\tau \to \int_0^t (g(u), u)d\tau, \quad t \in [0, T]. \tag{2.7.51}$$

对式 (2.7.45) 取极限, 并应用式 (2.7.46), (2.7.48), (2.7.51) 和式 (2.7.37) 给出

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup \int_0^t (Bu^n(\tau), u^n(\tau))d\tau \\
\leqslant & -\int_0^t (u_{tt}(\tau), u(\tau))d\tau - \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& - k_0\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau - \int_0^t (f(u_t(\tau)), u(\tau))d\tau + \int_0^t (g(u(\tau)), u(\tau))d\tau \\
= & \int_0^t (\xi(\tau), u(\tau))d\tau.
\end{aligned} \tag{2.7.52}$$

应用式 (2.7.52), (2.7.25) 和式 (2.7.27) 得

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \xi_n(t) \leqslant \int_0^t (\xi(\tau) - Bv(\tau), u(\tau) - v(\tau))d\tau. \tag{2.7.53}$$

在式 (2.7.53) 中选 $v = u - \lambda w$, 其中 $\lambda > 0$ 和 $w \in L^{\beta+2}([0,T]; W_0^{1,\alpha+2}(\Omega))$. 令 $\lambda \to 0$, 对任意的 $w \in L^{\beta+2}([0,T], W_0^{1,\alpha+2}(\Omega))$, 有

$$\int_0^t (\xi(\tau) - Bu(\tau), w(\tau))d\tau \geqslant 0. \tag{2.7.54}$$

因此 $\xi = Bu$. □

例 在式 (2.7.1) 中令 $\sigma_i(s) = |s|^\alpha s\ (i = 1, \cdots, N)$, $f(s) = |s|^\beta s$, $g(s) = |s|^\gamma s$, 其中 α, β 和 γ 是非负实数, 且满足 $0 \leqslant \gamma < \alpha$, $0 \leqslant \beta < \infty (\alpha + 2 \geqslant N)$,

$$0 \leqslant \gamma < \alpha, \quad \gamma + 1 \leqslant \frac{N(\alpha+2)(\beta+1)}{(N-\alpha-2)(\beta+2)}, \quad \beta + 2 < \frac{N(\alpha+2)}{N-\alpha-2}\ (\alpha + 2 < N),$$

则方程 (2.7.1) 变为

$$u_{tt} - \Delta u_t - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(|u_{x_i}|^\alpha u_{x_i}) + |u_t|^\beta u_t = |u|^\gamma u. \tag{2.7.55}$$

如果选初值函数 $u_0 \in W_0^{1,\alpha+2}(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$, 则经过简单验证指出, 定理 2.7.1 的条件 (i), (ii$_2$), (iii) 和 (iv) 满足 (其中 $C_1 = C_2 = C_4 = C_5 = C_6 = 1, C_0 = M_2 = 0$). 所以根据定理 2.7.1, 对于任意的 $T > 0$, 对应的问题 (2.7.55), (2.7.2), (2.7.3) 存在唯一的整体弱解 $u \in L^\infty([0,T]; W_0^{1,\alpha+2}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0,T]; L^2(\Omega)) \cap H^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\beta+2}([0,T]; L^{\beta+2}(\Omega))$.

2.7.3 整体广义解和整体古典解的存在唯一性

下面考虑 $N=1$ 的情况, 证明下列问题

$$u_{tt}-u_{xxt}-\sigma(u_x)_x+f(u_t)=g(u),\quad 0<x<1,\quad t>0, \tag{2.7.56}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{2.7.57}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{2.7.58}$$

存在唯一整体广义解和唯一整体古典解.

定理 2.7.2 设定理 2.7.1 的条件 (i), (ii$_1$) 和 (iii) 成立, 其中 $\sigma_i(s)=\sigma(s), 0\leqslant\beta\leqslant 2, 0\leqslant\gamma<\alpha$.

(1) 如果 f,g 和 σ 是局部 Lipschitz 连续并对于任意的 $T>0, u_0,u_1\in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$, 则问题 (2.7.56)–(2.7.58) 存在唯一广义解

$$u\in W^{1,\infty}([0,T];H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))\cap W^{2,\infty}([0,T];L^2(0,1))\cap H^2([0,T];H_0^1(0,1)).$$

(2) 如果对任意的 $T>0$, $\sigma\in C^3(\mathbb{R}), f\in C^2(\mathbb{R}), g\in C^2(\mathbb{R})$, $u_0,u_1\in H^4(0,1)\cap H_0^1(0,1)$, 则问题 (2.7.56)–(2.7.58) 存在唯一古典解

$$u\in H^3([0,T];H_0^1(0,1))\cap H^2([0,T];H^3(0,1)\cap H_0^1(0,1)).$$

证明 令 $\tilde\sigma(s)=\sigma(s)-\sigma(0)-k_0 s$, 其中 $k_0=\min\{C_0,0\}(\leqslant 0)$, 则 $\tilde\sigma(0)=0$, $\tilde\sigma'(s)\geqslant 0$ 和对任意的 $s\in\mathbb{R}$, $\int_0^s\tilde\sigma(\tau)d\tau\geqslant 0$. 再令 w_k 是特征值问题

$$w''+\lambda w=0,\quad w(0)=w(1)=0$$

的特征值 $\lambda_k(k=1,2,\cdots)$ 对应的特征函数, 则 $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ 构成 $L^2(0,1)$ 中的一正交基, 在 $H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$ 中也一样. 置

$$u^n(t)=\sum_{k=1}^n T_{kn}(t)w_k,$$

其中系数 $T_{kn}(t)$ 满足下列方程组

$$\begin{aligned}&(u_{tt}^n(t),w_k)-(u_{xxt}^n(t),w_k)-(\sigma(u_x^n(t))_x,w_k)+(f(u_t^n(t)),w_k)\\&=(g(u^n(t)),w_k),\quad t>0,\quad 1\leqslant k\leqslant n,\end{aligned} \tag{2.7.59}$$

$$\text{在 } H^2(0,1)\cap H_0^1(\Omega) \text{ 中}, u^n(0)=u_0^n\to u_0, u_t^n(0)=u_1^n\to u_1. \tag{2.7.60}$$

在式 (2.7.59) 中用 $u_t^n(t)$ 代替 w_k, 用 $\tilde\sigma(u_x^n(t))_x+k_0u_{xx}^n(t)$ 代替 $\sigma(u_x^n(t))_x$, 进行分部积分并应用定理 2.7.1 中的假定 (ii$_1$) 给出

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\|u_t^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_x^n(t)\|^2_{L^2(0,1)})+\int_0^1\int_0^{u_x^n(t)}\tilde{\sigma}(s)dsdx\right.\\&\left.-\int_0^1\int_0^{u^n(t)}g(s)dsdx\right]+\|u_{xt}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}\\=&-(f(u_t^n(t)),u_t^n(t))+(1-k_0)(u_x^n(t),u_{xt}^n(t))\\\leqslant&\frac{1}{2}\|u_{xt}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+C(\|u_t^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_x^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+1).\end{aligned}\tag{2.7.61}$$

利用式 (2.7.11)($N=1$) 和式 (2.7.13) 知

$$2\int_0^1\int_0^{u_x^n}\tilde{\sigma}(s)dsdx-2\int_0^1\int_0^{u^n}g(s)dsdx\geqslant\frac{C_9}{2}\|u^n(t)\|^{\alpha+2}_{W^{1,\alpha+2}(0,1)}-C.\tag{2.7.62}$$

因此, 对式 (2.7.61) 应用 Gronwall 不等式, 式 (2.7.62), (2.7.12) 和式 (2.7.13), 得

$$\begin{aligned}&\|u_t^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_x^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u^n(t)\|^{\alpha+2}_{W^{1,\alpha+2}(0,1)}+\int_0^T\|u_{xt}^n(\tau)\|^2_{L^2(0,1)}d\tau\leqslant M,\\&\|u^n(t)\|_{C[0,1]}\leqslant M,\quad t\in[0,T].\end{aligned}\tag{2.7.63}$$

在式 (2.7.59) 中用 $-u_{xx}^n$ 代替 w_k, 注意到 $\sigma(u_x^n(t))_x=\tilde{\sigma}(u_x^n(t))_x+k_0u_{xx}^n(t)$ 知

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_{xx}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}-(u_t^n(t),u_{xx}^n(t))\right]\leqslant&(f(u_t^n(t)),u_{xx}^n(t))-(g(u^n(t)),u_{xx}^n(t))\\&-k_0\|u_{xx}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_{xt}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}.\end{aligned}\tag{2.7.64}$$

加 2 倍的不等式 (2.7.61) 到 ε 倍的式 (2.7.64), 可见

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\|u_t^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_x^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+\frac{\varepsilon}{2}\|u_{xx}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}-\varepsilon(u_t^n(t),u_{xx}^n(t))\right.\\&\left.+2\int_0^1\int_0^{u_x^n(t)}\tilde{\sigma}(s)dsdx-2\int_0^1\int_0^{u^n(t)}g(s)dsdx\right]+\|u_{xt}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}\\\leqslant&C(\|u_t^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_x^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+1)\\&+\varepsilon[\|f(u_t^n(t))\|^2_{L^2(0,1)}+\|g(u^n(t))\|^2_{L^2(0,1)}\\&+(1-k_0)\|u_{xx}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_{xt}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}].\end{aligned}\tag{2.7.65}$$

应用定理 2.7.1 的假定 (ii_1), Gagliardo-Nirenberg 插值定理和式 (2.7.63) 知

$$\begin{aligned}\|f(u_t^n(t))\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant&C(1+\|u_t^n(t)\|^{2\beta+2}_{L^{2\beta+2}(0,1)})\\\leqslant&C(1+\|u_t^n(t)\|^{\beta+2}_{L^2(0,1)}\|u_{xt}^n(t)\|^{\beta}_{L^2(0,1)})\\\leqslant&C(1+\|u_{xt}^n(t)\|^2_{L^2(0,1)}),\end{aligned}$$

$$\|g(u^n(t))\|_{L^2(0,1)}^2 \leqslant M, \quad t \in [0,T]. \tag{2.7.66}$$

注意到

$$(u_t^n(t), u_{xx}^n(t)) \leqslant \frac{1}{4}\|u_{xx}^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_t^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2,$$

将式 (2.7.66) 代入式 (2.7.65), 在 $(0,t)$ 上对所得的表达式积分, 利用式 (2.7.62), 并选择 ε, 使得 $0 < (1+C)\varepsilon \leqslant 1/2$ 给出

$$\begin{aligned}
&(1-\varepsilon)\|u_t^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_x^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{C_9}{2}\|u^n(t)\|_{W^{1,\alpha+2}(0,1)}^{\alpha+2} \\
&+ \frac{\varepsilon}{4}\|u_{xx}^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_{xt}^n(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \\
&\leqslant C + C\int_0^t (\|u_t^n(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_x^n(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_{xx}^n(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 + 1)d\tau, \quad t \in [0,T],
\end{aligned}$$

这就推出

$$\begin{aligned}
&\|u_t^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u^n(t)\|_{W^{2,2}(0,1)}^2 + \int_0^t \|u_{xt}^n(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \leqslant M, \\
&\|u^n(t)\|_{C^1[0,1]} \leqslant M, \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{2.7.67}$$

在式 (2.7.59) 中以 $-u_{xxt}^n$ 代替 w_k, 进行分部积分和应用式 (2.7.66), 式 (2.7.67) 得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xt}^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_{xxt}^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|u_{xxt}^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + C\Big(\|f(u_t^n(t))\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\quad + \|g(u^n(t))\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\sigma'(u_x^n(t))\|_{L^\infty}^2\|u_{xx}^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|u_{xxt}^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + C(\|u_{xt}^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + 1), \quad t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{2.7.68}$$

$$\|u_{xt}^n(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|u_{xxt}^n(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \leqslant M, \quad \|u_t^n(t)\|_{C[0,1]} \leqslant M, \quad t \in [0,T]. \tag{2.7.69}$$

由式 (2.7.67) 和式 (2.7.69) 易知

$$\|u^n\|_{W^{1,\infty}([0,T];H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))} + \|u^n\|_{W^{2,\infty}([0,T];L^2(0,1))} + \|u^n\|_{H^2([0,T];H_0^1(0,1)} \leqslant M. \tag{2.7.70}$$

应用式 (2.7.70), 可以从 $\{u^n\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{u^n\}$, 使得, 当 $n \to \infty$ 时,

在 $L^\infty([0,T];H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))$ 中 $u_{t^k}^n \to u_{t^k}$ 是弱 $*$ 收敛,

在 $L^\infty([0,T];L^2(0,1))\cap L^2([0,T];H_0^1(0,1))$ 中 $u_{tt}^n \to u_{tt}$ 是弱 $*$ 收敛,

$$\text{在 } C(\bar{Q}_T) \text{ 中 } u^n \to u,\ u_x^n \to u_x,\ u_t^n \to u_t. \tag{2.7.71}$$

由式 (2.7.71), σ, f 和 g 的连续性以及 Lebesgue 控制收敛定理, 我们有, 对任意的 $t \in [0,T]$, 当 $n \to \infty$ 时, 在 $L^2(0,1)$ 中

$$f(u_t^n) \to f(u_t),\ g(u^n) \to g(u),\ \sigma(u_x^n) \to \sigma(u_x) \text{ 均为强收敛}. \tag{2.7.72}$$

在式 (2.7.59) 中令 $n \to \infty$, 由 $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $L^2(0,1)$ 中的稠密性得极限函数

$$u \in W^{1,\infty}([0,T]; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \cap W^{2,\infty}([0,T]; L^2(0,1)) \cap H^2([0,T]; H_0^1(0,1))$$

和 u 是问题 (2.7.56)–(2.7.58) 的解.

现在证明问题 (2.7.56)–(2.7.58) 广义解的唯一性. 令 $u_1, u_2 \in W^{1,\infty}([0,T]; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \cap W^{2,\infty}([0,T]; L^2(0,1)) \cap H^2([0,T]; H_0^1(0,1))$ 是问题 (2.7.56)–(2.7.58) 的两个广义解. 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足下列初边值问题

$$\begin{aligned} &w_{tt} - w_{xxt} - (\sigma(u_{1x}) - \sigma(u_{2x}))_x + f(u_{1t}) - f(u_{2t}) \\ =&g(u_1) - g(u_2), \quad 0 < x < 1, \quad t \in (0,T], \end{aligned} \tag{2.7.73}$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad t \in (0,T], \tag{2.7.74}$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2.7.75}$$

方程 (2.7.73) 两端同乘以 w_t, 在 $(0,1)$ 上分部积分, 所得结果两端各加项 $(w_x, w_{xt}) + (w, w_t)$, 并应用 σ, f 和 g 的局部 Lipschitz 连续性, 可知

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|w_x(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|w_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2\Big) + \|w_{xt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ =& -(\sigma(u_{1x}) - \sigma(u_{2x}), w_{xt}) - (f(u_{1t}) - f(u_{2t}), w_t) \\ &+ (g(u_1) - g(u_2), w_t) + (w_x, w_{xt}) + (w, w_t) \\ \leqslant& \frac{1}{2}\|w_{xt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + C\Big(\|w_x(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|w_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|w(t)\|_{L^2(0,1)}^2\Big), \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.7.76}$$

对式 (2.7.76) 应用 Gronwall 不等式, 给出

$$\|w(t)\|_{L^2(0,1)} + \|w_x(t)\|_{L^2(0,1)} + \|w_t(t)\|_{L^2(0,1)} = 0, \quad t \in [0,T].$$

所以 $u_1(t) = u_2(t)$, $t \in [0,T]$. 定理 2.7.2 的结论 (1) 成立.

在式 (2.7.70) 的基础上, 利用典型的方法易得定理 2.7.2 的结论 (2). 详细证明略去. □

2.7.4 与本节内容有关的文献

本节的内容取材于文献 [87]. 与本节有关的文献见 [88]–[92], [362].

2.8 具有粘性阻尼的拟线性波动方程的初边值问题解的爆破

2.8.1 引言

上节研究了具有粘性阻尼的 N 维拟线性波动方程初边值问题弱解的存在性. 本节讨论具有粘性阻尼的一维拟线性波动方程初边值问题局部广义解和局部古典解的存在性和唯一性, 应用常微分方程的一个不等式研究这个问题整体解的不存在性.

具体讨论下列初边值问题:

$$u_{tt} - \sigma(u_x)_x - u_{xxt} + \delta|u_t|^{p-1}u_t = \mu|u|^{q-1}u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{2.8.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2.8.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.8.3}$$

其中, $\delta > 0$, $\mu > 0$, $p \geqslant 1$, $q > 1$ 为常数, $\sigma(s)$ 为给定的非线性函数, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为给定的初值函数, $\Omega = (0,1)$.

2.8.2 问题 (2.8.1)–(2.8.3) 局部解的存在唯一性

下面应用 Galerkin 方法和紧性定理证明问题 (2.8.1)–(2.8.3) 局部广义解和局部古典解的存在性和唯一性.

令 $\{y_i(x)\}$ 是由特征值问题

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

的特征值 λ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 对应的特征函数构成的 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基.

设

$$u_{N_0}(x,t) = \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_{N_0 i}(t) y_i(x)$$

是问题 (2.8.1)–(2.8.3) 的 Galerkin 近似解, 其中 $\alpha_{N_0 i}(t)$ 是待定系数, N_0 是一个自然数. 设初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可以分别表示如下

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i y_i(x), \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i(x),$$

其中 ρ_i 和 ξ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 是常数. 将近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 代入方程 (2.8.1) 后, 所获结

果两端同乘以 $y_s(x)$, 并在 $(0,1)$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_{N_0s}+\lambda_s\dot{\alpha}_{N_0s}=&\mu(|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0},y_s)-\delta(|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0t},y_s)\\&+(\sigma(u_{N_0x})_x,y_s),\quad s=1,2,\cdots,N_0,\end{aligned}\tag{2.8.4}$$

将近似解 $u_{N_0}(x,t)$, 初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的近似

$$\varphi_{N_0}(x)=\sum_{i=1}^{N_0}\rho_i y_i(x),\quad \psi_{N_0}(x)=\sum_{i=1}^{N_0}\xi_i y_i(x)$$

代入式 (2.8.3) 后, 与 y_s 作内积知

$$\alpha_{N_0s}(0)=\rho_s,\quad \dot{\alpha}_{N_0s}(0)=\xi_s,\quad s=1,2,\cdots,N_0.\tag{2.8.5}$$

引理 2.8.1 设 $\sigma\in C^m(\mathbb{R})$, $|\sigma(s)|\leqslant K|s|^\nu$, $|\sigma'(s)|\leqslant K|s|^{\nu-1}$, 等, 其中 $p\geqslant 1$, $q>1$, 当 m 是一奇数时, $3\leqslant m\leqslant\min\{p+2,q+2\}$; 当 m 是一偶数时, $2\leqslant m\leqslant\min\{p+1,q+1\}$, $\nu\geqslant 2$ 为一自然数, K 为一正常数. 如果

$$\lim_{N_0\to\infty}E_{N_0}(0)=A=\sum_{s=1}^{\infty}[(1+\lambda_s+\lambda_s^{m-1})\xi_s^2+(1+\lambda_s+\lambda_s^2+\lambda_s^m)\rho_s^2]+1<\infty,\tag{2.8.6}$$

则常微分方程组的初值问题 (2.8.4), (2.8.5) 在 $[0,t_1]$ 上存在古典解 $\alpha(t)=(\alpha_{N_01}(t),\alpha_{N_02}(t),\cdots,\alpha_{N_0N_0}(t))$ 且

$$E_{N_0}(t)\leqslant\frac{A}{(1-(\beta-1)K_1A^{\beta-1}t)^{\frac{1}{\beta-1}}}=M\tag{2.8.7}$$

是一致有界的, 其中 $t_1>0$, $K_1>0$ 是不依赖于 M 和 N_0 的常数,

$$\beta=\max\left\{\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2},\nu,1\right\},$$

而

$$\begin{aligned}E_{N_0}(t)=&\sum_{s=1}^{N_0}[(1+\lambda_s+\lambda_s^{m-1})\dot{\alpha}_{N_0s}^2(t)+(1+\lambda_s+\lambda_s^2+\lambda_s^m)\alpha_{N_0s}^2(t)]+1\\=&(u_{N_0},u_{N_0})+(u_{N_0x},u_{N_0x})+(u_{N_0x^2},u_{N_0x^2})+(u_{N_0x^m},u_{N_0x^m})\\&+(u_{N_0t},u_{N_0t})+(u_{N_0xt},u_{N_0xt})+(u_{N_0x^{m-1}t},u_{N_0x^{m-1}t})+1.\end{aligned}\tag{2.8.8}$$

证明 初值问题 (2.8.4), (2.8.5) 是关于 $\alpha_{N_0i}(t)$, $i=1,2,\cdots,N_0$ 的二阶常微分方程组的初值问题, 且可化为等价的一阶 $2N_0$ 维常微分方程组的初值问题. 因为

非线性项是光滑的, 初值问题 (2.8.4), (2.8.5) 总存在局部解. 令 $[0, T_{N_0})$ 为解存在的最大时间区间, 容易从下列解的估计看出, T_{N_0} 有不依赖于 N_0 的正下界.

方程组 (2.8.4) 两端同乘以 $2(1+\lambda_s+\lambda_s^{m-1})\dot{\alpha}_{N_0 s}(t)$, 对于 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 所得结果两端各加上项

$$2[(u_{N_0}, u_{N_0 t}) - (u_{N_0 xx}, u_{N_0 t}) + (u_{N_0 xx}, u_{N_0 xxt}) - (-1)^{m-1}(u_{N_0 x^2}, u_{N_0 x^{2(m-1)} t})],$$

并进行分部积分, 有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_{N_0}(t) + 2(\|u_{N_0 xt}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{N_0 x^2 t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{N_0 x^m t}\|^2_{L^2(\Omega)})\\ =\ & 2(\mu|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0} - \delta|u_{N_0 t}|^{p-1}u_{N_0 t}\\ &+ \sigma(u_{N_0 x})_x, u_{N_0 t} - u_{N_0 x^2 t} + (-1)^{m-1}u_{N_0 x^{2(m-1)} t})\\ &+ 2[(u_{N_0}, u_{N_0 t}) - (u_{N_0 xx}, u_{N_0 t}) + (u_{N_0 xx}, u_{N_0 xxt})\\ &- (-1)^{m-1}(u_{N_0 x^2}, u_{N_0 x^{2(m-1)} t})].\end{aligned} \tag{2.8.9}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理和式 (2.8.8), 得

$$\|u_{N_0}\|_{W^{\overline{m},\overline{p}}(\Omega)} \leqslant C_5\|u_{N_0}\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C_6(E_{N_0}(t))^{\frac{1}{2}}, \tag{2.8.10}$$

$$\|u_{N_0 t}\|_{W^{\widetilde{m},\overline{p}}(\Omega)} \leqslant C_7\|u_{N_0 t}\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leqslant C_8(E_{N_0}(t))^{\frac{1}{2}}, \tag{2.8.11}$$

其中 $0 \leqslant \overline{m} \leqslant m-1$, $0 \leqslant \widetilde{m} \leqslant m-2$, $2 \leqslant \overline{p} \leqslant \infty$, $\|\cdot\|_{W^{\overline{m},\overline{p}}(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_{W^{\widetilde{m},\overline{p}}(\Omega)}$ 分别表示 Sobolev 空间 $W^{\overline{m},\overline{p}}(\Omega)$ 和 $W^{\widetilde{m},\overline{p}}(\Omega)$ 的范数, C_5–C_8 是不依赖于 N_0 和 t 的正常数. 应用 Hölder 不等式, 式 (2.8.10), (2.8.11) 以及引理的假定知

$$\begin{aligned}&|2(\mu|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0}, u_{N_0 t} - u_{N_0 x^2 t})|\\ \leqslant\ & 2\mu[\|u_{N_0}\|^q_{L^{2q}(\Omega)}\|u_{N_0 t}\|_{L^2(\Omega)} + q\|u_{N_0}\|^{q-1}_{L^\infty(\Omega)}\|u_{N_0 x}\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N_0 xt}\|_{L^2(\Omega)}]\\ \leqslant\ & C_9(E_{N_0}(t))^{\frac{q+1}{2}};\end{aligned} \tag{2.8.12}$$

$$\begin{aligned}&\left|-2(\delta|u_{N_0 t}|^{p-1}u_{N_0 t}, u_{N_0 t} - u_{N_0 x^2 t})\right|\\ \leqslant\ & 2\delta[\|u_{N_0 t}\|^p_{L^{2p}(\Omega)}\|u_{N_0 t}\|_{L^2(\Omega)} + p\|u_{N_0 t}\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}\|u_{N_0 xt}\|^2_{L^2(\Omega)}]\\ \leqslant\ & C_{10}(E_{N_0}(t))^{\frac{p+1}{2}};\end{aligned} \tag{2.8.13}$$

$$\begin{aligned}&|2(\sigma(u_{N_0 x})_x, u_{N_0 t} - u_{N_0 x^2 t})|\\ =\ & \left|-2\int_\Omega[\sigma(u_{N_0 x})u_{N_0 xt} + \sigma'(u_{N_0 x})u_{N_0 x^2}u_{N_0 x^2 t}]dx\right|\\ \leqslant\ & 2K[\|u_{N_0 x}\|^\nu_{L^{2\nu}(\Omega)}\|u_{N_0 xt}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{N_0 x}\|^{\nu-1}_{L^\infty(\Omega)}\|u_{N_0 x^2}\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N_0 x^2 t}\|_{L^2(\Omega)}]\\ \leqslant\ & C_{11}(E_{N_0}(t))^\nu + \|u_{N_0 xt}\|^2 + \|u_{N_0 x^2 t}\|^2.\end{aligned} \tag{2.8.14}$$

应用求导, 通过直接计算推出

$$\|\sigma(u_{N_0x})_{x^{m-1}}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{12}\|u_{N_0}\|^{\nu}_{H^m(\Omega)}, \tag{2.8.15}$$

$$\|(|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0})_{x^m}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{13}\|u_{N_0}\|^{q}_{H^m(\Omega)}, \tag{2.8.16}$$

$$\|(|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0t})_{x^{m-1}}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{14}\|u_{N_0t}\|^{p}_{H^{m-1}(\Omega)}, \tag{2.8.17}$$

其中 C_{12}–C_{14} 是不依赖于 N_0 的常数. 应用式 (2.8.8), (2.8.10), (2.8.11) 和注意到下面的条件成立

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^l}{\partial x^l}[\sigma(u_{N_0x})_x]\Big|_{x=0} = \frac{\partial^l}{\partial x^l}[\sigma(u_{N_0x})_x]\Big|_{x=1} = 0,\\
&\frac{\partial^l}{\partial x^l}[|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0}]\Big|_{x=0} = \frac{\partial^l}{\partial l}[|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0}]\Big|_{x=1} = 0,\\
&\frac{\partial^l}{\partial x^l}[|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0t}]\Big|_{x=0} = \frac{\partial^l}{\partial x^l}[|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0t}]\Big|_{x=1} = 0,
\end{aligned}$$

其中, 当 $m \geqslant 3$ 是一奇数时, $l = 0,2,4,\cdots,(m-3)$; 当 $m \geqslant 2$ 是一偶数时, $l = 0,2,4,\cdots,(m-2)$. 由式 (2.8.12)–(2.8.14) 得

$$\begin{aligned}
|2(\sigma(u_{N_0x})_x, (-1)^{m-1}u_{N_0x^{2(m-1)}t})| &= \left|2(-1)^{2m-3}\int_\Omega \sigma(u_{N_0x})_{x^{m-1}}u_{N_0x^mt}dx\right|\\
&\leqslant C_{15}\|u_{N_0}\|^{\nu}_{H^m(\Omega)}\|u_{N_0x^mt}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant C_{16}(E_{N_0}(t))^{\nu} + \|u_{N_0x^mt}\|^2_{L^2(\Omega)};
\end{aligned} \tag{2.8.18}$$

$$\begin{aligned}
|2(\mu|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0}, (-1)^{m-1}u_{N_0x^{2(m-1)}t})| &= \left|2\mu\int_\Omega (|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0})_{x^{m-1}}u_{N_0x^{m-1}t}dx\right|\\
&\leqslant C_{17}\|u_{N_0}\|^{q}_{H^{m-1}(\Omega)}\|u_{N_0x^{m-1}t}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant C_{18}(E_{N_0}(t))^{\frac{q+1}{2}};
\end{aligned} \tag{2.8.19}$$

$$\begin{aligned}
|-2(\delta|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0t}, (-1)^{m-1}u_{N_0x^{2(m-1)}t})| &= \left|-2\delta\int_\Omega (|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0t})_{x^{m-1}}u_{N_0x^{m-1}t}dx\right|\\
&\leqslant C_{19}\|u_{N_0t}\|^{p}_{H^{m-1}(\Omega)}\|u_{N_0x^{m-1}t}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant C_{20}(E_{N_0}(t))^{\frac{p+1}{2}},
\end{aligned} \tag{2.8.20}$$

其中 C_{16}–C_{20} 是不依赖于 N_0 的常数.

应用式 (2.8.8) 知

$$\begin{aligned}
&|2[(u_{N_0} - u_{N_0xx}, u_{N_0t}) + (u_{N_0xx}, u_{N_0xxt}) - (-1)^{m-1}(u_{N_0x^2}, u_{N_0x^{2(m-1)}t})]|\\
\leqslant{}& 2(\|u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N_0xt}\|_{L^2(\Omega)}\\
&+ \|u_{N_0xx}\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N_0xxt}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{N_0x^m}\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N_0x^mt}\|_{L^2(\Omega)})\\
\leqslant{}& C_{21}E_{N_0}(t) + \|u_{N_0xt}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{N_0x^2t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{N_0x^mt}\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.8.21}$$

将式 (2.8.12)–(2.8.14) 和式 (2.8.18)–(2.8.21) 代入式 (2.8.9), 并取 $\beta = \max\left\{\frac{p+1}{2},\right.$

$\left.\frac{q+1}{2},\nu,1\right\}$, 推出

$$\frac{d}{dt}E_{N_0}(t)\leqslant K_1(E_{N_0}(t))^{\beta},\tag{2.8.22}$$

其中 $K_1>0$ 为一个不依赖于 N_0 的常数.

对于任意的 $t\in(0,T_{N_0})$, 由式 (2.8.22) 有

$$E_{N_0}(T)\leqslant\frac{E_{N_0}(0)}{[1-(\beta-1)K_1E_{N_0}(0)^{\beta-1}t]^{\frac{1}{\beta-1}}}\leqslant\frac{A}{[1-(\beta-1)K_1A^{\beta-1}t]^{\frac{1}{\beta-1}}}.\tag{2.8.23}$$

如果取 t_1 满足下列不等式

$$B>1-(\beta-1)K_1A^{\beta-1}t_1>0,$$

其中 $0<B<1$, 则在 $[0,t_1]$ 上式 (2.8.7) 成立. 由以上不等式推出

$$\frac{1-B}{(\beta-1)K_1A^{\beta-1}}<t_1<\frac{1}{(\beta-1)K_1A^{\beta-1}},\tag{2.8.24}$$

其中 $\frac{1-B}{(\beta-1)K_1A^{\beta-1}}>0$ 是一常数. 这意味着 T_{N_0} 有正的下界. □

容易由引理 2.8.1 看出下面引理的正确性.

引理 2.8.2 在引理 2.8.1 的条件下, 问题 (2.8.1)–(2.8.3) 的近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 有下列估计

$$\|u_{N_0}\|_{H^m(\Omega)}+\|u_{N_0t}\|_{H^{m-1}(\Omega)}\leqslant C_{22},\quad t\in[0,t_1],\tag{2.8.25}$$

其中 C_{22} 为一个不依赖于 N_0 的常数.

引理 2.8.3 设引理 2.8.1 的条件成立和 $m\geqslant 5$, 则问题 (2.8.1)–(2.8.3) 的近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 有下列估计

$$\|u_{N_0tt}\|_{H^{m-3}(\Omega)}+\|u_{N_0t^3}\|_{H^{m-5}(\Omega)}\leqslant C_{23},\quad t\in[0,t_1],\tag{2.8.26}$$

其中 C_{23} 是一不依赖于 N_0 的常数.

证明 方程组 (2.8.4) 两端同乘以 $(1+\lambda_s^{m-3})\ddot{\alpha}_{N_0s}(t)$, 乘积对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 得

$$\begin{aligned}&\|u_{N_0tt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^{m-3}tt}\|^2_{L^2(\Omega)}\\&=(u_{N_0tt},u_{N_0xxt})+(u_{N_0x^{m-1}t},u_{N_0x^{m-3}tt})\\&\quad+(\mu|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0}-\delta|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0t}+\sigma(u_{N_0x})_x,u_{N_0tt})\\&\quad+(-1)^{m-3}u_{N_0x^{2(m-3)}tt}.\end{aligned}\tag{2.8.27}$$

应用 Hölder 不等式, Cauchy 不等式, 式 (2.8.15)–(2.8.17) 和式 (2.8.25), 由式 (2.8.29) 断定

$$\begin{aligned}&\|u_{N_0tt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^{m-3}tt}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant{}&C_{24}(\|u_{N_0xxt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^{m-1}t}\|^2_{L^2(\Omega)}+\||u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+\||u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0t}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\sigma(u_{N_0x})_x\|_{L^2(\Omega)}+\|(|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0})_{x^{m-3}}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+\|(|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0t})_{x^{m-3}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\sigma(u_{N_0x})_{x^{m-2}}\|^2_{L^2(\Omega)})\\ \leqslant{}&C_{24},\quad t\in[0,t_1],\end{aligned}\tag{2.8.28}$$

其中 C_{24} 是不依赖于 N_0 的常数. 式 (2.8.4) 对 t 求导, 两端同乘以 $(1+\lambda_s^{m-5})\dddot{\alpha}_{N_0s}(t)$, 并对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和知

$$\begin{aligned}&\|u_{N_0t^3}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^{m-5}t^3}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ ={}&(u_{N_0x^2tt},u_{N_0t^3}+(-1)^{m-5}u_{N_0x^{2(m-5)}t^3})+(\mu q|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0t}\\ &-\delta p|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0tt}+\sigma(u_{N_0x})_{xt},u_{N_0t^3}+(-1)^{m-5}u_{N_0x^{2(m-5)}t^3}).\end{aligned}\tag{2.8.29}$$

应用 Hölder 不等式, Cauchy 不等式, 式 (2.8.25) 和式 (2.8.28), 由式 (2.8.29) 得出

$$\begin{aligned}&\|u_{N_0t^3}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^{m-5}t^3}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant{}&C_{25}(\|u_{N_0x^2t^2}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{N_0x^{m-3}tt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\||u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0t}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+\||u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0tt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\sigma(u_{N_0x})_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|(|u_{N_0}|^{q-1}u_{N_0t})_{x^{m-5}}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+\|(|u_{N_0t}|^{p-1}u_{N_0tt})_{x^{m-5}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\sigma(u_{N_0x})_{x^{m-4}t}\|^2_{L^2(\Omega)})\\ \leqslant{}&C_{25},\quad t\in[0,t_1].\end{aligned}\tag{2.8.30}$$

从式 (2.8.28) 和式 (2.8.30) 推出式 (2.8.26) 成立. □

定理 2.8.1 设

(1) $\sigma\in C^m(\mathbb{R})$, $|\sigma(s)|\leqslant K|s|^\nu$, $|\sigma'(s)|\leqslant K|s|^{\nu-1}$, 其中 $\nu\geqslant 2$;

(2) $\varphi\in H^m(\Omega)$, $\psi\in H^{m-1}(\Omega)$.

若 $4\leqslant m\leqslant\min\{p+1,q+1\}$ (若 m 是一奇数, 当 $p=1,4\leqslant m\leqslant q+1$ 时, $m\leqslant\min\{p+2,q+2\}$), 则问题 (2.8.1)–(2.8.3) 有局部广义解 $u(x,t)$, 且满足等式

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega\{u_{tt}-\sigma(u_x)_x-u_{xxt}+\delta|u_t|^{p-1}u_t-\mu|u|^{q-1}u\}h(x,t)dxdt=0,\quad\forall h\in L^2(Q_{t_1}),\tag{2.8.31}$$

并在古典意义下满足初边值条件, 其中 $Q_{t_1}=\Omega\times(0,t_1)$, 该解有连续导数 $u_{x^s}(x,t)$ $(0\leqslant s\leqslant m-2)$, $u_{x^st}(x,t)(0\leqslant s\leqslant m-4)$ 和广义导数 $u_{x^s}(x,t)(0\leqslant s\leqslant m)$,

$u_{x^st}(x,t)$ $(0\leqslant s\leqslant m-1)$ 和 $u_{x^stt}(x,t)$ $(0\leqslant s\leqslant m-3)$. 如果 $5\leqslant m$, 那么问题 (2.8.1)–(2.8.3) 的解是唯一的.

如果 $6\leqslant m\leqslant \min\{p+1,q+1\}$, 那么问题 (2.8.1)–(2.8.3) 有唯一局部古典解 $u(x,t)$ 且解有连续导数 $u_{x^s}(x,t)$ $(0\leqslant s\leqslant m-2)$, $u_{x^st}(x,t)(0\leqslant s\leqslant m-4)$, $u_{x^stt}(x,t)(0\leqslant s\leqslant m-6)$ 以及广义导数 $u_{x^s}(x,t)(0\leqslant s\leqslant m)$, $u_{x^st}(x,t)(0\leqslant s\leqslant m-1)$, $u_{x^stt}(x,t)(0\leqslant s\leqslant m-3)$, $u_{x^st^3}(x,t)$ $(0\leqslant s\leqslant m-5)$.

证明 由式 (2.8.25) 和 (2.8.26) 知, 当 $m=4$ 时, 应用 Sobolev 嵌入定理有

$$\|u_{N_0}\|_{C^{3,\lambda}(\overline{\Omega})}+\|u_{N_0t}\|_{C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})}+\|u_{N_0tt}\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})}\leqslant C_{26},\quad t\in[0,t_1],\tag{2.8.32}$$

其中$0<\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$. 如果 $m=4$, 由式 (2.8.32) 和 Ascoli-Arzelá定理知, 存在一函数 $u(x,t)$ 和 $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 的一子序列, 仍记为 $\{u_{N_0}(x,t)\}$, 使得当 $N_0\to\infty$ 时, $\{u_{N_0x^i}(x,t)\}$ $(i=0,1,2)$ 和 $\{u_{N_0t}(x,t)\}$ 在 $\overline{Q}_{t_1}$ 上分别一致收敛于 $u_{x^i}(x,t)$ $(i=0,1,2)$ 和 $u_t(x,t)$. 子序列 $\{u_{N_0x^i(x,t)}\}$ $(i=3,4)$, $\{u_{N_0x^it}(x,t)\}$ $(i=1,2,3)$ 和 $\{u_{N_0x^itt}(x,t)\}(i=0,1)$ 分别在 $L^2(Q_{t_1})$ 中弱收敛于 $u_{x^i}(x,t)$ $(i=3,4)$, $u_{x^it}(x,t)$ $(i=1,2,3)$ 和 $u_{x^itt}(x,t)(i=0,1)$. 所以当 $m\geqslant 4$ 时, 初边值问题 (2.8.1)–(2.8.3) 存在局部广义解, 此解有在定理 2.8.1 中所述的正则性, 并满足式 (2.8.31) 和在古典意义下满足初边值条件.

现在证明解的唯一性. 设 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是初边值问题 (2.8.1)–(2.8.3) 的两个解. 令

$$w(x,t)=u(x,t)-v(x,t).$$

于是 $w(x,t)$ 满足下列初边值问题

$$\begin{aligned}&w_{tt}-[\sigma(u_x)_x-\sigma(v_x)_x]-w_{xxt}+\delta|u_t|^{p-1}u_t-\delta|v_t|^{p-1}v_t\\&=\mu|u|^{q-1}u-\mu|v|^{q-1}v,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,t_1),\end{aligned}\tag{2.8.33}$$

$$w(0,t)=0,\quad w(1,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant t_1,\tag{2.8.34}$$

$$w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=0,\quad x\in\overline{\Omega}.\tag{2.8.35}$$

方程 (2.8.33) 两端同乘以 $2w_t(x,t)$, 所得结果两端各加项 $2ww_t-2w_{xx}w_t$, 然后在 Ω 上积分, 经计算得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_x\|^2_{L^2(\Omega)}]+2\|w_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)}\\&=2\int_\Omega ww_tdx+2\mu q\int_\Omega|\widetilde{u}|^{q-1}\widetilde{u}_xww_tdx-2\delta p\int_\Omega|\overline{u}_t|^{p-1}\overline{u}_{xt}w_t^2dx\\&\quad-2\int_\Omega\sigma'(\overline{\overline{u}}_x)w_xw_{xt}dx-2\int_\Omega w_{xx}w_tdx\\&\leqslant\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}+C_{27}\max_{\overline{Q}_{t_1}}\{|\widetilde{u}|^{q-1}|\,\widetilde{u}_x|+|\overline{u}_t|^{p-1}|\overline{u}_{xt}|\}\end{aligned}$$

$$\times (\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2) + \max_{\overline{Q}_{t_1}} |\sigma'(\bar{\bar{u}}_x)|^2 \|w_x\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$+ \|w_{xt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_{xt}\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{2.8.36}$$

其中由于 $\widetilde{u}$, $\widetilde{u}_x$, $\overline{u}_t$, $\overline{u}_{xt}$ 和 $\bar{\bar{u}}_x$ 分别取 u 和 v, u_x 和 v_x, u_t 和 v_t, u_{xt} 和 v_{xt} 以及 u_x 和 v_x 之间的中值, 且它们有界, 从而由式 (2.8.36) 推出

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_{28} \int_0^t [\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_x\|_{L^2(\Omega)}] d\tau.$$

由 Gronwall 不等式给出

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_x\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

于是 $u(x,t) = v(x,t)$.

当 $m \geqslant 6$ 时, 易证问题 (2.8.1)–(2.8.3) 有唯一的局部古典解 $u(x,t)$, 此解有定理 2.8.1 中所述的正则性. □

注 2.8.1 在定理 2.8.1 的条件下, 如果 $3 = m \leqslant \min\{p+2, q+2\}$, 则问题 (2.8.1)–(2.8.3) 有局部广义解 $u(x,t)$, 它满足式 (2.8.31), 在古典意义下满足边值条件 (2.8.2), 而在广义意义下满足初值条件 (2.8.3).

2.8.3 解的爆破

定理 2.8.2 设

(1) $p = 1$, $q > 1$;

(2) $\sigma(s) \in C^1(\mathbb{R})$, $s\sigma(s) \leqslant K \int_0^s \sigma(y)dy$, $\int_0^s \sigma(y)dy \leqslant -\alpha |s|^{\gamma+1}$, 其中 $K > 2$, $\alpha > 0$ 和 $\gamma > 1$ 均为常数;

(3) $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$ 及

$$E(0) + \frac{q-1}{2(q+1)} \left[\frac{\mu(q-1)}{2}\right]^{-\frac{2}{q-1}} \left(\frac{\delta^2}{2}\right)^{\frac{q+1}{q-1}} \leqslant - \left[\frac{2}{A_3(1 - e^{-\frac{\gamma-1}{4}})}\right]^{\frac{4}{\gamma-1}},$$

其中

$$E(0) = \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{2\mu}{q+1} \|\varphi\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} + 2\int_\Omega \int_0^{\varphi_x(x)} \sigma(s) ds dx,$$
$$A_3 = \sqrt{A_2} = \left[(K-2)\alpha \frac{2^{3-\gamma}}{\gamma+3}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

则问题 (2.8.1)–(2.8.3) 的广义解 $u(x,t)$ 或古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega |u_x(x,\tau)|^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |u_x(x,s)|^2 dx ds d\tau \to \infty.$$

证明 方程 (2.8.1) 两端同乘以 $2u_t$, 且对所得结果两端在 $(0,1)$ 上积分, 有

$$E(t)=E(0),\quad t>0,$$

其中

$$\begin{aligned}E(t)=&\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_0^t\|u_{x\tau}(\cdot,\tau)\|^2d\tau+2\int_0^1\int_0^{u_x(x,t)}\sigma(s)ds\\&+2\delta\int_0^t\|u_\tau(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau-\frac{2\mu}{q+1}\|u(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

令

$$M(t)=\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\int_\Omega|u_x(x,t)|^2dxd\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega|u_x(x,s)|^2dxdsd\tau.\quad(2.8.37)$$

我们有

$$\dot M(t)=2\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx+\int_\Omega|u_x(x,t)|^2dx+\int_0^t\int_\Omega|u_x(x,\tau)|^2dxd\tau.\quad(2.8.38)$$

应用定理 2.8.2 的假定 (2), 进行分部积分, 并注意到

$$\begin{aligned}K\int_\Omega\int_0^{u_x(x,t)}\sigma(s)dsdx=&E(0)-\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}-2\int_0^t\|u_{x\tau}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\\&+\frac{2\mu}{q+1}\|u(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}-2\delta\int_0^t\|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\\&+(K-2)\int_\Omega\int_0^{u_x(x,t)}\sigma(s)dsdx,\end{aligned}\quad(2.8.39)$$

以及根据定理 2.8.2 的假定有

$$\begin{aligned}\ddot M(t)=&2\int_\Omega\left[u_t^2(x,t)+u(x,t)u_{tt}(x,t)+u_x(x,t)u_{xt}(x,t)+\frac12u_x^2(x,t)\right]dx\\=&2\int_\Omega\Big[u_t^2(x,t)+u(x,t)[u_{xxt}(x,t)+\sigma(u_x(x,t))_x-\delta u_t(x,t)\\&+\mu|u(x,t)|^{q-1}u(x,t)]+u_x(x,t)u_{xt}(x,t)+\frac12u_x^2(x,t)\Big]dx\\=&2\int_\Omega\Big[u_t^2(x,t)-\sigma(u_x(x,t))u_x(x,t)-\delta u_t(x,t)u(x,t)\\&+\mu|u(x,t)|^{q+1}+\frac12u_x^2(x,t)\Big]dx\\\geqslant&2\Big[2\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}-E(0)+2\int_0^t\|u_{x\tau}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\\&+\frac{\mu(q-1)}{q+1}\|u(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}+2\delta\int_0^t\|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\end{aligned}$$

$$+\alpha(K-2)\|u_x(\cdot,t)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}^{\gamma+1}-\delta\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx$$
$$+\frac{1}{2}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\Bigg]. \tag{2.8.40}$$

利用 Cauchy 不等式, Hölder 不等式和带 ε $\left(=\frac{\mu(q-1)}{q+1}\right)$ 的 Young 不等式知

$$\begin{aligned}\left|2\delta\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx\right| &\leqslant 2\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\delta^2}{2}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &\leqslant 2\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\delta^2}{2}\|u(\cdot,t)\|_{L^{q+1}(\Omega)}^2\\ &\leqslant 2\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\mu(q-1)}{q+1}\|u(\cdot,t)\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1}\\ &\quad+\frac{q-1}{q+1}\left[\frac{\mu(q-1)}{2}\right]^{-\frac{2}{q-1}}\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^{\frac{q+1}{q-1}}.\end{aligned} \tag{2.8.41}$$

将式 (2.8.41) 代入式 (2.8.40), 发现

$$\begin{aligned}\ddot{M}(t)\geqslant &2\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{(q-1)\mu}{q+1}\|u(\cdot,t)\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1}+2(K-2)\alpha\int_\Omega|u_x(x,t)|^{\gamma+1}dx\\ &+\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2-[2E(0)+B]>0,\quad t>0,\end{aligned} \tag{2.8.42}$$

其中 $B=\frac{q-1}{q+1}\left[\frac{\mu(q-1)}{2}\right]^{-\frac{2}{q-1}}\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^{\frac{q+1}{q-1}}$.

由式 (2.8.42) 推出

$$\begin{aligned}\dot{M}(t)\geqslant &[-2E(0)-B]t+2\alpha(K-2)\int_0^t\int_\Omega|u_x(x,\tau)|^{\gamma+1}dxd\tau\\ &+\int_0^t\int_\Omega|u_x(x,\tau)|^2dxd\tau+\dot{M}(0)\end{aligned} \tag{2.8.43}$$

和

$$\begin{aligned}M(t)\geqslant &2\alpha(K-2)\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega|u_x(x,s)|^{\gamma+1}dxdsd\tau\\ &-\frac{1}{2}[2E(0)+B]t^2+\dot{M}(0)t+M(0),\end{aligned} \tag{2.8.44}$$

其中

$$\dot{M}(0)=2\int_\Omega\varphi(x)\psi(x)dx+\int_\Omega|\varphi_x(x)|^2dx,\ M(0)=\|\varphi\|^2.$$

由式 (2.8.42)–(2.8.44) 有

$$\ddot{M}(t)+\dot{M}(t)+M(t)\geqslant 2\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{(q-1)\mu}{q+1}\|u(\cdot,t)\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1}+\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ 2\alpha(K-2)\left[\int_\Omega |u_x(\cdot,t)|^{\gamma+1}dx + \int_0^t\int_\Omega |u_x(\cdot,\tau)|^{\gamma+1}dxd\tau \right.$$
$$\left. + \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |u_x(\cdot,s)|^{\gamma+1}dxdsd\tau\right] + \int_0^t\int_\Omega |u_x(\cdot,\tau)|^2 dxd\tau$$
$$- [2E(0)+B]\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right) + \dot{M}(0)(t+1) + M(0). \quad (2.8.45)$$

把式 (2.8.38) 代入式 (2.8.45) 得

$$\ddot{M}(t) + 2\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx + \int_\Omega |u_x(x,t)|^2 dx + \int_0^t\int_\Omega |u_x(x,\tau)|^2 dxd\tau + M(t)$$
$$\geqslant 2\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(q-1)\mu}{q+1}\|u(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega |u_x(x,\tau)|^2 dxd\tau$$
$$+ 2(K-2)\alpha\left[\int_\Omega |u_x(\cdot,t)|^{\gamma+1}dx + \int_0^t\int_\Omega |u_x(x,\tau)|^{\gamma+1}dxd\tau\right.$$
$$\left. + \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |u_x(x,s)|^{\gamma+1}dxdsd\tau\right] - [2E(0)+B]\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)$$
$$+ \dot{M}(0)(t+1) + M(0). \quad (2.8.46)$$

因为 $\ddot{M}(t) > 0$, $M(t) \geqslant 0$ 和

$$2\int_\Omega u(x,t)u_x(x,t)dx \leqslant \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

由式 (2.8.46) 可见

$$\ddot{M}(t) + M(t) \geqslant \frac{(q-1)\mu}{2(q+1)}\int_\Omega |u(x,t)|^{q+1}dx + (K-2)\alpha\left[\int_\Omega |u_x(\cdot,t)|^{\gamma+1}dx\right.$$
$$\left. + \int_0^t\int_\Omega |u_x(x,\tau)|^{\gamma+1}dxd\tau + \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |u_x(x,s)|^{\gamma+1}dxdsd\tau\right]$$
$$- \left[E(0)+\frac{B}{2}\right]\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right) + \frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1) + \frac{1}{2}M(0). \quad (2.8.47)$$

利用 Hölder 不等式和 Poincaré不等式, 断言

$$\int_\Omega |u_x(x,t)|^{\gamma+1}dx \geqslant \left(\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad (2.8.48)$$

$$\int_0^t\int_\Omega |u_x(x,t)|^{\gamma+1}dxdt \geqslant t^{\frac{1-\gamma}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega |u_x(x,\tau)|^2 dxd\tau\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad (2.8.49)$$

$$\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |u_x(x,s)|^{\gamma+1}dxdsd\tau \geqslant 2^{\frac{\gamma-1}{2}}t^{1-\gamma}\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |u_x(x,s)|^2 dxdsd\tau\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}. \quad (2.8.50)$$

将式 (2.8.48)–(2.8.50) 代入式 (2.8.47) 中, 再应用以下不等式

$$(a_1+b_1+c_1)^n \leqslant 2^{2(n-1)}(a_1^n+b_1^n+c_1^n), \quad a_1,b_1,c_1>0, \quad n>1,$$

发现

$$\begin{aligned}\ddot{M}(t)+M(t) \geqslant & A_1\left[\left(\int_\Omega |u(x,t)|^2dx\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}+t^{\frac{1-\gamma}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega |u_x(x,\tau)|^2dxd\tau\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}\right.\\ &\left.+2^{\frac{\gamma-1}{2}}t^{1-\gamma}\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |u_x(x,s)|^2dxdsd\tau\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}\right]-\left[E(0)+\frac{B}{2}\right]\\ &\times\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{1}{2}M(0)\\ \geqslant & A_1 2^{1-\gamma}t^{1-\gamma}(M(t))^{\frac{\gamma+1}{2}}-\left[E(0)+\frac{B}{2}\right]\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)\\ &+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{1}{2}M(0), \quad t\geqslant 1, \end{aligned} \tag{2.8.51}$$

其中 $A_1=(K-2)\alpha$.

由式 (2.8.43), (2.8.44) 知, 当 $t\to\infty$ 时, $\dot{M}(t)\to\infty$ 和 $M(t)\to\infty$. 因此, 存在一个 $t_0\geqslant 1$, 使得当 $t\geqslant t_0$ 时, $\dot{M}(t)>0$ 和 $M(t)>0$. 式 (2.8.51) 两端同乘以 $2\dot{M}(t)$, 再应用式 (2.8.43) 知

$$\frac{d}{dt}[(\dot{M}(t))^2+(M(t))^2] \geqslant A_2t^{1-\gamma}\frac{d}{dt}(M(t))^{\frac{\gamma+3}{2}}+D(t), \quad t\geqslant t_0, \tag{2.8.52}$$

其中

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{A_1 2^{3-\gamma}}{\gamma+3},\\ D(t) &= \{[-4E(0)-2B]t+2\dot{M}(0)\}\times\left\{\left[-E(0)-\frac{B}{2}\right]\right.\\ &\quad\left.\times\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{\dot{M}(0)}{2}(t+1)+\frac{1}{2}M(0)\right\}.\end{aligned}$$

由式 (2.8.52) 得

$$\frac{d}{dt}\left\{t^{\gamma-1}[(\dot{M}(t))^2+(M(t))^2]-A_2(M(t))^{\frac{\gamma+3}{2}}\right\} \geqslant t^{\gamma-1}D(t), \quad t\geqslant t_0. \tag{2.8.53}$$

在 (t_0,t) 上对式 (2.8.53) 积分发现

$$\begin{aligned}&t^{\gamma-1}[(\dot{M}(t))^2+(M(t))^2]-A_1(M(t))^{\frac{\gamma+3}{2}}\\ &\geqslant \int_{t_0}^t \tau^{\gamma-1}D(\tau)d\tau+t_0^{\gamma-1}[(\dot{M}(t_0))^2+(M(t_0))^2]-A_2(M(t_0))^{\frac{\gamma+3}{2}}, \quad t\geqslant t_0.\end{aligned} \tag{2.8.54}$$

我们看出, 当 $t \to \infty$ 时, 式 (2.8.54) 的右端趋于正无穷大, 因此存在一个 $t_1 \geqslant t_0$, 使得当 $t \geqslant t_1$ 时, 式 (2.8.54) 右端大于等于零. 从而

$$t^{\gamma-1}[(\dot{M}(t))^2 + (M(t))^2] \geqslant A_2(M(t))^{\frac{\gamma+3}{2}}, \quad t \geqslant t_1. \tag{2.8.55}$$

式 (2.8.55) 两端开方, 断言

$$\dot{M}(t) + M(t) \geqslant A_3 t^{\frac{1-\gamma}{2}}(M(t))^{\frac{\gamma+3}{4}}, \quad t \geqslant t_1, \tag{2.8.56}$$

其中 $A_3 = \sqrt{A_2}$.

由式 (2.8.44) 推出

$$M(t) \geqslant -\left[E(0) + \frac{B}{2}\right] t^2 + \dot{M}(0)t + M(0). \tag{2.8.57}$$

根据引理 1.8.2, 存在常数 $\widetilde{T}$, 使得当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega |u_x(x,\tau)|^2 dxd\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |u_x(x,s)|^2 dxdsd\tau \to \infty. \quad \square$$

类似于定理 2.8.2 可证如下定理.

定理 2.8.3 设

(1) $1 \leqslant p < 2$, $q < \dfrac{p}{2-p}$;

(2) $\sigma(s) \in C^1(\mathbb{R})$, $s\sigma(s) \leqslant K \displaystyle\int_0^s \sigma(y)dy$, $\displaystyle\int_0^s \sigma(y)dy \leqslant -\alpha|s|^{\gamma+1}$, $K > 2$, $\alpha > 0$ 和 $\gamma > 1$ 是常数;

(3) $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$ 和

$$E(0) + \frac{1}{2d}\left(\frac{a}{\zeta}\right)^d \leqslant -\left[\frac{2}{A_3(1-e^{-\frac{\gamma-1}{4}})}\right]^{\frac{4}{\gamma-1}},$$

其中

$$E(0) = \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{2\mu}{q+1}\|\varphi\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + 2\int_\Omega \int_0^{\varphi_x(x)} \sigma(s)dsdx,$$

$$d = \frac{(2-p)(q+1)}{(2-p)q-p}, \quad a = \frac{2-p}{2}\left(\frac{\delta^2 p^p}{4^{p-1}}\right)^{\frac{1}{2-p}},$$

$$\zeta = \left[\frac{\mu(q-1)(2-p)}{2}\right]^{\frac{2}{(2-p)(q+1)}}, \quad A_3 = \sqrt{A_2} = \left[(K-2)\alpha\frac{2^{3-\gamma}}{\gamma+3}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

则问题 (2.8.1)–(2.8.3) 的广义解或古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega |u_x(x,\tau)|^2 dxd\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_\Omega |u_x(x,s)|^2 dxdsd\tau \to \infty.$$

注 2.8.2　证明定理 2.8.2, 定理 2.8.3 的方法可以用到证明方程 (2.8.1) 中分别用 $f(u_t)$ 和 $g(u)$ 代替 $\delta|u_t|^{p-1}u_t$ 和 $\mu|u|^{q-1}u$ 的情形.

2.8.4　一个例子

下面举一个例子说明满足定理 2.8.2 的条件 (2) 和 (3) 的函数 $\sigma(s)$ 存在. 例如, $\sigma(s)=-s^{2k+1}$ $(k=1,2,\cdots)$. 事实上, 如果取 $\sigma(s)=-s^3$, $K=\dfrac{7}{2}$, $q=5$, $p=1$, $\gamma=3$, $\alpha=\dfrac{9}{40}$, 则 $\sigma(s)\in C^1(\mathbb{R})$,

$$s\sigma(s)\left(=-s^4\right)<K\int_0^s\sigma(y)dy\left(=-\frac{7}{8}s^4\right),$$

$$\int_0^s\sigma(y)dy\left(=-\frac{1}{4}s^4\right)<-\alpha|s|^{\gamma+1}\left(=-\frac{9}{40}s^4\right)$$

和 $p\,(=1)<q(=5)$ 成立. 如果取 $\mu=1$, $\delta=2$, $\varphi(x)=\dfrac{17}{2}x(x-1)$, $\psi(x)=x(x-1)$, 则有 $\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^{q+1}(\Omega)$, $\psi\in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}E(0)=&\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_\Omega\int_0^{\varphi_x}\sigma(s)dsdx-\frac{2\mu}{q+1}\|\varphi\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\\=&\int_0^1[x(x-1)]^2dx+2\int_0^1\int_0^{\frac{17}{2}(2x-1)}(-s^3)dsdx-\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{17}{2}\right)^6x^6(x-1)^6dx\\\approx&-584.8313,\end{aligned}$$

$$B=\frac{q-1}{q+1}\left[\frac{\mu(q-1)}{2}\right]^{-\frac{2}{q-1}}\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^{\frac{q+1}{q-1}}\approx 1.3333,$$

$$A_3=\left[(K-2)\alpha\frac{2^{3-\gamma}}{\gamma+3}\right]^{\frac{1}{2}}\approx 0.2372.$$

而且

$$E(0)+\frac{B}{2}\approx-584.1646<-\left[\frac{2}{A_3(1-e^{-\frac{\gamma-1}{4}})}\right]^{\frac{4}{\gamma-1}}(\approx-459.5118)$$

成立, 因此定理 2.8.2 的条件满足. 按照定理 2.8.2, 问题 (2.8.1)–(2.8.3) 的解 $u(x,t)$ 在以上情况在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破.

2.8.5　与本节内容有关的文献

本节的内容取材于文献 [93]. 与本节内容有关的文献见 [83]–[92].

2.9 "坏" Boussinesq 型方程初边值问题局部解的存在性

2.9.1 引言

2.1 节研究了"好" Boussinesq 型方程的广义 IMBq 方程初边值问题整体解的存在性与不存在性. 本节考虑"坏" Boussinesq 型方程的初边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} - bu_{xxxx} = \sigma(u)_{xx}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty), \tag{2.9.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.9.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2.9.3}$$

和方程 (2.9.1) 具有边值条件

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.9.4}$$

和初值条件 (2.9.3) 的初边值问题, 其中 $b > 0$ 是一常数和 $\sigma(s)$ 是一给定的非线性函数.

2.9.2 主要结果的表述

对于任意的 $f \in L^2(0,1)$, $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$, 其中 $f_k = (f, e_k), e_k = \sqrt{2}\sin k\pi x$, $k = 1, 2, \cdots$, 序列 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2(0,1)$ 中的一标准正交基. 令 $\widetilde{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_k, \cdots)$, 则 $\|f\|_{L^2(0,1)} = (\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2)^{1/2} = \|\widetilde{f}\|_{l^2}$, 即空间 $L^2(0,1)$ 和 l^2 是等距同构的.

令 $S = \{f \in H^4(0,1) | f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0\}$, 于是 S 是具有范数 $\|f\|_S = \|f\|_{H^4(0,1)} = (\|f\|_{L^2(0,1)}^2 + \|f^{(4)}\|_{L^2(0,1)}^2)^{1/2}$ 的 Hilbert 空间, 序列 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 S 中的正交基. 对于任意的 $f \in S$, 在 S 中 $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$. 令 $\widetilde{S} = \{\widetilde{f} \in l^2 | (\pi^4 f_1, \cdots, (k\pi)^4 f_k, \cdots) \in l^2\}$, $\widetilde{S}$ 赋予范数 $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{S}} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (1 + (k\pi)^8) f_k^2\right]^{1/2}$, 从而 $\widetilde{S}$ 和 S 也是等距同构的, 所以 $\widetilde{S}$ 也是 Hilbert 空间.

令 X^n 和 S^n 分别在 $L^2(0,1)$ 和 S 中由 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 生成子空间, 并令算子 $P_n: L^2(0,1) \mapsto X^n$ 是一正交投影, 即对任意的 $f \in L^2(0,1)$, $P_n f = f^n = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$. 令 $\widetilde{f}^n = (f_1, \cdots, f_n, 0, \cdots)$, $\widetilde{S}^n = \{\widetilde{f}^n \in l^2 | (\pi^4 f_1, \cdots, (n\pi)^4 f_n, 0, \cdots) \in l^2\}$. 显然, $\|f^n\|_{X^n} = \|\widetilde{f}^n\|_{l^2}$, $\|\widetilde{f}^n\|_{\widetilde{S}^n} = \|\widetilde{f}^n\|_{\widetilde{S}}$.

现在叙述主要结果如下.

定理 2.9.1 设 $\sigma \in C^2(\mathbb{R}), \sigma''(s)$ 是局部 Lipschitz 连续, $\varphi \in S, \psi \in L^2(0,1)$, 则问题 (2.9.1)–(2.9.3) 存在局部广义解 $u \in L^{\infty}([0,T]; S) \cap W^{2,\infty}([0,T]; L^2(0,1))$, 其中 $0 < T < T^0$ 和 $[0, T^0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{0 \leqslant t < T^0} \|u(t)\|_S < \infty,$$

则 $T^0 = \infty$.

定理 2.9.2 设 $\sigma \in C^2(\mathbb{R}), \sigma''(s)$ 是局部 Lipschitz 连续, $\varphi \in D, \psi \in L^2(0,1)$, 则问题 (2.9.1), (2.9.4), (2.9.3) 存在局部广义解 $u \in L^\infty([0,T];D) \cap W^{2,\infty}([0,T]; L^2(0,1))$, 其中 $D = \{f \in H^4(0,1) | f'(0) = f'(1) = f^{(3)}(0) = f^{(3)}(1) = 0\}$, D 具有范数 $\|f\|_D = \|f\|_{H^4(0,1)} = (\|f\|^2_{L^2(0,1)} + \|f^{(4)}\|^2_{L^2(0,1)})^{1/2}$, $0 < T < T^0$ 和 $[0, T^0)$ 是解 u 存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{0 \leqslant t < T^0} \|u(t)\|_D < \infty,$$

则 $T^0 = \infty$.

我们还有以下问题 (2.9.1)–(2.9.3) 解的爆破定理.

定理 2.9.3 设 $\sigma(s)$ 是一凹函数, $y_0 = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 \varphi(x) \sin \pi x dx \geqslant 0$,

$$\widetilde{T} = \int_{y_0}^{\infty} \left[\pi^2 (b\pi^2 - 1)(y^2 - y_0^2) - 2\pi^2 \int_{y_0}^{y} \sigma(s) ds + y_1^2 \right]^{-\frac{1}{2}} dy < \infty.$$

于是问题 (2.9.1)–(2.9.3) 的解在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t) \sin \pi x dx \to \infty.$$

2.9.3 局部解的存在性

下面研究问题 (2.9.1)–(2.9.3) 和问题 (2.9.1), (2.9.4), (2.9.3) 局部解的存在性.

定理 2.9.1 的证明 证明由几个步骤组成.

第一步, Galerkin 近似. 设问题 (2.9.1)–(2.9.3) 的近似解为

$$u^n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k^n(t) e_k,$$

其中系数 $\{u_k^n\}_{k=1}^n$ 满足 $u_k^n(t) = (u^{(n)}(t), e_k)$ 和下列常微分方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^n(t), e_k) = (u_{xx}^n(t), e_k) + b(u_{xxxx}^n(t), e_k) + (\sigma(u^n(t))_{xx}, e_k), \quad t > 0, \\ &\text{在 } L^2(0,1)\text{中}, u^n(0) = \varphi^n \to \varphi, \ \ \text{在 } S\text{中}, u_t^n(0) = \psi^n \to \psi, \end{aligned} \tag{2.9.5}$$

即

$$\begin{aligned} &\ddot{\widetilde{u}}^n(t) = \widetilde{g}(u^n(t)), \quad t > 0, \\ &\text{在 } \widetilde{S}\text{中}, \ \widetilde{u}^n(0) = \widetilde{\varphi}^n \to \widetilde{\varphi}, \ \text{在 } l^2\text{中}, \ \dot{\widetilde{u}}^n(0) = \widetilde{\psi}^n \to \widetilde{\psi}, \end{aligned} \tag{2.9.6}$$

其中 $\widetilde{g}(u^n(t)) = (g(u^n)_1, \cdots, g(u^n)_n, 0, \cdots)$, $g(u^n) = u_{xx}^n + bu_{xxxx}^n + \sigma(u^n)_{xx}$, $g(u^n)_k = (g(u^n), e_k)$, $\widetilde{\varphi}^n = (\varphi_1^n, \cdots, \varphi_n^n, 0, \cdots)$, $\widetilde{\psi}^n = (\psi_1^n, \cdots, \psi_n^n, 0, \cdots)$, $\varphi_k^n = (\varphi, e_k)$, $\psi_k^n = (\psi, e_k)$, $k = 1, \cdots, n$.

因为 $\sigma''(s)$ 是局部 Lipschitz 连续, 对于任意的 $u,v\in S^n$,

$$\|g(u)-g(v)\|_{X^n}\leqslant\|g(u)-g(v)\|_{L(0,1)}\leqslant L\|u-v\|_S=L\|u-v\|_{S^n},\tag{2.9.7}$$

其中 L 是一局部 Lipschitz 常数, 即 $g(u):S^n\mapsto X^n$ 是局部 Lipschitz 连续. 由于 X^n 和 $\mathbb{R}^n$ 是同构和同胚的, 根据在 $\mathbb{R}^n$ 中的标准的常微分方程组解的存在定理, 问题 (2.9.6) 对于每一个 n 存在唯一连续解 $\widetilde{u}^n(t)=(u_1^n(t),\cdots,u_n^n(t),0,\cdots)\in\widetilde{S}$. 用 J_n 表示 $\widetilde{u}^n(t)$ 存在的最大区间.

第二步, 解的连续性引理. 我们考虑下列方程组:

$$\begin{aligned}&\ddot{\widetilde{u}}(t)=\widetilde{g}(u(t)),\quad t>0,\\&\widetilde{u}(0)=\widetilde{\varphi},\quad \dot{\widetilde{u}}(0)=\widetilde{\psi},\end{aligned}\tag{2.9.8}$$

其中 $\widetilde{u}(t)=(u_1(t),\cdots,u_k(t),\cdots),\widetilde{g}(u)=(g(u)_1,\cdots,g(u)_k,\cdots),g(u)_k=(g(u),e_k)$, $k=1,2,\cdots$, $g(u)=u_{xx}+bu_{xxxx}+\sigma(u)_{xx}$.

引理 2.9.1 设

(i) 定理 2.9.1 的条件成立.

(ii) 问题 (2.9.8) 的解 $\widetilde{u}(t)$ 在区间 $J=[0,d)$ 或 $J=[0,d](d\geqslant 0)$ 上存在, $\widetilde{u}\in L^\infty(J;\widetilde{S})\cap W^{2,\infty}(J;l^2)$, 对应的 $u(t)$ 是问题 (2.9.1), (2.9.4), (2.9.3) 在 J 上的解且 $u\in L^\infty\ (J;S)\cap W^{2,\infty}(J;L^2(0,1))$. 问题 (2.9.6) 的解在区间 $[0,d_n]$ 上存在, $[0,d_n]\subset J_n$, $\{d_n\}\subset J, d_n\to d\ (n\to\infty)$ 和 $\|\widetilde{u}^n(t)-\widetilde{u}(t)\|_{\tilde{S}}<\theta$, $t\in[0,d_n]$, 其中 θ 是一不依赖于 n 和 d_n 的正常数.

(iii) 存在一个有界开球 $Q\subset\mathbb{R}\times\widetilde{S}$, 使得 $\widetilde{u}(t)$ 的图在 $J:G=\{(t,\widetilde{u}(t))|t\in J\}\subset Q$ 上且距离 $\rho(\partial Q,G)=\inf\{|\tau-t|+\|\widetilde{v}-\widetilde{u}(t)\|_{\tilde{S}}|(\tau,\widetilde{v})\in\partial Q,t\in J\}\geqslant 3\theta$. 则存在一仅依赖于 θ 的正常数 $d',d'>d$, 并存在 $\{u^n\}$ 的一子序列, 仍表示为 $\{u^n\}$, 使得 $\widetilde{u}^n(t),\widetilde{u}(t)$ 直至 $[0,d']$ 上都连续, 且

$$\|\widetilde{u}^n(t)-\widetilde{u}(t)\|_{\tilde{S}}<3\theta,\quad t\in[0,d'].\tag{2.9.9}$$

同时, 对于对应的 $u^n(t)$ 和 $u(t)$, 有当 $n\to\infty$ 时,

在$L^\infty([0,d'];S)$中, u^n弱 $*$ 收敛于u, (2.9.10)

在$L^\infty([0,d'];L^2(0,1))$中, $u_{t^k}^n$弱 $*$ 收敛于$u_{t^k}, k=1,2$, (2.9.11)

其中 u 是问题 (2.9.1), (2.9.4), (2.9.3) 在 $[0,d']$ 上的广义解且

$$u\in L^\infty([0,d'];S)\cap W^{2,\infty}([0,d'];L^2(0,1)).\tag{2.9.12}$$

证明 对于任意的 $b_0:0\leqslant b_0<d$ (特别地, 当 $d=0$ 时, $b_0=0$), 由于 $d_n\to d\ (n\to\infty)$, 不失一般性, 我们假定 $b_0<d_n<d$, $n=1,2,\cdots$(特别地, 当 $d=0,n=1,2,\cdots$ 时, $d_n=0$).

考虑以下方程组

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\widetilde{v}}^n(t)=\widetilde{g}(v^n(t)), \quad t>0, \\
&\widetilde{v}^n(0)=\widetilde{u}^n(b_0), \quad \dot{\widetilde{v}}^n(0)= \dot{\widetilde{u}}^n(b_0).
\end{aligned} \tag{2.9.13}
$$

$\mathbb{R}\times\widetilde{S}$ 中的图 G 的 δ 邻域由下式定义

$$
G(\delta)=\{(\tau,\widetilde{w})\in\mathbb{R}\times\widetilde{S}|\rho((\tau,\widetilde{w}),G)<\delta\} \quad (\delta>0).
$$

$\mathbb{R}\times\widetilde{S}^n$ 中的 $(b_0,\widetilde{u}^n(b_0))$ 的 θ 邻域和 $\mathbb{R}\times\widetilde{S}^n$ 中 $(b_0,u^n(b_0))$ 的 θ 邻域分别由下列定义

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mu}_n(\theta)=\{(\tau,\widetilde{w})\in\mathbb{R}\times\widetilde{S}^n\big||\tau-b_0|+\|\widetilde{w}-\widetilde{u}^n(b_0)\|_{\tilde{S}}<\theta\}, \\
&\mu_n(\theta)=\{(\tau,w)\in\mathbb{R}\times S^n\big||\tau-b_0|+\|w-u^n(b_0)\|_S<\theta\}.
\end{aligned} \tag{2.9.14}
$$

显然, $(\tau,\widetilde{w})\in\widetilde{\mu}_n(\theta)$ 当且仅当 $(\tau,w)\in\mu_n(\theta)$.

对于任意的 $(\tau,\widetilde{w})\in\widetilde{\mu}_n(\theta)$, 由式 (2.9.14) 和引理 2.9.1 推出

$$
\rho((\tau,\widetilde{w}),(b_0,\widetilde{u}(b_0)))\leqslant|\tau-b_0|+\|\widetilde{w}-\widetilde{u}^n(b_0)\|_{\tilde{S}}+\|\widetilde{u}^n(b_0)-\widetilde{u}(b_0)\|_{\tilde{S}}<2\theta,
$$

即 $\widetilde{\mu}_n(\theta)\subset G(2\theta)$. 所以对于任意的 $(\tau,w)\in\mu_n(\theta)$,

$$
\begin{aligned}
C_n(\theta)=&\sup_{(\tau,w)\in\mu_n(\theta)}\|g(w)\|_{X^n}\leqslant\sup_{(\tau,w)\in\mu_n(\theta)}\|g(w)\| \\
\leqslant& C\sup_{(\tau,w)\in\mu_n(\theta)}\|w\|_S\leqslant M_1.
\end{aligned} \tag{2.9.15}
$$

此处和以后我们以 M 和 M_1 表示仅依赖于 θ 的不同的常数. 从式 (2.9.7) 看出 $g(w)=w_{xx}+bw_{xxxx}+\sigma(w)_{xx}:S^n\mapsto X^n$ 在 $\mu_n(\theta)$ 上 Lipschitz 连续. 因此从标准的常微分方程解的存在唯一性定理推出问题 (2.9.13) 的解 $\widetilde{v}^n(t)$ 在 $[0,h]\subset[0,h_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ 上存在, 其中 $h=\min\{\theta,\theta/M_1\}\leqslant h_n=\min\{\theta,\theta/C_n(\theta)\}$. 当 $t\in[0,h]$ 时, $(t,\widetilde{v}^n(t))\in\widetilde{\mu}^n(\theta)\subset G(2\theta)$. 在问题 (2.9.13) 中, 选 $b_0=\max\{0,d-h/2\},d'=b_0+h$, 于是 $d'\geqslant d+h/2>d$. 令

$$
\widetilde{u}^n(t)=\begin{cases}\widetilde{u}^n(t), & 0\leqslant t<b_0,\\ \widetilde{v}^n(t-b_0), & b_0\leqslant t\leqslant d'.\end{cases} \tag{2.9.16}
$$

简单验证看出, $\widetilde{u}^n(t)$ 是问题 (2.9.13) 在 $[0,d']$ 上的解, 即 $\widetilde{u}^n(t)$ 从 $[0,d_n]$ 到 $[0,d']$ 是连续的, 且 $(t,\widetilde{u}^n(t))\in G(2\theta)$, $t\in[0,d']$ $(n=1,2,\cdots)$. 所以对于所有的 $t\in[0,d']$, 得

$$
\begin{aligned}
&\|u^n(t)\|_S+\|\sigma(u^n(t))_{xx}\|_{L^2(0,1)}\leqslant M, \\
&\|u^n_{tt}(t)\|_{L^2(0,1)}=\|\ \ddot{\widetilde{u}}^n(t)\|_{l^2}=\|g(u^n(t))\|_{L^2(0,1)}\leqslant M, \\
&\|u^n_t(t)\|_{L^2(0,1)}\leqslant\|\psi^n\|_{L^2(0,1)}+\int_0^t\|g(u^n(\tau))\|_{L^2(0,1)}d\tau\leqslant M.
\end{aligned} \tag{2.9.17}
$$

由式 (2.9.17) 知, $\{u^n\}$ 存在子序列, 仍记为 $\{u^n\}$, 使得式 (2.9.10) 和式 (2.9.11) 成立, 极限函数 u 具有性质 (2.9.12), 且当 $n \to \infty$ 时,

$$\text{在 } C([0,d'];L^2(0,1))\text{中, } u^n \to u, \text{ 在 } C([0,d'];l^2)\text{中, } \widetilde{u}^n \to \widetilde{u}. \tag{2.9.18}$$

事实上, 由式 (2.9.17) 推出, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&u^n \to u \quad \text{在} \quad L^2([0,d'];L^2(0,1))\text{中是强收敛},\\
&\|u^n(t)-u(t)\|^2_{L^2(0,1)} \to 0 \quad \text{在}L^1[0,d'] \text{ 中是强收敛和在}[0,d']\text{上是几乎处处收敛},\\
&\left|\frac{d}{dt}(\|u^n(t)-u(t)\|^2_{L^2(0,1)})\right| = 2|(u^n-u,u^n_t-u_t)|\\
&\leqslant 2\|u^n(t)-u(t)\|_{L^2(0,1)}\|u^n_t(t)-u_t(t)\|_{L^2(0,1)} \leqslant M, \quad t\in[0,d'].
\end{aligned} \tag{2.9.19}$$

根据式 (2.9.19) 和 Ascoli-Arzelá 定理知, $\{u^n\}$ 存在子序列, 仍记为 $\{u^n\}$, 使得式 (2.9.18) 成立.

式 (2.9.6) 两端对 t 积分给出

$$\begin{aligned}
&\dot{u}^n_k(t) = (k\pi)^2\int_0^t \{[b(k\pi)^2-1]u^n_k(\tau) - \sigma(u^n(\tau))_k\}d\tau + \psi_k, \quad t>0,\\
&u^n_k(0) = \varphi_k, \quad k=1,2,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{2.9.20}$$

根据式 (2.9.18), (2.9.10) 和式 (2.9.11) 得, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&|\sigma(u^n(t))_k - \sigma(u(t))_k| \leqslant \|\sigma(u^n(t))-\sigma(u(t))\|_{L^2(0,1)} \leqslant M\|u^n(t)-u(t)\|_{L^2(0,1)} \to 0,\\
&\dot{u}^n_k(t) = (u^n_t, e_k) \to (u_t, e_k) = \dot{u}_k(t)
\end{aligned} \tag{2.9.21}$$

在 $[0,d']$ 上是一致的, $k=1,2,\cdots$.

在式 (2.9.20) 中令 $n\to\infty$ 时, 发现由式 (2.9.21) 知, $\widetilde{u}(t)$ 满足

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_k(t) = (k\pi)^2\int_0^t \{[b(k\pi)^2-1]u_k(\tau) - \sigma(u(\tau))_k\}d\tau + \psi_k, \quad t\in[0,d'],\\
&u_k(0) = \varphi_k, \quad k=1,2,\cdots.
\end{aligned} \tag{2.9.22}$$

方程 (2.9.22) 两端对 t 求导, 得出 $\widetilde{u}(t) = (u_1(t),\cdots,u_k(t),\cdots)$ 是问题 (2.9.8) 在 $[0,d']$ 上的解.

改写方程组 (2.9.8) 如下

$$\begin{aligned}
&(u_{tt}-u_{xx}-bu_{xxxx}-\sigma(u)_{xx}, e_k) = 0, \quad t>0,\\
&(u(0),e_k) = (\varphi,e_k), \quad (u_t(0),e_k) = (\psi,e_k), \quad k=1,2,\cdots.
\end{aligned} \tag{2.9.23}$$

因为当 $t\in[0,d']$ 时, $u_{tt}-u_{xx}-bu_{xxxx}-\sigma(u)_{xx}\in L^2(0,1)$, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ 在 $L^2(0,1)$ 和 S 中稠密, 由式 (2.9.23) 得到

$$\begin{aligned}&u_{tt}-u_{xx}-bu_{xxxx}=\sigma(u)_{xx},\quad u\in L^2(0,1),\quad t\in[0,d'],\\&\text{在 } S\text{中}, u(0)=\varphi,\ \text{在 } L^2(0,1)\text{中}, u_t(0)=\psi,\end{aligned}\tag{2.9.24}$$

即 u 是问题 (2.9.1)–(2.9.3) 在 $[0,d']$ 上的解.

注意到当 $t\in[0,h]$ 时, $(t,\tilde v^n(t))\in\tilde\mu_n(\theta)\subset G(2\theta)$, 于是

$$\begin{aligned}\|\tilde u(t)-\tilde u(b_0)\|_{\tilde S}&\leqslant\|\tilde u(t)-\tilde u(b_0)\|_{L^\infty([b_0,d'];\tilde S)}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\|\tilde u^n(t)-\tilde u^n(b_0)\|_{L^\infty([b_0,d'];\tilde S)}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\|\tilde v^n(t-b_0)-\tilde u^n(b_0)\|_{L^\infty([b_0,d'];\tilde S)}\\&<\theta,\quad t\in[b_0,d'].\end{aligned}\tag{2.9.25}$$

由式 (2.9.25) 和引理 2.9.1 的假定 (ii) 得到, 当 $t\in[0,d']$ 时, $(t,\tilde u(t))\in G(\theta)$, 且

$$\begin{aligned}\|\tilde u^n(t)-\tilde u(t)\|_{\tilde S}&\leqslant\|\tilde u^n(t)-\tilde u^n(b_0)\|_{\tilde S}+\|\tilde u^n(b_0)-\tilde u(b_0)\|_{\tilde S}+\|\tilde u(b_0)-\tilde u(t)\|_{\tilde S}\\&<3\theta,\quad t\in[b_0,d'].\end{aligned}$$

因此,

$$\|\tilde u^n(t)-\tilde u(t)\|_{\tilde S}<3\theta,\quad t\in[0,d'].$$

引理 2.9.1 证毕. □

第三步, 解的逐步连续性. 首先, 选择 $d=0, J=[0,0]$(一个单独点) 和在引理 2.9.1 中 $d_n=0\ (n=1,2,\cdots)$, 显然问题 (2.9.8) 有满足条件 $\dot{\tilde u}(0)=\widetilde\psi$ 的解 $\widetilde u(t)=\widetilde\varphi, t\in J$; 对应的函数 $u(t)=\varphi\ (\in S)$ 是问题 (2.9.1)–(2.9.3) 在 J 上满足条件 $u_t(0)=\psi$ 的解且问题 (2.9.6) 存在满足条件 $\dot{\widetilde u}^n(0)=\widetilde\psi^n\ (n=1,2,\cdots)$ 的解 $\widetilde u^n(t)=\widetilde\varphi^n, t\in[0,d_n]$. 根据问题 (2.9.6), $\|\widetilde\varphi^n-\widetilde\varphi\|_{\tilde S}<\theta$, 其中 θ 是不依赖于 n 的正常数. 我们选择一有界开球 $Q_1\subset\mathbb R\times\widetilde S$, 使得 $(0,\widetilde\varphi)\in Q_1$ 和 $\rho(\partial Q_1,(0,\widetilde\varphi))\geqslant3\theta$, 那么引理 2.9.1 的条件成立. 因此, 存在一个仅依赖于 θ 的正常数 b_1 和一个子序列 $\{\widetilde u^{1,n}\}\subset\{\widetilde u^n\}$, 使得 $\widetilde u^{1,n}(t)$ 和 $\widetilde u(t)$ 在 $[0,b_1]$ 上是整体连续的, 以及式 (2.9.10)–(2.9.12), (2.9.18) 成立 (那里分别用 $u^{1,n}$ 和 b_1 代替 u^n 和 d').

其次, 选择子序列 $\{b_{1n}\}\subset[0,b_1], b_{1n}\to b_1\ (n\to\infty)$. 由式 (2.9.9) 知

$$\|\widetilde u^{1,n}(t)-\widetilde u(t)\|_{\tilde S}<\theta_1\ (=3\theta),\quad t\in[0,b_{1n}].$$

再选择一有界开球 $Q_2\subset\mathbb R\times\widetilde S$, 使得 $Q_1\subset Q_2$, 在 $[0,b_1]$ 上 $\widetilde u(t)$ 的曲线图

$$G_1=\{(t,\widetilde u(t))|t\in[0,b_1]\}\subset Q_2$$

和

$$\rho(\partial Q_2,G_1)\geqslant3\theta_1\ (=3^2\theta).$$

所以, 根据引理 2.9.1 存在一正常数 $b_2 > b_1$ 和一子序列 $\{\widetilde{u}^{2,n}\} \subset \{\widetilde{u}^{1,n}\}$, 使得 $\widetilde{u}^{2,n}(t), \widetilde{u}(t)$ 在 $[0, b_2]$ 上整体连续, 且式 (2.9.10)–(2.9.12), (2.9.18) 成立 (那里分别用 $u^{2,n}, 3^2\theta$ 和 b_2 代替 u^n, θ 和 d').

重复以上过程, 得到一系列有界开球 $Q_m : Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \subset Q_m \subset \cdots$, 当 $m \to \infty$ 时, Q_m 的直径趋向无穷, 一单增序列 $\{b_m\}$ 和子序列 $\{\widetilde{u}^{m,n}\} : \{\widetilde{u}^{m,n}\} \subset \{\widetilde{u}^{m-1,n}\} \subset \cdots \subset \{\widetilde{u}^n\}$, 使得 $\widetilde{u}^{m,n}(t)$ 和 $\widetilde{u}(t)$ 在 $[0, b_m]$ 上整体连续, 其中 b_m 是仅依赖于 m 和 θ 的正常数, 且式 (2.9.10)–(2.9.12), (2.9.18) 成立 (那里分别用 $u^{m,n}, 3^m\theta$ 和 b_m 代替 u^n, θ 和 d').

因为 $\{b_m\}$ 是单增的, 它有极限 $T^0 \leqslant \infty$. 按照标准的对角线法则, 选一对角序列 $\{\widetilde{u}^{n,n}\}$, 使得对于任意的紧子区间 $\widetilde{J}^0 \subset J^0 = [0, T^0)$, 式 (2.9.10)–(2.9.12), (2.9.18) 成立 (那里分别用 $\widetilde{J}^0$ 和 $u^{n,n}$ 代替 $[0, d']$ 和 u^n), 并有 $\lim_{n\to\infty} \inf J_{nn} \supset J^0$. 由 $\widetilde{J}^0 \subset J^0$ 的任意性看出 $u \in L^\infty([0,T]; S) \cap W^{2,\infty}([0,T]; L^2(0,1))$ $(T < T^0)$ 是问题 (2.9.1)–(2.9.3) 在 J^0 上的广义解.

现在证明 $J^0 = [0, T^0)$ 是 $\widetilde{u}(t)$ 存在的最大时间区间.

事实上, 如果 $T^0 = \infty$, 所证事实是显然的. 如果 $T^0 < \infty$, 当 $\widetilde{u}(t)$ 可以通过 T^0 向右连续延拓时, 则

$$\sup_{0\leqslant t<T^0} \|\widetilde{u}(t)\|_{\widetilde{S}} = \sup_{0\leqslant t<T^0} \|u(t)\|_S < \infty. \tag{2.9.26}$$

选择一序列 $\{d_m\} \subset [0, T^0), d_m \to T^0$ $(m \to \infty)$, 则存在一正常数 α, 使得对于任意的 m, n,

$$\|\widetilde{u}^{n,n}(t) - \widetilde{u}(t)\|_{\widetilde{S}} < \alpha, \quad t \in [0, d_m]. \tag{2.9.27}$$

事实上, 因为 $S = S^*$(S 的对偶空间), 对于任意的 $\eta \in S \subset L^2(0,1), \|\eta\|_S = 1$ 和任意的 $T : 0 < T < T^0$, 根据式 (2.9.18)(在那里用 T 代替 d'), 当 $n \to \infty$ 时,

$$(u^{n,n}(t), \eta) \to (u(t), \eta)$$

在 $[0, T]$ 上是一致的. 因此, 当 n 充分大时, 有

$$|(u^{n,n}(t), \eta)| \leqslant |(u(t), \eta)| + 1 \leqslant \|u(t)\|_S + 1, \quad t \in [0, T]. \tag{2.9.28}$$

由式 (2.9.28) 和 T 的任意性得

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t<T^0} \|\widetilde{u}^{n,n}(t) - \widetilde{u}(t)\|_{\widetilde{S}} &\leqslant \sup_{0\leqslant t<T^0} \|\widetilde{u}^{n,n}(t)\|_{\widetilde{S}} + \sup_{0\leqslant t<T^0} \|\widetilde{u}(t)\|_{\widetilde{S}} \\ &\leqslant 2 \sup_{0\leqslant t<T^0} \|\widetilde{u}(t)\|_{\widetilde{S}} + 1.\end{aligned} \tag{2.9.29}$$

由式 (2.9.29) 和式 (2.9.26) 推出式 (2.9.27).

根据式 (2.9.26) 和式 (2.9.27) 可以在上面所述的序列 $\{Q_m\}$ 中选出一有界开球 Q_{m_0}, 使得在 $J^0=[0,T^0)$ 上 $\widetilde{u}(t)$ 的曲线图

$$G_{T^0}=\{(t,\widetilde{u}(t))|\ t\in J^0\}\subset Q_{m_0},$$
$$\rho(\partial Q_{m_0},G_{T^0})\geqslant 3\alpha.$$

所以依引理 2.9.1 存在一正常数 $b_{m_0}>T^0$ 和 $\{\widetilde{u}^{n,n}\}$ 的一子序列, 仍记为 $\{\widetilde{u}^{n,n}\}$, 使得 $\widetilde{u}^{n,n}(t)$ 和 $\widetilde{u}(t)$ 在 $[0,b_{m_0}]$ 上整体连续, 以及式 (2.9.10)–(2.9.12), 或式 (2.9.18) 成立 (在那里分别用 $u^{n,n},\alpha$ 和 b_{m_0} 代替 u^n,θ 和 d'), 这与事实 $T^0=\sup\{b_m\}$ 矛盾. 所以 $J^0=[0,T^0)$ 是 $\widetilde{u}(t)$ 存在的最大时间区间.

由上面所述过程, 推出如果

$$\sup_{0\leqslant t<T^0}\|\widetilde{u}(t)\|_{\tilde{S}}=\sup_{0\leqslant t<T^0}\|u(t)\|_S<\infty,$$

则 $T^0=\infty$. 否则, 重复上面的过程知, 存在一正常数 $b_{m_0}>T^0$, 使得 $\widetilde{u}(t)$ 对 $[0,b_{m_0}]$ 连续, 这与事实 $[0,T^0)$ 是 $\widetilde{u}(t)$ 存在的最大时间区间矛盾. □

定理 2.9.2 的证明　取 $e_0=1/2,e_k=\cos k\pi x\ (k=1,2,\cdots)$, 于是 $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ 构成 $L^2(0,1)$ 中一正交基, 对于任意 $f\in L^2(0,1),f=\sum_{k=0}^{\infty}f_ke_k$, 其中 $f_0=4(f,e_0),f_k=2(f,e_k),\ k=1,2,\cdots$. 令 $\widetilde{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_k,\cdots)$. 显然

$$\|f\|_{L^2(0,1)}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{f_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\right)\right]^{1/2}\sim\|\widetilde{f}\|_{l^2},$$

其中记号 “∼” 表示“等价”. 由于 D 是一 Hilbert 空间, $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ 也是 D 中一正交基, 对于任意的 $f\in D$, 在 D 中 $f=\sum_{k=0}^{\infty}f_ke_k$, 令 $\widetilde{D}=\{\widetilde{f}\in l^2|(0,\pi^4f_1,\cdots,(k\pi)^4f_k,\cdots)\in l^2\}$ 并在 $\widetilde{D}$ 中赋予范数

$$\|\widetilde{f}\|_{\tilde{D}}=\|f\|_D=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{f_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k\pi)^8)f_k^2\right)\right]^{1/2},$$

那么 $\widetilde{D}$ 和 D 是等距同构的, $\widetilde{D}$ 也是一 Hilbert 空间. 令 X^n 和 D^n 是分别由 $\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$ 张成 $L^2(0,1)$ 和 D 中的子空间, 再令算子 $P_n:L^2(0,1)\mapsto X^n$ 是一正交投影, 即对于任意的 $f\in L^2(0,1),P_nf=f^n=\sum_{k=0}^{n}f_ke_k$. 设 $\widetilde{f}^n=(f_0,f_1,\cdots,f_n,0,\cdots)$, $\widetilde{D}^n=\{\widetilde{f}^n\in l^2|(0,\pi^4f_1,\cdots,(n\pi)^4f_n,0,\cdots)\in l^2\}$, 于是 $\|f^n\|_{X^n}=\|f^n\|_{L^2(0,1)}\sim\|\widetilde{f}^n\|_{l^2},\|\widetilde{f}^n\|_{\tilde{D}^n}=\|f^n\|_{D^n}$.

在上面处理的基础上, 应用证明定理 2.9.1 的同样方法, 容易得到定理 2.9.2 的结论. □

2.9.4 解的爆破

下面讨论问题 (2.9.1)–(2.9.3) 解的爆破.

定理 2.9.3 的证明 方程 (2.9.1) 两端同乘以 $\dfrac{\pi}{2}\sin\pi x$, 在 (0,1) 上对 x 进行积分再分部积分, 并应用 Jensen 不等式, 得到

$$\begin{aligned}&\ddot{y}(t)+\pi^2(1-b\pi^2)y(t)\geqslant -\pi^2\sigma(y(t)),\quad t>0,\\&y(0)=y_0,\quad \dot{y}(0)=y_1,\end{aligned}\tag{2.9.30}$$

其中 $y(t)=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 u(x,t)\sin\pi x dx$. 在 (0,1) 上对式 (2.9.30) 的第一个不等式积分, 给出

$$\dot{y}(t)\geqslant y_1+\pi^2\int_0^t[(b\pi^2-1)y(\tau)-\sigma(y(\tau))]d\tau.\tag{2.9.31}$$

由定理 2.9.3 的条件看出, 当 $y>y_0$ 时, $g(y)=(b\pi^2-1)y-\sigma(y)$ 是单增的, 因此

$$(b\pi^2-1)y(t)>\sigma(y(t)),\quad t>0.\tag{2.9.32}$$

事实上, 因为 $\dot{y}(0)=y_1>0$, $y(t)$ 在点 $t=0$ 的右邻域是单增的. 如果存在一点 $t_0>0$, 使得 $(b\pi^2-1)y(t)>\sigma(y(t)), t\in[0,t_0)$, $(b\pi^2-1)y(t_0)=\sigma(y(t_0))$, 那么由式 (2.9.31) 看出 $\dot{y}(t)\geqslant y_1>0$, $t\in[0,t_0]$. 所以, $y(t_0)>y_0$ 和 $g(y(t_0))>g(y_0)\geqslant 0$, 这与假定 $g(y(t_0))=0$ 矛盾, 因此式 (2.9.32) 成立.

根据式 (2.9.31) 和式 (2.9.32) 知

$$\dot{y}(t)>0,\quad y(t)>y_0\geqslant 0,\quad t>0.\tag{2.9.33}$$

式 (2.9.30) 的第一个不等式两端同乘以 $\dot{y}(t)$, 在 $(0,t)$ 上积分, 有

$$\dot{y}^2(t)\geqslant \pi^2(b\pi^2-1)(y^2(t)-y_0^2)-2\pi^2\int_{y_0}^{y(t)}\sigma(s)ds+y_1^2\equiv G(y).\tag{2.9.34}$$

由于 $G(y_0)=y_1^2>0, G'(y)=2\pi^2 g(y)\geqslant 2\pi^2 g(y_0)\geqslant 0(y\geqslant y_0)$, $G(y)\geqslant y_1^2>0(y\geqslant y_0)$, 则根据式 (2.9.33) 和式 (2.9.34) 推出

$$\frac{\dot{y}(t)}{\left[\pi^2(b\pi^2-1)(y^2(t)-y_0^2)-2\pi^2\displaystyle\int_{y_0}^{y(t)}\sigma(s)ds+y_1^2\right]^{1/2}}\geqslant 1,\quad t>0.\tag{2.9.35}$$

式 (2.9.35) 两端在 $(0,T)$ 上对 t 积分, 给出

$$T\leqslant\widetilde{T}=\int_{y_0}^{\infty}\left[\pi^2(b\pi^2-1)(y^2-y_0^2)-2\pi^2\int_{y_0}^{y}\sigma(s)ds+y_1^2\right]^{-1/2}dy\tag{2.9.36}$$

以及当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时, $y(t) \to \infty$. 这就推得定理 2.9.3 的结论. □

现在给出验证定理 2.9.1–定理 2.9.3 的两个例子.

例子 当 $\sigma(u) = au^2$ 时, 方程 (2.9.1) 变成

$$u_{tt} - u_{xx} - bu_{xxxx} = a(u^2)_{xx}, \quad b > 0. \tag{2.9.37}$$

显然, $\sigma(s) = as^2 \in C^2(\mathbb{R}), \sigma''(s)$ 是局部 Lipschitz 连续. 所以当初值 $\varphi \in S, \psi \in L^2(0,1)(\varphi \in D, \psi \in L^2(0,1))$ 时, 依照定理 2.9.1(定理 2.9.2), 问题 (2.9.37), (2.9.2), (2.9.3)((2.9.37), (2.9.3), (2.9.4)) 存在局部广义解 $u \in L^\infty([0,T];S) \cap W^{2,\infty}([0,T];L^2(0,1))$ $(u \in L^\infty([0,T];D) \cap W^{2,\infty}([0,T];L^2(0,1)))$, 其中 $0 < T < T^0, [0,T^0)$ 是 u 存在的最大时间区间, 且如果

$$\sup_{0 \leqslant t < T^0} \|u(t)\|_S < \infty \quad \left(\sup_{0 \leqslant t < T^0} \|u(t)\|_D < \infty\right),$$

则 $T^0 = \infty$.

(i) 当 $a < 0$(特别地, 当 $a = -12, b = 3$) 时, 方程 (2.9.37) 变成

$$u_{tt} - u_{xx} - 3u_{xxxx} = -12(u^2)_{xx}, \tag{2.9.38}$$

其中 $\sigma(s) = as^2$ 变成一凹函数. 如果初值 φ 和 ψ 满足

$$y_0 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin \pi x dx \geqslant \max\left\{0, \frac{b\pi^2 - 1}{a}\right\},$$
$$y_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \psi(x)\sin \pi x dx > 0,$$

则 $\sigma(y_0) = ay_0^2 \leqslant (b\pi^2 - 1)y_0, \sigma'(y) = 2ay < ay_0 \leqslant b\pi^2 - 1 \ (y > y_0)$ 和

$$\widetilde{T} = \int_{y_0}^\infty \left[\pi^2(b\pi^2 - 1)(y^2 - y_0^2) + \frac{2\pi^2|a|}{3}(y^3 - y_0^3) + y_1^2\right]^{-1/2} dy < \infty \tag{2.9.39}$$

成立. 所以, 根据定理 2.9.3, 问题 (2.9.37), (2.9.2), (2.9.3) 的解 u 在有限时刻 $\widetilde{T}$ 爆破, 即当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t)\sin \pi x dx \to \infty.$$

(ii) 当 $a > 0$ 时, 令 $w = -u$, 则 w 满足

$$\begin{aligned}
&w_{tt} - w_{xx} - bw_{xxxx} = -a(w^2)_{xx}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T^0),\\
&w(0,t) = w(1,t) = w_{xx}(0,t) = w_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T^0),\\
&w(x,0) = -\varphi(x), \quad w_t(x,0) = -\psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.
\end{aligned} \tag{2.9.40}$$

如果初值函数 $-\varphi(x)$ 和 $-\psi(x)$ 满足

$$y_0=-\frac{\pi}{2}\int_0^1\varphi(x)\sin\pi xdx\geqslant\max\left\{0,\frac{1-b\pi^2}{a}\right\},$$

$$y_1=-\frac{\pi}{2}\int_0^1\psi(x)\sin\pi xdx>0,$$

则像完成情况 (i) 时应用同样验证方法, 易知问题 (2.9.37), (2.9.2), (2.9.3) 的解 u 在有限时刻爆破 (见式 (2.9.39)), 即当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t)\sin\pi xdx=-\int_0^1 w(x,t)\sin\pi xdx\to-\infty.$$

2.9.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [94]. 与本节内容有关的文献见 [51], [36], [68], [50], [60], [32], [38], [95]–[105].

2.10 一类非线性四阶波动方程的位势井方法

2.10.1 引言

2.3 节研究了方程 (2.3.2) 的几种初边值问题解的整体存在性和不存在性. 文献 [48] 在对弹塑性微观结构进行弱分析时, 研究了一维弹塑性杆的纵振动问题, 提出如下的模型方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}=a(u_x^2)_x+f(x),\tag{2.10.1}$$

其中未知函数 $u(x,t)$ 表示位移, $f(x)$ 是给定的函数, $a<0$ 是常数, 进一步研究了方程 (2.10.1) 的特殊解、特殊解的不稳定性以及常应变解的不稳定性等, 并指出在 $f(x)=0$ 的假定下, 方程 (2.10.1) 可以化为 Bq 方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}=a(u^2)_{xx}.\tag{2.10.2}$$

本节讨论如下初边值问题

$$u_{tt}+u_{xxxx}=\sigma(u_x)_x+f(x,t),\quad x\in(0,1),\quad t>0,\tag{2.10.3}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\quad t\geqslant0,\tag{2.10.4}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in[0,1],\tag{2.10.5}$$

其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, $\sigma(s)$ 是给定的非线性函数, $f(x,t)$ 是已知函数, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是给定的初值函数且满足边界条件 (2.10.4). 下面应用位势井方法证明初边值

问题 (2.10.3)–(2.10.5) 整体弱解的存在性, 还证明整体广义解的存在唯一性和整体古典解的存在唯一性.

位势井方法首先由 Sattinger D H 于 1968 年提出 [106], 并用此方法证明了一类二阶半线性双曲型方程初边值问题整体弱解的存在性. 随后在半线性抛物型方程和半线性波动方程中得到广泛的应用, 但是方程中的非线性项一般都是半线性的或为积分型的非线性项 [57]–[61]. 此节方程中的非线性项含有导数, 即为 $\sigma(u_x)_x$.

为了书写简单起见, 本节记 $(0,1)=\Omega, \Omega_T=\Omega\times(0,T)$.

应用位势井方法研究非线性发展方程的定解问题主要证明在小初值情形下存在整体解. 证明的步骤是首先对所考虑的定解问题定义位势井, 例如记为 W, 井外集合, 例如记为 V, 并定义井的深度, 例如记为 d. 其次一般应用 Galerkin 方法, 构造所考虑定解问题的近似解, 例如记为 $u_m(x,t)$. 证明近似解存在后, 对近似解作一系列必要的估计. 最后证明近似解序列 $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ 存在子序列 $\{u_{m\nu}(x,t)\}_{\nu=1}^{\infty}$, 且当 $\nu\to\infty$ 时, $\{u_{m\nu}(x,t)\}_{\nu=1}^{\infty}$ 趋于所考虑定解问题的弱解或广义解或古典解. 有时候还要证明定解问题解的爆破或解的真空孤立现象等. 下面介绍应用位势井方法研究非线性高阶波动方程的初边值问题.

2.10.2　位势井的定义和存在性

为了定义位势井, 我们给出与方程 (2.10.3) 相关的动能和势能分别为

$$K(u_t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx=\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{2.10.6}$$

$$J(u_x,u_{xx})=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}u_{xx}^2+F(u_x)\right]dx=\frac{1}{2}\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_{\Omega}F(u_x)dx, \tag{2.10.7}$$

其中 $F(s)=\int_0^s\sigma(\rho)d\rho$. 总能量记为

$$E(t)=K(u_t)+J(u_x,u_{xx}). \tag{2.10.8}$$

在本节和 2.10.3 子节中假定非线性函数 $\sigma(s)$ 满足如下条件:

(i) $\sigma\in C^2(\mathbb{R})$ 且 $\sigma(0)=0$ 和 $\sigma'(0)\geqslant 0$, $\sigma(s)$ 在原点的邻域内不恒等于零;

(ii) 存在常数 N_0 和 c, $0<c<\dfrac{1}{2}$, 使得对于 $s\in\mathbb{R}$ 成立

$$cs\sigma(s)-F(s)\leqslant N_0. \tag{2.10.9}$$

注 2.10.1　满足条件 (i) 和 (ii) 的 $\sigma(s)$ 是存在的, 例如 $\sigma(s)=-s^2, s^2, -s^3, s^3$ 等.

定义 2.10.1　函数 $u(x,t)$ 称为问题 (2.10.3)–(2.10.5) 在区间 $[0,T)$ 上的弱解, 若 $u(x,t)$ 满足以下条件:

(1) $u:[0,T)\longmapsto H_0^2(\Omega), u_t:[0,T)\longmapsto L^2(\Omega)$, 且 $\|u\|_{L^2(\Omega)}, \|u_x\|_{L^2(\Omega)}, \|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}$ 在 $\Omega\times[0,T)$ 的每一个紧子集上一致有界;

(2) 对于任意的 $t\in[0,T)$ 和任意的 $\nu\in L^2(\Omega)$ 成立

$$\int_\Omega [u(x,t)-\varphi(x)]\nu(x)dx=\int_0^t\int_\Omega u_t(x,\tau)\nu(x)dxd\tau; \tag{2.10.10}$$

(3) 对任意 $t\in[0,T)$, $\eta:[0,T)\mapsto H_0^2(\Omega)$ 具有 (1), (2) 中 u 所具有的性质 (还满足在式 (2.10.10) 中用 $\eta(x,0)$ 代 $\varphi(x)$ 的性质) 时, 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [u_t(x,t)\eta(x,t)-\psi(x)\eta(x,0)]dx-\int_0^t\int_\Omega [u_\tau(x,\tau)\eta_\tau(x,\tau)\\&+u_{xx}(x,\tau)\eta_{xx}(x,\tau)+\sigma(u_x(x,\tau))\eta_x(x,\tau)-f(x,\tau)\eta(x,\tau)]dxd\tau=0;\end{aligned} \tag{2.10.11}$$

(4) 对于每个 t, $0\leqslant t<T$, 成立

$$E(t)\leqslant E(0)+2\sqrt{2E(0)+\left(\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2}\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt, \tag{2.10.12}$$

其中

$$E(0)=\frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\varphi_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_\Omega F(\varphi_x)dx$$

为初始总能量, $E(t)$ 由式 (2.10.8) 给定.

函数 $u(x,t)$ 称为问题 (2.10.3)–(2.10.5) 的整体弱解, 如果它对 $t\in[0,\infty)$ 或对任意的 $T>0, t\in[0,T]$ 满足上述条件 (1)–(4).

记 $j(\lambda)=J(\lambda u_x,\lambda u_{xx})$, 应用文献 [108] 的类似方法可证下面的引理.

引理 2.10.1 设 $u\in H_0^2(\Omega),\sigma(u)$ 满足假定条件 (i), 则 $j(\lambda)$ 关于 λ 二次连续可导, 且

$$j'(\lambda)=\lambda\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_\Omega u_x\sigma(\lambda u_x)dx, \tag{2.10.13}$$

$$j''(\lambda)=\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_\Omega u_x^2\sigma'(\lambda u_x)dx. \tag{2.10.14}$$

注 2.10.2 若 $\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}>0$, 由于 $j(0)=j'(0)=0, j''(0)>0$, 则 $j(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 的小邻域内是上凹函数.

引理 2.10.2 若 $f(x,t)=0$, $u_0\equiv 0$ 是方程 (2.10.3) 的稳态解, 则方程 (2.10.3) 的稳态解是 $J(u_x,u_{xx})$ 的极小值点. 我们总假定 $J(u)$ 在 $u_0\equiv 0$ 处取极小值.

定义 2.10.2 定义

$$d=\inf_{\substack{u\in H_0^2(\Omega)\\ u,u_x\neq 0}} J(\lambda_1 u_x,\lambda_1 u_{xx}), \tag{2.10.15}$$

其中 $\lambda_1 = \lambda_1(u)$ (> 0) 是 $J(\lambda u_x, \lambda u_{xx})$ 对于 $\lambda > 0$ 开始递减的第一个值.

引理 2.10.3 设泛函 $J(u_x, u_{xx})$ 在 $u_0 \equiv 0$ 有局部极小, 又设 $\sigma(s)$ 满足假定条件 (i), (ii), 则 $d > 0$.

根据引理 2.10.3 定义位势井如下.

定义 2.10.3 称集合 $W = \{u | u \in H_0^2(\Omega),\ 0 \leqslant J(\lambda u_x, \lambda u_{xx}) < d,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ 为初边值问题 (2.10.3)–(2.10.5) 的位势井, 其中 d 称为位势井 W 的深度.

由引理 2.10.3 和 d 的定义显然有 $0 < d \leqslant \infty$.

引理 2.10.4 若 $d < \infty$ 时, 则位势井 W 是 $H_0^2(\Omega)$ 中的有界集.

引理 2.10.5 设 $\sigma(s)$ 满足条件 (i) 和 (ii), 则泛函 $J(u_x, u_{xx})$ 和 $K(u_t)$ 关于其变量连续.

2.10.3 问题 (2.10.3)–(2.10.5) 整体弱解的存在性

我们应用 Galerkin 方法建立初边值问题 (2.10.3)–(2.10.5) 的整体弱解. 设 $\{y_i(x)\}$ 是由特征值问题

$$\begin{aligned} &y^{(4)} = \mu y, \quad x \in \Omega, \\ &y(0) = y(1) = 0, \quad y_x(0) = y_x(1) = 0 \end{aligned} \tag{2.10.16}$$

的特征值 μ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 对应的特征函数构成的 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基.

令初边值问题 (2.10.3)–(2.10.5) 的 Galerkin 近似解为

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} q_{mi}(t) y_i(x), \tag{2.10.17}$$

使其满足

$$(u_{mtt}, y_i) + (u_{mx^4}, y_i) - (\sigma(u_{mx})_x, y_i) = (f, y_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad t \in [0, T] \tag{2.10.18}$$

或

$$\ddot{q}_{mi} + \mu_i q_{mi} + (\sigma(u_{mx}), y_{ix}) = (f, y_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad t \in [0, T] \tag{2.10.19}$$

和

$$q_{mi}(0) = \alpha_{mi}, \quad \dot{q}_{mi}(0) = \beta_{mi}, \tag{2.10.20}$$

其中 $q_{mi}(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为待定函数, α_{mi}, β_{mi} $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为常数. 并设当 $m \to \infty$ 时,

$$\varphi_m(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{mi} y_i(x) \to \varphi(x)\text{在}H_0^2(\Omega)\text{中强收敛}; \tag{2.10.21}$$

$$\psi_m(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{mi} y_i(x) \to \psi(x)\text{在}L^2(\Omega)\text{中强收敛}. \tag{2.10.22}$$

引理 2.10.6 设函数 $\sigma(s)$ 满足假定条件 (i) 和 (ii), $f \in L^1([0,\infty);L^2(\Omega)), \varphi \in W, \psi \in L^2(\Omega)$ 且

$$
\begin{aligned}
&K(\psi)+J(\varphi_x,\varphi_{xx}) \\
&\quad +2\sqrt{2(K(\psi)+J(\varphi_x,\varphi_{xx}))+\left(\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2}\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt \\
&< d_0,
\end{aligned}
\tag{2.10.23}
$$

其中当 $d<\infty$ 时, $d=d_0$, 当 $d=\infty$ 时,

$$
\begin{aligned}
d_0 = &K(\psi)+J(\varphi_x,\varphi_{xx}) \\
&+2\sqrt{2(K(\psi)+J(\varphi_x,\varphi_{xx}))+\left(\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2}\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt+1,
\end{aligned}
$$

则初值问题 (2.10.19), (2.10.20) 存在整体解 $q_{mi}(t) \in C^2[0,\infty)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 且对于 $t \geqslant 0, u_m \in W_0$, 成立

$$
K(u_{mt})+J(u_{mx},u_{mxx})<d+2\left[2E(0)+\left(\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2\right], \tag{2.10.24}
$$

其中 $W_0=\{u|u\in H_0^2(\Omega), 0\leqslant J(\lambda u_x,\lambda u_{xx})<d_0, 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$.

证明 用 $q(t)=(q_1(t),\cdots,q_m(t))$ 表示由特征函数 $y_1(x),\cdots,y_m(x)$ 张成的 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中的点, 则 $\mathbb{R}^m$ 中的任一元素 $\overline{u}_m(x,t)$ 可表为 $\overline{u}_m(x,t)=\sum_{i=1}^m q_i(t)y_i(x)$. 由引理 2.10.2 知 $J(0,0)=0$, J 在 $q(t)=0$ 有局部极小, $J(q)=J(q_1,\cdots,q_m)=J(\overline{u}_{mx},\overline{u}_{xx})$ 在原点的邻域为正.

现在证明问题 (2.10.19), (2.10.20) 存在局部解. 由假定知 $\varphi\in W_0$, 容易证明存在正整数 m_0 使得

$$
\varphi_m(x)\in W_0, \quad \forall m\geqslant m_0. \tag{2.10.25}
$$

根据假设 (2.10.21) 和 (2.10.22) 可推出, 当 $m\to\infty$ 时,

$$
J(\varphi_{mx},\varphi_{mxx})\to J(\varphi_x,\varphi_{xx}), \tag{2.10.26}
$$

$$
K(\psi_m)\to K(\psi). \tag{2.10.27}
$$

结合式 (2.10.26), (2.10.27) 和式 (2.10.23) 可得

$$
\begin{aligned}
&K(\psi_m)+J(\varphi_{mx},\varphi_{mxx}) \\
&\quad +2\sqrt{2(K(\psi_m)+J(\varphi_{mx},\varphi_{mxx}))+\left(\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2}\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt \\
&< d_0, \quad \forall m\geqslant m_0.
\end{aligned}
\tag{2.10.28}
$$

易知 W_0 是 $H_0^2(\Omega)$ 中的有界集. 事实上, 当 $d<\infty$ 时, $W_0=W$, 由引理 2.10.3 知 W_0 是有界集; 当 $d=\infty$ 时, 容易证明 W_0 也是 $H_0^2(\Omega)$ 中的有界集. 因为对于 $m>m_0$, $\varphi_m\in W_0\cap\mathbb{R}^m\subset H_0^2(\Omega)$, 所以存在常数 $b>0$ 使得

$$|\alpha_{mi}|<b \quad (i=1,2,\cdots,m;m\geqslant m_0).$$

另外, 由式 (2.10.23) 可得 $|\beta_{mi}|<\sqrt{2d_0}$, $\forall m\geqslant m_0$. 由 σ 和 f 的假定易知 $(\sigma(u_{mx}),y_{ix})$ 关于 $q(t)$ 满足局部 Lipschitz 条件, 所以根据常微分方程的理论, 问题 (2.10.19), (2.10.20) 存在局部解 $(q_{m1}(t),q_{m2}(t),\cdots,q_{mm}(t))\in C^2[0,t_m],t_m>0$.

为了证明问题 (2.10.19), (2.10.20) 存在整体解, 现在证明, 对于 $0\leqslant t\leqslant t_m$ 和 $m\geqslant m_0$,

$$u_m(t)\in W_0. \tag{2.10.29}$$

事实上, 固定 $m\geqslant m_0$, 且假定式 (2.10.29) 不成立, 则存在 $t'\in[0,t_m)$ 使得 $u_m(t')\notin W_0$. 令 $t^*=\inf\{t'\in[0,t_m);u_m(t')\notin W_0\}$. 由于集合 W_0 在 $H_0^2(\Omega)$ 中是开集, 当 $m\geqslant m_0$ 时, $\varphi_m\in W_0$ 和 $u_m(t)$ 在 $[0,t_m)$ 上的连续性, 可知 $t^*>0$, 还根据 $u_m(t)$ 在 $[0,t_m)$ 上的连续性, 可得 $u_m(t^*)\in\partial W_0$, 其中 ∂W_0 表示 W_0 的边界, 于是

$$J(u_{mx}(t^*),u_{mxx}(t^*))=d_0. \tag{2.10.30}$$

为利用式 (2.10.30) 得出矛盾, 令

$$M=\sup_{t\in[0,t^*)}\|u_{mt}(t)\|^2. \tag{2.10.31}$$

方程 (2.10.19) 两端同乘以 $\dot{q}_{mi}$, 并对 $i=1,2,\cdots,m$ 求和, 再对 t 积分, 得

$$K(u_{mt})+J(u_{mx},u_{mxx})=K(\psi_m)+J(\varphi_{mx},\varphi_{mxx})+\int_0^t(f,u_{m\tau})d\tau. \tag{2.10.32}$$

利用 Hölder 不等式, $J(u_{mx},u_{mxx})\geqslant 0$ 和式 (2.10.31), 从式 (2.10.32) 可得

$$\frac{1}{2}M\leqslant K(\psi_m)+J(\varphi_{mx},\varphi_{mxx})+\sqrt{M}\int_0^\infty\|f\|_{L^2(\Omega)}d\tau.$$

由上式解出 $\sqrt{M}$, 得

$$\begin{aligned}0\leqslant\sqrt{M}&\leqslant\sqrt{2(K(\psi_m)+J(\varphi_{mx},\varphi_{mxx}))+\left(\int_0^\infty\|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2}+\int_0^\infty\|f\|_{L^2(\Omega)}dt\\&\leqslant 2\sqrt{2(K(\psi_m)+J(\varphi_{mx},\varphi_{mxx}))+\left(\int_0^\infty\|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2}.\end{aligned} \tag{2.10.33}$$

因为 $K(u_{mt}) \geqslant 0$, 由式 (2.10.32) 和式 (2.10.33), 再利用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
&J(u_{mx}(t^*), u_{mxx}(t^*)) \\
&\leqslant K(u_{mt}(t^*)) + J(u_{mx}(t^*), u_{mxx}(t^*)) \\
&\leqslant K(\psi_m) + J(\varphi_{mx}, \varphi_{mxx}) + \sqrt{M}\int_0^\infty \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}dt \\
&\leqslant K(\psi_m) + J(\varphi_{mx}, \varphi_{mxx}) \\
&\quad + 2\sqrt{2(K(\psi_m) + J(\varphi_{mx}, \varphi_{mxx})) + \left(\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2} \times \int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt.
\end{aligned} \tag{2.10.34}$$

从式 (2.10.28) 和式 (2.10.34) 知 $J(u_{mx}(t^*), u_{mxx}(t^*)) < d_0$, 而由式 (2.10.30) 知 $J(u_{mx}(t^*), u_{mxx}(t^*)) = d_0$. 这是一个矛盾, 所以 $u_m(t) \in W_0$.

下面证明问题 (2.10.19), (2.10.20) 存在整体解. 由于 $u_m(t_m) \in W_0$, 则 $J(q(t_m)) < d$. 这样就满足解延拓的条件, 重复前一证明过程, 可将解的定义区间延拓到 $0 \leqslant t \leqslant 2t_m$. 再重复以上步骤可得问题 (2.10.19), (2.10.20) 的整体解 $(q_{m1}(t), q_{m2}(t), \cdots, q_{mm}(t)) \in C^2[0,\infty)$ 且对于 $t \geqslant 0, u_m \in W_0$.

下面证明估计式 (2.10.24) 成立. 当 $t = 0$ 时, 式 (2.10.24) 显然成立, 所以只需证明式 (2.10.24) 在 $(0,\infty)$ 上成立即可. 记

$$M^*(t) = \sup_{s\in[0,t]} \|u_{ms}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

由于 $J(u_{mx}, u_{mxx}) \geqslant 0$ 和等式 (2.10.32), 则有

$$\frac{1}{2}M^*(t) \leqslant E(0) + \sqrt{M^*(t)}\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt, \quad \forall t \in (0,\infty).$$

从上式解得

$$\sqrt{M^*(t)} \leqslant 2\sqrt{2E(0) + \left(\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2}, \quad \forall t \in (0,\infty).$$

所以

$$K(u_{mt}) \leqslant \frac{1}{2}M^*(t) \leqslant 2\left[2E(0) + \left(\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2\right], \quad \forall t \in (0,\infty). \tag{2.10.35}$$

再由等式 (2.10.32) 得

$$\begin{aligned}
J(u_{mx}, u_{mxx}) &\leqslant K(\psi_m) + J(\varphi_{mx}, \varphi_{mxx}) + \int_0^t (f, u_{m\tau})d\tau \\
&\leqslant E(0) + \sqrt{M^*(t)}\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt
\end{aligned}$$

$$\leqslant E(0) + 2\sqrt{2E(0) + \left(\int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt\right)^2} \int_0^\infty \|f\|_{L^2(\Omega)}dt$$
$$< d_0, \quad \forall t \in (0, \infty). \tag{2.10.36}$$

式 (2.10.35) 和式 (2.10.36) 相加立得估计 (2.10.24). □

定理 2.10.1　在引理 2.10.6 的条件下, 问题 (2.10.3)–(2.10.5) 存在整体弱解 $u(x,t)$.

证明　因为对于 $m \geqslant m_0$ 和任意的 $t \geqslant 0$ 有 $u_m \in W_0$, $K(u_{mt})+J(u_{mx}, u_{mxx}) < \overline{C}$, 其中 $\overline{C}$ 为常数, 于是可知对任意的 $T > 0$ 有 $u_m \in C([0,T]; H_0^2(\Omega))$ 和 $u_{mt} \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, 且在这些空间中有界. 由于 $C([0,T]; H_0^2(\Omega))$ 紧嵌入 $C([0,T]; C^{1,\lambda}(\Omega))$, 其中 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, 所以在 $\{u_m\}$ 中存在子序列, 仍记为 $\{u_m\}$, 在 $C([0,T]; C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}))$ 中收敛于 $u(x,t)$, 而 $\{u_{mxx}\}$ 和 $\{u_{mt}\}$ 分别在 $L^2(\Omega_T)$ 中弱收敛于 $u_{xx}(x,t)$ 和 u_t.

下面证明极限函数 $u(x,t)$ 满足弱解定义条件 (1)–(4).

因为 $\{u_m\}, \{u_{mx}\}, \{u_{mxx}\}$ 和 $\{u_{mt}\}$ 在 $L^2(\Omega_T)$ 中弱收敛, $u_m \in W_0$, 而 W_0 是 $H_0^2(\Omega)$ 的有界集, 所以对于任意固定的有限测度集合 $A \subset [0,\infty)$ 和任意的 $\varepsilon > 0$ 必存在充分大的 m_1 使得

$$\int_A \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leqslant \int_A \|u_{m_1}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \varepsilon \leqslant C_1\mathcal{M}(A) + \varepsilon, \tag{2.10.37}$$

$$\int_A \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leqslant \int_A \|u_{m_1x}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \varepsilon \leqslant C_1\mathcal{M}(A) + \varepsilon, \tag{2.10.38}$$

$$\int_A \|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leqslant \int_A \|u_{m_1xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \varepsilon \leqslant C_1\mathcal{M}(A) + \varepsilon, \tag{2.10.39}$$

$$\int_A \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leqslant \int_A \|u_{m_1t}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \varepsilon \leqslant C_1\mathcal{M}(A) + \varepsilon, \tag{2.10.40}$$

其中常数 $C_1 > 0$ 与 m_1 无关, $\mathcal{M}(A)$ 表示集合 A 的 Lebesgue 测度. 于是由上式可知在 $[0,\infty)$ 上几乎处处成立

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2, \|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2, \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_2, \tag{2.10.41}$$

其中常数 $C_2 > 0$ 与 t 无关. 如有必要, u 和它的偏导数 u_x, u_{xx} 以及 u_t 可以改变它们在 $[0,\infty)$ 上的一个零测集上的值, 使得式 (2.10.41) 处处成立. 因此 $u(x,t)$ 满足问题 (2.10.3)–(2.10.5) 弱解定义中的条件 (1).

对于任意 $t \in [0,\infty)$ 和 $\nu(x) \in L^2(\Omega)$ 成立

$$\int_\Omega [u_m(x,t) - \varphi_m(x)]\nu(x)dx = \int_0^t \int_\Omega u_{m\tau}(x,\tau)\nu(x)dxd\tau.$$

在上式中令 $m \to \infty$, 并利用对于几乎所有的 $t \geqslant 0$, u_m 在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛于 u, φ_m 在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛于 φ 和对于每个 $T>0, u_{mt}$ 在 $L^2(\Omega_T)$ 中弱收敛于 u_t, 于是对所有 $t \geqslant 0$ 满足问题 (2.10.3)–(2.10.5) 弱解的第二个条件. 同样若有必要, 可以在 $[0,\infty)$ 上的一个测度为零的子集上重新定义 u, 使得对于所有的 $t \geqslant 0$ 问题 (2.10.3)–(2.10.5) 弱解定义中的条件 (2) 成立.

下面证明 $u(x,t)$ 满足弱解定义中的条件 (3). 首先指出对于形如 $\eta(x,t) = c_i(t)y_i(x)$ 的试函数是正确的, 其中 $c_i(t) \in C^1[0,\infty)$. 固定 i 且 $m \geqslant i$. 用 $c_i(t)$ 乘方程 (2.10.18) 中的第 i 个方程, 在 $[0,t)$ 上积分, 有

$$0 = \int_0^t \int_\Omega [u_{mtt} + u_{mxxxx} - \sigma(u_{mx})_x - f]\eta(x,\tau)dxd\tau. \tag{2.10.42}$$

上式对 t 和 x 分别分部积分, 则有

$$\Phi(u_m, \psi_m, \eta) = 0, \tag{2.10.43}$$

其中 $\Phi(u,\psi,\eta)$ 表示等式 (2.10.11) 的左端. 因为序列 $\{u_{mx}(x,t)\}$ 存在子序列, 仍记为 $\{u_{mx}(x,t)\}$, 在 $C([0,T];C(\overline{\Omega}))$ 中收敛于 $u_x(x,t)$, 所以当 $m \to \infty$ 时,

$$\int_0^t \int_\Omega \sigma(u_{mx}(x,\tau))\eta_x(x,\tau)dxd\tau \to \int_0^t \int_\Omega \sigma(u_x(x,\tau))\eta_x(x,\tau)dxd\tau. \tag{2.10.44}$$

因此在式 (2.10.43) 中令 $m \to \infty$, 知对于任意 $T>0, t \in [0,T]$ 成立 $\Phi(u,\psi,\eta)=0$, 即 $u(x,t)$ 满足问题 (2.10.3)–(2.10.5) 弱解的条件 (3). 类似地, 对于函数

$$\eta_m(x,t) = \sum_{i=1}^m c_i(t)\eta_i(x), \tag{2.10.45}$$

其中 $c_i(t) \in C^1[0,\infty)$, $i=1,2,\cdots,m$, 由于 Φ 关于 $\eta(x,t)$ 是线性的, 显然对于任意的 $t \geqslant 0$ 均有式 (2.10.11) 成立, 即 $\Phi(u,\psi,\eta_m)=0$.

现设 $\eta(x,t)$ 是满足弱解定义中要求的任意函数, 证明式 (2.10.11) 成立. 利用对 $\sigma(s)$ 和 $f(x,t)$ 的假定以及 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
&|\Phi(u,\psi,\eta)| = |\Phi(u,\psi,\eta-\eta_m)|\\
\leqslant{}& \|u_t\|_{L^2(\Omega)}\|\eta(t)-\eta_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\|\eta(0)-\eta_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\\
&+ \int_0^t [\|u_\tau(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\eta_\tau(\tau)-\eta_{m\tau}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\\
&+ \|u_{xx}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\eta_{xx}(\tau)-\eta_{mxx}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\\
&+ \|\sigma(u_x(\tau))\|_{L^2(\Omega)}\|\eta_x(\tau)-\eta_{mx}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\\
&+ \|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\eta(\tau)-\eta_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}]d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \|u_t\|_{L^2(\Omega)}\|\eta(t)-\eta_m(t)\|_{H^2(\Omega)}+\|\psi\|_{L^2(\Omega)}\|\eta(0)-\eta_m(0)\|_{H^2(\Omega)}\\&\quad+\int_0^t[\|u_\tau(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\eta_t(\tau)-\eta_{m\tau}(\tau)\|_{H^2(\Omega)}]d\tau\\&\quad+\int_0^t[\|u_{xx}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}+\|\sigma(u_x(\tau))\|_{L^2(\Omega)}\\&\quad+\|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}]\|\eta(\tau)-\eta_m(\tau)\|_{H^2(\Omega)}d\tau.\end{aligned}\tag{2.10.46}$$

根据对 $\eta(x,t)$ 的假定, 可以选形如式 (2.10.45) 的序列 $\{\eta_m(x,t)\}$, 其中 $c_i(t)$ 是 η 的 Fourier 系数, 使得对于 $t\geqslant 0$, 当 $m\to\infty$ 时,

$$\|\eta_m(t)-\eta(t)\|_{H^2(\Omega)}\to 0.\tag{2.10.47}$$

这时 $\eta(x,t)$ 可写成

$$\eta(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i(t)y_i(x).\tag{2.10.48}$$

由于 $\{\|\eta_m\|_{H^2(\Omega)}\}$ 是关于 t 在 $[0,\infty)$ 上连续且关于 m 的单增序列, 且在 $[0,\infty)$ 上逐点收敛于 $\|\eta\|_{H^2(\Omega)}$, 由单调性收敛定理可知, 对于 $t\geqslant 0$, 当 $m\to\infty$ 时, 有

$$\int_0^t\|\eta_m(\tau)\|_{H^2(\Omega)}d\tau\to\int_0^t\|\eta(\tau)\|_{H^2(\Omega)}d\tau\tag{2.10.49}$$

和

$$\int_0^t\|\eta_m(\tau)-\eta(\tau)\|_{H^2(\Omega)}d\tau\to 0.\tag{2.10.50}$$

由式 (2.10.48) 可形式地得

$$\eta_t(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_{it}(t)y_i(x).\tag{2.10.51}$$

因为 $\eta_t(x,t)\in C([0,\infty);H_0^2(\Omega))$, 所以根据 Bessel 不等式知, 对于 $t\geqslant 0$, 级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|c_{it}(t)|^2$ 收敛, 因此对 $t\geqslant 0$, 当 $m\to\infty$ 时, 有

$$\|\eta_t(t)-\eta_{mt}(t)\|_{H^2(\Omega)}\to 0.\tag{2.10.52}$$

已知 $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}$ 在 $[0,\infty)$ 的任一紧子集上是一致有界的, 再利用式 (2.10.52) 推得, 当 $m\to\infty$ 时,

$$\int_0^t\|u_\tau(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\eta_\tau(\tau)-\eta_{m\tau}(\tau)\|_{H^2(\Omega)}d\tau\to 0.\tag{2.10.53}$$

由于 $\|u_x(t)\|_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|u_{xx}(t)\|_{L^2(\Omega)}$ 在 $[0,\infty)$ 上的任一紧子集上是一致有界的, 以及对 $\sigma(s)$ 和 $f(x,t)$ 的假定, 并利用式 (2.10.53) 与式 (2.10.46) 可知, 当 $m\to\infty$ 时, 对于 $t\geqslant 0$ 有 $\Phi(u,\psi,\eta)=0$, 从而式 (2.10.11) 成立.

下面证明弱解的条件 (4) 成立.

利用积分中值定理对于 $[0,\infty)$ 上具有有限测度的集合 A 可证

$$\lim_{m\to\infty}\int_A\int_\Omega F(u_{mx})dxdt=\int_A\int_\Omega F(u_x)dxdt. \tag{2.10.54}$$

由式 (2.10.49), (2.10.50) 与式 (2.10.54), 对于任意 $\varepsilon>0$ 和充分大的 m, 利用式 (2.10.32) 得到

$$\begin{aligned}\int_A E(\tau)d\tau &\leqslant \int_A[K(u_{m\tau}(\tau))+J(u_{mx}(\tau),u_{mxx}(\tau))]d\tau+3\varepsilon\\ &=\int_A\left[K(\psi_m)+J(\varphi_{mx},\varphi_{mxx})+\int_0^t(f(\tau),u_{m\tau}(\tau))d\tau\right]dt+3\varepsilon. \end{aligned}\tag{2.10.55}$$

利用前面估计的方法可得估计

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t(f(\tau),u_{m\tau}(\tau))d\tau\right|\\ \leqslant{}&2\sqrt{2(K(\psi_m)+J(\varphi_{mx},\varphi_{mxx}))+\left(\int_0^\infty\|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^2}\times\int_0^\infty\|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau.\end{aligned}\tag{2.10.56}$$

将式 (2.10.56) 代入式 (2.10.55) 后, 两端当 $m\to\infty$ 时, 取极限并注意到式 (2.10.26) 和式 (2.10.27) 有

$$\int_A\left\{E(t)-E(0)-2\sqrt{2E(0)+\left(\int_0^\infty\|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^2}\int_0^\infty\|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\right\}dt\leqslant 0.$$

由上式推出, 几乎对所有的 $t\geqslant 0$ 有

$$E(t)\leqslant E(0)+2\sqrt{2E(0)+\left(\int_0^\infty\|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\right)^2}\int_0^\infty\|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau,$$

即证明了满足弱解的条件 (4). □

2.10.4 整体广义解与整体古典解的存在唯一性

本节在整体弱解存在的情况下, 建立整体广义解和整体古典解的存在唯一性.

定理 2.10.2 除定理 2.10.1 的条件成立外, 若 $f\in H^1([0,\infty);L^2(\Omega)),\varphi\in H^4(\Omega)$, $\psi\in H^2(\Omega)$, 则问题 (2.10.3)–(2.10.5) 存在唯一整体广义解 $u(x,t)$; 若 $\sigma\in C^5(\mathbb{R}),\sigma''(0)=0,f\in H^1((0,\infty);H^4(\Omega))$ 且 $f(x,t)$ 满足边值条件 (2.10.4), $\varphi\in H^8(\Omega)$ 和 $\psi\in H^6(\Omega)$, 则问题 (2.10.3)–(2.10.5) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)$.

证明　由定理 2.10.1 的证明过程可知, Galerkin 近似解 $u_m \in C([0,T];H_0^2(\Omega))$, $u_{mt} \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$, 且在这些空间中有界, 界与 m 无关.

为获得问题 (2.10.3)–(2.10.5) 的整体广义解和整体古典解, 我们对 $u_m(x,t)$ 作进一步估计.

方程 (2.10.18) 两端同乘以 $\mu_i \dot{q}_{mi}(t)$, 对 $i=1,2,\cdots,m$ 求和, 对 t 积分, 再对 x 和 t 分别进行分部积分, 得

$$\begin{aligned}
&\|u_{mx^2t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{mx^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
=&2\int_\Omega \sigma(u_{mx})_x u_{mx^4}dx - 2\int_\Omega\int_0^t \sigma(u_{mx})_{x\tau}u_{mx^4}d\tau dx + \|\psi_{mx^2}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+\|\varphi_{mx^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\int_\Omega \sigma(u_{mx}(x,0))_x u_{mx^4}(x,0)dx + 2\int_\Omega f u_{mx^4}dx \\
&-2\int_\Omega f(x,0)u_{mx^4}(x,0)dx - 2\int_0^t\int_\Omega f_\tau u_{mx^4}dxd\tau \\
\leqslant& \|\psi_{x^2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3\|\varphi_{x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma(u_{mx}(\cdot,0))_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+2\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant t\leqslant T}}|\sigma''(u_{mx})|\int_0^t\int_\Omega u_{mx\tau}u_{mx^2}u_{mx^4}dxd\tau \\
&+2\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant t\leqslant T}}|\sigma'(u_{mx})|\left[\int_0^t\int_\Omega u_{mx^2\tau}u_{mx^4}dxd\tau + \int_\Omega u_{mx^2}u_{mx^4}dx\right] \\
&+2\int_\Omega f u_{mx^4}dx - 2\int_0^t\int_\Omega f_\tau u_{mx^4}dxd\tau.
\end{aligned} \tag{2.10.57}$$

利用 Hölder 不等式, Young 不等式以及 Gagliardo-Nirenberg 插值定理成立

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega u_{mx\tau}u_{mx^2}u_{mx^4}dxd\tau \\
\leqslant& \int_0^t \|u_{mx\tau}\|_{L^4(\Omega)}\|u_{mx^2}\|_{L^4(\Omega)}\|u_{mx^4}\|_{L^2(\Omega)}d\tau \\
\leqslant& C_3\int_0^t \|u_{mx^2}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{7}{8}}\|u_m\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{8}}\|u_{m\tau}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{8}}\|u_{m\tau}\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{5}{8}}\|u_{mx^4}\|_{L^2(\Omega)}d\tau \\
\leqslant& C_4\int_0^t \{\|u_{mx^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{mx^2\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2\}d\tau + C_5(T).
\end{aligned} \tag{2.10.58}$$

将式 (2.10.58) 代入式 (2.10.57) 并利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\|u_{mx^2t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{mx^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leqslant& [\|\psi_{x^2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3\|\varphi_{x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma(u_{mx}(\cdot,0))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f_t\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + C_5(T)]
\end{aligned}$$

$$+ C_6 \int_0^t (\|u_{mx^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{mx^2\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2) d\tau. \tag{2.10.59}$$

利用 Gronwall 不等式有

$$\|u_{mx^2t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{mx^4}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_7(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.10.60}$$

方程 (2.10.18) 两端同乘以 $\ddot{q}_{mi}(t)$, 对 $i = 1, 2, \cdots, m$ 求和, 得

$$\|u_{mtt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (u_{mx^4}, u_{mtt}) = (\sigma(u_{mx})_x, u_{mtt}) + (f, u_{mtt}).$$

上式应用 Hölder 不等式推得

$$\|u_{mtt}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_8(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.10.61}$$

由定理 2.4.1 的证明过程和估计 (2.10.60), (2.10.61) 知, $\{u_m(x,t)\}$ 存在子序列, 仍记为 $\{u_m(x,t)\}$, 使得当 $m \to \infty$ 时, $\{u_m(x,t)\}$ 和 $\{u_{mx}(x,t)\}$ 分别在 Ω_T 上一致收敛于 $u(x,t)$ 和 $u_x(x,t)$, 子序列 $\{u_{mx^2}(x,t)\}$, $\{u_{mx^3}(x,t)\}$, $\{u_{mx^4}(x,t)\}$, $\{u_{mt}(x,t)\}$ 和 $\{u_{mtt}(x,t)\}$ 分别在 $L^2(\Omega_T)$ 中弱收敛于 $u_{x^2}(x,t)$, $u_{x^3}(x,t)$, $u_{x^4}(x,t)$, $u_t(x,t)$ 和 $u_{tt}(x,t)$. 因此问题 (2.10.3)–(2.10.5) 存在整体广义解. 广义解的唯一性是显然的.

方程 (2.10.18) 两端同乘以 $2\mu_i^2 \dot{q}_{mi}(t)$, 对 $i = 1, 2, \cdots, m$ 求和, 对 t 积分, 利用标准正交基在边界的性质和 $f(x,t)$ 的假定, 对 x 分部积分, 然后再对 t 分部积分, 有

$$\begin{aligned}
&\|u_{mx^4t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{mx^6}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leqslant& \|\psi_{x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_{x^6}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(\sigma(u_{mx})_{x^3}, u_{mx^6}) \\
&- 2(\sigma(u_{mx}(0))_{x^3}, u_{mx^6}(0)) - 2\int_0^t (\sigma(u_{mx})_{x^3\tau}, u_{mx^6}) d\tau \\
&+ 2(f_{x^2}, u_{mx^6}) - 2(f_{x^2}(0), u_{mx^6}(0)) - 2\int_0^t (f_{x^2t}, u_{mx^6}) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.10.62}$$

利用前面对 $u_m(x,t)$ 的估计, Sobolev 嵌入定理, Gagliardo-Nirenberg 插值定理和 Hölder 不等式, 由式 (2.10.62) 得到

$$\begin{aligned}
&\|u_{mx^4t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{mx^6}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leqslant& C_9(T)\bigg(\|\varphi_{x^6}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_{x^4}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f_{x^2}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ \int_0^T \|f_{x^2t}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|f_{x^2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1 \bigg) \\
&+ C_{10}(T) \int_0^t [\|u_{mx^6}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{mx^4\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2] d\tau.
\end{aligned} \tag{2.10.63}$$

由 Gronwall 不等式推得

$$\|u_{mx^4t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{mx^6}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{11}(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.10.64}$$

利用证明估计 (2.10.64) 的方法可得

$$\|u_{mx^6t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{mx^8}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{12}(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.10.65}$$

方程 (2.10.18) 对 t 求导一次, 得

$$(u_{mt^3}, y_i) + (u_{mx^4t}, y_i) - (\sigma(u_{mx})_{xt}, y_i) = (f_t, y_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad t \in [0,T]. \tag{2.10.66}$$

式 (2.10.66) 两端同乘以 $2\mu_i \ddot{q}_{mi}(t)$, 对 $i = 1, 2, \cdots, m$ 求和, 并对 x 分部积分有

$$\frac{d}{dt}[\|u_{x^2t^2}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{mx^4t}\|^2_{L^2(\Omega)}] = 2(\sigma(u_{mx})_{x^3t}, u_{mx^2tt}) + 2(f_{x^2t}, u_{mx^2tt}).$$

上式利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\|u_{mx^2t^2}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{mx^4t}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\\ \leqslant{}& C_{13}(T)\left[\|u_{mx^2tt}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{mx^4t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_{x^2t}\|^2_{L^2(\Omega)}\right] + C_{14}(T).\end{aligned} \tag{2.10.67}$$

容易验证 $\|u_{mx^2t^2}(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$ 对 m 是一致有界的. 利用 Gronwall 不等式由式 (2.10.67) 推得

$$\begin{aligned}&\|u_{mx^2t^2}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{mx^4t}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ \leqslant{}& C_{15}(T)[\|u_{mx^2t^2}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{mx^4t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_{x^2t}\|^2_{L^2(\Omega_T)}]\\ \leqslant{}& C_{16}(T), \quad t \in [0,T].\end{aligned} \tag{2.10.68}$$

方程 (2.10.66) 两端同乘以 $\dddot{q}_{mi}(t)$, 并对 $i = 1, 2, \cdots, m$ 求和, 经计算得

$$\|u_{mt^3}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{17}(T), \quad t \in [0,T]. \tag{2.10.69}$$

根据在定理 2.10.1 的证明过程中对 u_m, u_{mt} 的一致估计, 估计 (2.10.60), (2.10.64), (2.10.65), (2.10.68) 和 (2.10.69), 利用嵌入定理和紧性定理, 可知问题 (2.10.3)–(2.4.5) 存在整体古典解 $u(x,t)$, 唯一性显然. □

2.10.5　与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [107]. 与本节有关的文献见 [108]–[111].

2.11 具有粘性项的拟线性波动方程的初边值问题

2.11.1 引言

在 [112] 中, 作者研究了如下的初边值问题:

$$\begin{aligned}&u_{tt}-\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u\}-\Delta u-\Delta u_t+\delta|u_t|^{p-1}u_t\\&=\mu|u|^{q-1}u,\quad x\in\Omega,\quad t\in(0,T),\end{aligned}\tag{2.11.1}$$

$$u(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t\in(0,T),\tag{2.11.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega,\tag{2.11.3}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ ($N\geqslant 1$ 是自然数, 当 $N=1$ 时, Ω 是一个有界区间) 是具有充分光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $u(x,t)$ 是关于变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in\Omega$, 以及 $t\in\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ 的未知函数, $\sigma(v)$ 是已知非线性函数, $q>1$, $p\geqslant 1$, $\delta>0$, $\mu>0$ 都是常数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的已知函数.

文献 [112] 的作者利用 Galerkin 方法只研究了问题 (2.11.1)–(2.11.3) 在 $\delta>0$, $\mu>0$ 情形下的解的整体存在性, 遗憾的是, 当作者在作 A priori Estimate II(先验估计 II) 时, 利用了 $L^{2p}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ 的事实. 我们知道, 由于 $L^{2p}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ ($p\geqslant 1$), 成立嵌入不等式 $\|u_m'(t)\|_2\leqslant C_*\|u_m'(t)\|_{2p}$, 其中 C_* 是嵌入常数. 但是作者将错误的不等式 $\|u_m'(t)\|_{2p}\leqslant C_*\|u_m'(t)\|_2$ 代入式 (3.11) (见 [112],p.346), 于是得到错误的结果, 即文献 [112] 中的式 (3.11), 这直接对初边值问题 (2.11.1)–(2.11.3) 解的存在性产生影响, 因此主要定理, 即文献 [112] 的定理 2.6 就不完全正确了.

这一节将对 $\delta>0$, $\mu>0$ 的情形证明初边值问题 (2.11.1)–(2.11.3) 有唯一的整体广义解.

下面引入后面需要的几个引理.

引理 2.11.1 (Sobolev-Poincaré 不等式 [49,112]) 如果 $1\leqslant q<\infty$ ($N=1,2$) 或 $1\leqslant q\leqslant\dfrac{N+2}{N-2}$ ($N\geqslant 3$), 则存在常数 $C(\Omega,q+1)$ 使得对 $\forall u\in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)}\leqslant C(\Omega,q+1)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

引理 2.11.2 [13] 假定 $Q\subset\mathbb{R}_x^N\times\mathbb{R}_t$ 是一个有界区域, g_μ 和 g 是 $L^q(Q)$ ($1<q<\infty$) 中的函数, $\|g_\mu\|_{L^q(Q)}\leqslant C$ 和 g_μ 在 Q 中几乎处处收敛于 g, 则 g_μ 在 $L^q(Q)$ 中弱收敛于 g.

引理 2.11.3 [13] 设 X 是一 Banach 空间. 如果

$$f\in L^p((0,T);X),\quad \frac{\partial f}{\partial t}\in L^p((0,T);X)\quad(1\leqslant p\leqslant\infty),$$

则必要时可以在一个零测集上重新定义 f 从 $[0,T]$ 到 X 连续.

现在, 为了讨论初边值问题 (2.11.1)–(2.11.3), 定义位势 $J(u(\cdot,t))$, 能量 $E(u(\cdot,t))$ 以及 I - 正集 $\mathcal{W}$ 如下:

$$\begin{aligned}
J(u(\cdot,t)) &= \frac{1}{2}\|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\mu}{q+1}\|u(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}, \quad u\in H^1_0(\Omega),\\
I(u(\cdot,t)) &= \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \mu\|u(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}, \quad u\in H^1_0(\Omega),\\
E(u(\cdot,t)) &= \frac{1}{2}\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u(\cdot,t)|^2}\sigma(s)dsdx + J(u(\cdot,t))
\end{aligned}$$

和 $\mathcal{W}=\{u\in H^1_0(\Omega)\ |I(u(\cdot,t))>0\}\cup\{0\}$.

2.11.2 主要定理

主要定理 假定下列条件成立:

(1) $\sigma(s)\in C^1[0,\infty)$, 并存在常数 $K_i>0\ (i=1,2,3)$, 使得对于 $\forall v,v_1\in\mathbb{R}$, 有 $0\leqslant\sigma(v^2)\leqslant K_1$, $|\sigma'(v^2)|v^2\leqslant K_2\left(\sigma'(s)=\dfrac{d}{ds}\sigma(s)\right)$, $|\sigma(v_1^2)-\sigma(v^2)||v|+|\sigma(v^2)-\sigma(v_1^2)||v_1|\leqslant K_3|v-v_1|$;

(2) $1<q<\infty\ (N=1,2)$, $1<q\leqslant\dfrac{N+2}{N-2}\ (N=3,4)$ 和 $1+\dfrac{1}{N}\leqslant q\leqslant\min\left\{\dfrac{N+2}{N-2},\dfrac{N-2}{N-4}\right\}\ (N>4)$; $1\leqslant p<\infty\ (N=1,2)$ 和 $1\leqslant p\leqslant 1+\dfrac{2}{N}\ (N\geqslant 3)$ 以及 $\delta>0$;

(3) $u_0\in\mathcal{W}\cap H^2(\Omega)$, $u_1\in H^1_0(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$, $\displaystyle\int_0^{|\nabla u_0(x)|^2}\sigma(s)ds\leqslant K_4$ 和

$$\mu[C(\Omega,q+1)]^{q+1}\left[\frac{2(q+1)}{q-1}E(u_0(\cdot))\right]<1,$$

其中 $K_4>0$ 和 $\mu>0$ 是常数, 如果 $q\leqslant p$, 则初边值问题 (2.11.1)–(2.11.3) 有唯一整体广义解 $u(x,t)$ 并且满足

$$u(x,t)\in L^\infty((0,T);H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)), \tag{2.11.4}$$

$$u_t(x,t)\in L^\infty((0,T);H^1_0(\Omega))\cap L^2(0,T);H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap L^{p+1}(Q_T), \tag{2.11.5}$$

$$u_{tt}(x,t)\in L^2((0,T);L^2(\Omega)), \tag{2.11.6}$$

且对 $\forall w\in L^2((0,T);H^1_0(\Omega))\cap L^{p+1}(Q_T)$,

$$\int_0^T\int_\Omega\{u_{tt}-\operatorname{div}[\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u]-\Delta u-\Delta u_t+\delta|u_t|^{p-1}u_t-\mu|u|^{q-1}u\}wdxdt=0. \tag{2.11.7}$$

注 2.11.1 满足主要定理中条件 (1) 的函数 $\sigma(s)$ 是存在的. 例如, $\sigma(v^2)=$

$\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$ 就满足定理中的 (1). 事实上, $0 < \sigma(v^2) \leqslant K_1$, $|\sigma'(v^2)|v^2 = \frac{|v|^2}{2(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant K_2$, 且

$$\begin{aligned}
&|\sigma(v_1^2) - \sigma(v^2)||v| + |\sigma(v^2) - \sigma(v_1^2)||v_1| \\
=&\left|\frac{1}{\sqrt{1+v_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\right||v| + \left|\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+v_1^2}}\right||v_1| \\
=&\frac{|v^2 - v_1^2|(|v| + |v_1|)}{\sqrt{1+v^2}(1+v_1^2) + \sqrt{1+v_1^2}(1+v^2)} \\
\leqslant&\frac{|v - v_1|(|v| + |v_1|)^2}{|v_1^2| + |v|^2} \leqslant 2|v - v_1|.
\end{aligned}$$

2.11.3 近似解的积分估计

我们应用 Galerkin 方法构造初边值问题 (2.11.1)–(2.11.3) 的解. 设 $\{w_j(x)\}$ 是由特征值问题

$$\Delta w + \lambda w = 0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0$$

的特征值 λ_j $(j = 1, 2, \cdots)$ 对应的特征函数构成的 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基. 设

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{mj}(t) w_j(x)$$

是初边值问题 (2.11.1)–(2.11.3) 的 Galerkin 近似解, 其中 $g_{mj}(t)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ 是待定函数, m 是自然数. 假定初值函数 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 可展开为

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j w_j(x), \quad u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j w_j(x),$$

其中 a_j, b_j $(j = 1, 2, \cdots)$ 是常数.

假定当 $m \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&\text{在 } H_0^1(\Omega) \text{ 中}, \ u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j w_j(x) \to u_0(x), \\
&\text{在 } H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega) \text{中}, \ u_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j w_j(x) \to u_1(x).
\end{aligned} \tag{2.11.8}$$

把近似解 $u_m(x,t)$ 代入方程 (2.11.1) 后, 两端同乘以 $w_j(x)$, 并在 Ω 上积分, 得

$$\begin{aligned}
&(u_{mtt} - \operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m|^2)\nabla u_m\} - \Delta u_m - \Delta u_{mt} + \delta|u_{mt}|^{p-1}u_{mt}, w_j) \\
=&\mu(|u_m|^{q-1}u_m, w_j), \quad j = 1, 2, \cdots, m.
\end{aligned} \tag{2.11.9}$$

把近似解 $u_m(x,t)$ 及初值函数的近似

$$u_{0m}(x)=\sum_{j=1}^{m}a_jw_j(x),\quad u_{1m}(x)=\sum_{j=1}^{m}b_jw_j(x)$$

代入式 (2.11.3), 得到

$$g_{mj}(0)=a_j,\quad g_{mjt}(0)=b_j,\quad j=1,2,\cdots,m. \tag{2.11.10}$$

引理 2.11.4 假定下列条件成立:

(1) $1<q<\infty$ $(N=1,2)$ 或者 $1<q\leqslant\dfrac{N+2}{N-2}$ $(N\geqslant 3)$; $\mu>0$, $\delta>0$ 和 $p\geqslant 1$ 是常数;

(2) $0\leqslant\sigma(s)\leqslant K_1$ 且 $\sigma(s)\in C[0,\infty)$;

(3) $u_0\in\mathcal{W}$, $u_1\in H_0^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$, $\displaystyle\int_\Omega\int_0^{|\nabla u_0(x)|^2}\sigma(s)dsdx<K_4$, 其中 $K_4>0$ 是常数;

(4)

$$\mu[C(\Omega,q+1)]^{q+1}\left[\frac{2(q+1)}{q-1}E(u_0(\cdot))\right]^{\frac{q-1}{2}}<1, \tag{2.11.11}$$

则 Cauchy 问题 (2.11.9), (2.11.10) 存在古典解 $g_{mj}(t)\in C^2[0,T]$ $(j=1,2,\cdots,m)$, 且在 $[0,T]$ 上 $u_m(x,t)\in\mathcal{W}$, 并且满足估计

$$\begin{aligned}
&\|u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_\Omega\int_0^{|\nabla u_m(x,t)|^2}\sigma(s)dsdx+\frac{q-1}{q+1}\|\nabla u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\quad+2\delta\int_0^t\|u_{m\tau}(0,\tau)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}d\tau+2\int_0^t\|\nabla u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau\\
&\leqslant 2E(u_{0m}(\cdot))<K_5,\quad t\in[0,T],
\end{aligned} \tag{2.11.12}$$

其中 $K_5>0$ 是常数.

证明 利用 Picard 迭代方法, 可以解 Cauchy 问题 (2.11.9), (2.11.10). 因而 Cauchy 问题 (2.11.9), (2.11.10) 有局部解 $g_{mj}(t)\in C^2[0,T_m)$ $(j=1,2,\cdots,m)$, $0<T_m\leqslant T$. 由于 $I(u_{0m})>0$, 利用 $u_m(x,t)$ 关于 t 的连续性, 知道在 $t=0$ 附近的某个区间内有

$$I(u_m(t,\cdot))\geqslant 0. \tag{2.11.13}$$

当式 (2.11.13) 在 $[0,t_{\max})$ 上成立时, 令 $t_{\max}$ 为最大时间 (可能 $t_{\max}=T_m$). 注意到

$$\begin{aligned}
J(u_m(\cdot,t))&=\frac{1}{q+1}I(u_m(\cdot,t))+\frac{q-1}{2(q+1)}\|\nabla u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\geqslant\frac{q-1}{2(q+1)}\|\nabla u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2,\qquad t\in[0,t_{\max}).
\end{aligned}$$

式 (2.11.9) 两端同乘以 $g_{mjt}(t)$, 并对 $j=1,2,\cdots,m$ 求和, 得到

$$\frac{d}{dt}E(u_m(\cdot,t))+\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta\|u_{mt}(\cdot,t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}=0,$$

这表明

$$E(u_m(\cdot,t))+\int_0^t\|\nabla u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+\delta\int_0^t\|u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}d\tau=E(u_{0m}(\cdot)). \tag{2.11.14}$$

注意到

$$J(u_m(\cdot,t))\leqslant E(u_{0m}(\cdot)),\quad \|\nabla u_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\frac{2(q+1)}{q-1}J(u_m(\cdot,t)). \tag{2.11.15}$$

利用 Sobolev-Poincaré 不等式, 式 (2.11.11) 和式 (2.11.15), 有

$$\begin{aligned}\mu\|u_m(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}&\leqslant\mu[C(\Omega;q+1)]^{q+1}\|\nabla u_m(\cdot,t)\|^{q+1}_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant\mu[C(\Omega;q+1)]^{q+1}\left[\frac{2(q+1)}{q-1}J(u_m(\cdot,t))\right]^{\frac{q-1}{2}}\|\nabla u_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant\mu[C(\Omega;q+1)]^{q+1}\left[\frac{2(q+1)}{q-1}E(u_{0m}(\cdot))\right]^{\frac{q-1}{2}}\|\nabla u_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\&<\|\nabla u_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)},\quad t\in[0,t_{\max}),\end{aligned} \tag{2.11.16}$$

即

$$I(u_m(\cdot,t))>0,\quad t\in[0,T_{\max}).$$

由式 (2.11.14) 和 (2.11.16) 知 (2.11.12) 成立. 由 $\|u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$ 的有界性以及解的延拓定理知 $t_{\max}=T$. □

引理 2.11.5 设引理 2.11.4 的条件以及下述条件成立:

(1) $\sigma(s)\in C^1[0,\infty)$ 且对任意的 $s\in[0,\infty)$ 成立 $|\sigma'(s)|s\leqslant K_2$;

(2) 当 $N=1,2$ 时, $1\leqslant p<\infty$; 当 $N\geqslant3$ 时, $1\leqslant p\leqslant\dfrac{N+2}{N}$,

则初边值问题 (2.11.1)–(2.11.3) 的 Galerkin 近似解 $u_m(t,x)$ 满足估计

$$\|\Delta u_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C_0(T),\quad t\in[0,T]. \tag{2.11.17}$$

此处及以后的 $C_i(T)$ $(i=0,1,2,\cdots)$ 是与 m 无关的常数.

证明 式 (2.11.9) 两端乘以 $-2\lambda_j g_{mj}(t)$, 并对 $j=1,2,\cdots,m$ 求和, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\nabla^2u_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\|\Delta u_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\&=2\frac{d}{dt}(u_{mt}(\cdot,t),\Delta u_m(\cdot,t))+2\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\quad-2(\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(\cdot,t)|^2)\nabla u_m(\cdot,t)),\Delta u_m(\cdot,t)\}\end{aligned}$$

$$+2\delta(|u_{mt}(\cdot,t)|^{p-1}u_{mt}(\cdot,t),\Delta u_m(\cdot,t))$$
$$-2\mu(|u_m(\cdot,t)|^{q-1}u_m(\cdot,t),\Delta u_m(\cdot,t)). \tag{2.11.18}$$

式 (2.11.18) 两端在 $[0,t]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}
&\|\Delta u_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_0^t\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\\
=&\|\Delta u_m(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}+2(u_{mt}(\cdot,t),\Delta u_m(\cdot,t))-2(u_{mt}(\cdot,0),\Delta u_m(\cdot,0))\\
&+2\int_0^t\|\nabla u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\\
&-2\int_0^t\int_\Omega \operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(x,\tau)|^2)\nabla u_m(x,\tau)\}\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau\\
&+2\delta\int_0^t\int_\Omega|u_{m\tau}(x,\tau)|^{p-1}u_{m\tau}(x,\tau)\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau\\
&-2\mu\int_0^t\int_\Omega|u_m(x,\tau)|^{q-1}u_m(x,\tau)\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau.
\end{aligned}\tag{2.11.19}$$

下面对式 (2.11.19) 的右端项作估计.

取 $\lambda=\dfrac{N(p-1)}{2p}$ $\left(当 N=1,2 时, 1\leqslant p<\infty; 当 N\geqslant 3 时, 1\leqslant p\leqslant\dfrac{N+2}{N}\right)$, 利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理, 注意到式 (2.11.12), 得到

$$\begin{aligned}
\|u_{mt}(\cdot,t)\|^p_{L^{2p}(\Omega)}&\leqslant C_1\|u_{mt}(\cdot,t)\|^{p(1-\lambda)}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|^{p\lambda}_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant C_2\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|^{\frac{N(p-1)}{2}}_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}\tag{2.11.20}$$

由式 (2.5.12) 和式 (2.11.20), 利用 Hölder 不等式及 Cauchy 不等式, 可见

$$\begin{aligned}
&\left|2\delta\int_0^t\int_\Omega|u_{m\tau}(x,\tau)|^{p-1}u_{m\tau}(x,\tau)\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau\right|\\
\leqslant&2\delta\int_0^t\|u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|^p_{L^{2p}(\Omega)}\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\\
\leqslant&C_3\int_0^t\|\nabla u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|^{\frac{N(p-1)}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\\
\leqslant&\frac{C_3}{2}\int_0^t(\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|^{N(p-1)}_{L^2(\Omega)})d\tau\\
\leqslant&C_4\int_0^t(\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+1)d\tau\\
\leqslant&C_4\int_0^t\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+C_5(T).
\end{aligned}\tag{2.11.21}$$

如果 $p=1$, 有

$$\left|2\delta\int_0^t\int_\Omega |u_{m\tau}(x,\tau)|^{p-1}u_{m\tau}(x,\tau)\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau\right|$$
$$\leqslant C_6\int_0^t \|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+C_7(T). \tag{2.11.22}$$

因而, 当 $N=1,2$ 时, $1\leqslant p<\infty$ 或 $N\geqslant 3$ 时, $1\leqslant p\leqslant \dfrac{N+2}{N}$, 总有

$$\left|2\delta\int_0^t\int_\Omega |u_{m\tau}(x,\tau)|^{p-1}u_{m\tau}(x,\tau)\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau\right|$$
$$\leqslant C_8\int_0^t \|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+C_9(T). \tag{2.11.23}$$

利用分部积分及 Hölder 不等式, 得

$$\left|2\mu\int_0^t\int_\Omega |u_m(x,\tau)|^{q-1}u_m(x,\tau)\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau\right|$$
$$=2q\mu\int_0^t\int_\Omega |u_m(x,\tau)|^{q-1}|\nabla u_m(x,\tau)|^2dxd\tau$$
$$\leqslant 2q\mu\int_0^t \|u_m(\cdot,\tau)\|^{q-1}_{L^{q+1}(\Omega)}\|\nabla u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^{q+1}(\Omega)}d\tau. \tag{2.11.24}$$

应用 Sobolev-Poincaré 不等式及式 (2.11.12), 有

$$\|u_m(\cdot,\tau)\|^{q-1}_{L^{q+1}(\Omega)}\leqslant [C(\Omega,q+1)]^{q-1}\|\nabla u_m(\cdot,\tau)\|^{q-1}_{L^2(\Omega)}\leqslant C_{10}. \tag{2.11.25}$$

根据 Gagliardo-Nirenberg 插值定理 $\left(\text{取 } \lambda_1=\dfrac{N(q-1)}{2(q+1)}\right)$ 和 Young 不等式, 得

$$\begin{aligned}\|\nabla u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^{q+1}(\Omega)} &\leqslant C_{11}\|\nabla u_m(\cdot,\tau)\|^{2(1-\lambda_1)}_{L^2(\Omega)}\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^{2\lambda_1}_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_{12}(1+\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}).\end{aligned} \tag{2.11.26}$$

把式 (2.11.25) 和 (2.11.26) 代入式 (2.11.24), 得到

$$\left|2\mu\int_0^t\int_\Omega |u_m(x,\tau)|^{q-1}u_m(x,\tau)\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau\right|$$
$$\leqslant C_{13}\int_0^t \|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+C_{14}(T). \tag{2.11.27}$$

现在估计式 (2.11.19) 中的项

$$-2\int_0^t\int_\Omega \operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(x,\tau)|^2)\nabla u_m(x,\tau)\}\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau. \tag{2.11.28}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&|\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(x,\tau)|^2)\nabla u_m(x,\tau)\}|\\
=&\left|\sigma(|\nabla u_m(x,\tau)|^2)\Delta u_m(x,\tau)\right.\\
&\left.+2\sigma'(|\nabla u_m(x,\tau)|^2)\sum_{i=1}^N\left\{\frac{\partial u_m(x,\tau)}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^N\frac{\partial u_m(x,\tau)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u_m(x,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}\right]\right\}\right|\\
\leqslant&\sigma(|\nabla u_m(x,\tau)|^2)|\Delta u_m(x,\tau)|\\
&+2|\sigma'(|\nabla u_m(x,\tau)|^2)||\nabla u_m(x,\tau)|^2\times\left(\sum_{i,j=1}^N\left|\frac{\partial^2 u_m(x,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac12}.
\end{aligned}\tag{2.11.29}
$$

由于 $\|u_m\|_{H^2(\Omega)}$ 与 $\|\Delta u_m\|_{L^2(\Omega)}$ 等价, 把式 (2.11.29) 代入式 (2.11.28), 得到

$$
\begin{aligned}
&\left|2\int_0^t\int_\Omega\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(x,\tau)|^2)\nabla u_m(x,\tau)\}\Delta u_m(x,\tau)dxd\tau\right|\\
\leqslant&2K_1\int_0^t\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\\
&+4K_2\int_0^t\left[\int_\Omega\sum_{i,j=1}^N\left|\frac{\partial^2 u_m(x,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2_{L^2(\Omega)}dx\right]^{\frac12}\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\\
\leqslant&2K_1\int_0^t\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+4K_2\int_0^t\|u_m(\cdot,\tau)\|_{H^2(\Omega)}\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}d\tau\\
\leqslant&C_{15}\int_0^t\|\Delta u_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau.
\end{aligned}\tag{2.11.30}
$$

将式 (2.11.23), 式 (2.11.27), 式 (2.11.30) 代入 (2.11.19), 并利用 Hölder 不等式和 Gronwall 不等式, 得到式 (2.11.17). □

引理 2.11.6　设引理 2.11.5 的条件成立, 又设当 $N>4$ 时, 满足

$$
1+\frac{1}{N}\leqq q\leqslant\min\left\{\frac{N+2}{N-2},\frac{N-2}{N-4}\right\}.
$$

则有估计

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t(\|u_{m\tau^2}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla^2 u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)})d\tau\\
\leqslant&C_{16}(T),\quad t\in[0,T].
\end{aligned}\tag{2.11.31}
$$

证明　式 (2.11.9) 两端同乘以 $-2\lambda_j g_{mjt}(t)$, 并对 $j=1,2,\cdots,m$ 求和, 得

$$
\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\Delta u_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)+2\|\Delta u_{mt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\delta \int_\Omega |u_{mt}(x,t)|^{p-1} u_{mt}(x,t)\Delta u_{mt}(x,t)dx \\
&\quad - 2\mu \int_\Omega |u_m(x,t)|^{q-1} u_m(x,t)\Delta u_{mt}(x,t)dx \\
&\quad - 2\int_\Omega \operatorname{div}\left\{\sigma(|\nabla u_m(x,t)|^2)\nabla u_m(x,t)\right\}\Delta u_{mt}(x,t)dx. \qquad (2.11.32)
\end{aligned}
$$

接下来估计式 (2.11.32) 右端的有关项.

利用分部积分可以得到

$$
\begin{aligned}
&- 2\delta \int_\Omega |u_{mt}(x,t)|^{p-1} u_{mt}(x,t)\nabla^2 u_{mt}(x,t)dx \\
&= 2\delta p \int_\Omega |u_{mt}(x,t)|^{p-1} |\nabla u_{mt}(x,t)|^2 dx \geqslant 0. \qquad (2.11.33)
\end{aligned}
$$

当 $1 \leqslant N \leqslant 3$ 时, 有

$$
\|u_m(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_{17}\|u_m(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C_{17}(T). \qquad (2.11.34)
$$

利用 Hölder 不等式, Young 不等式, 式 (2.11.34), 并注意到当 $N=1,2$ 时, $1<q<\infty$ 以及当 $N=3$ 时, $1<q\leqslant 5$, 得到

$$
\begin{aligned}
&\left|2\mu \int_\Omega |u_m(x,t)|^{q-1} u_m(x,t)\nabla^2 u_{mt}(x,t)dx\right| \\
&= \left|-2\mu q \int_\Omega |u_m(x,t)|^{q-1} \nabla u_m(x,t)\nabla u_{mt}(x,t)dx\right| \\
&\leqslant 2\mu q \|u_m(\cdot,t)\|^{q-1}_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{18}(T)(1+\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|^2). \qquad (2.11.35)
\end{aligned}
$$

当 $N \geqslant 4$ 时, 注意到引理中关于 q 的假定, 并利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理, 有

$$
\|\nabla u_m(\cdot,t)\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \leqslant C_{19}\|\Delta u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{20}(T), \qquad (2.11.36)
$$

$$
\|u_m(\cdot,t)\|_{L^{N(q-1)}(\Omega)} \leqslant C_{21}\|\Delta u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{22}(T). \qquad (2.11.37)
$$

注意到式 (2.11.36) 和 (2.11.37), 可知

$$
\begin{aligned}
&\left|2\mu \int_\Omega |u_m(x,t)|^{q-1} u_m(x,t)\Delta u_{mt}(x,t)dx\right| \\
&\leqslant 2\mu q \|u_m(\cdot,t)\|^{q-1}_{L^{N(q-1)}(\Omega)} \|\nabla u_m(\cdot,t)\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_{23}(T)(1+\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}). \qquad (2.11.38)
\end{aligned}
$$

因而当 $N \geqslant 1$ 时, 有

$$\left|2\mu \int_\Omega |u_m(x,t)|^{q-1} u_m(x,t) \nabla^2 u_{mt}(x,t)dx\right| \leqslant C_{24}(T)(1+\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2). \tag{2.11.39}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_\Omega \operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(x,t)|^2)\nabla u_m(x,t)\}\Delta u_{mt}(x,t)dx\right| \\
\leqslant & 2\int_\Omega \sigma(|\nabla u_m(x,t)|^2)|\Delta u_m(x,t)||\Delta u_{mt}(x,t)|dx \\
&+4\int_\Omega (|\sigma'(\nabla u_m(x,t)|^2)||\nabla u_m(x,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\{\sum_{i,j=1}^N \left[\frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} |\Delta u_{mt}(x,t)|dx \\
\leqslant & 2K_1\|\Delta u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} + C_{25}\|\Delta u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant & \|\Delta u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{26}(T).
\end{aligned} \tag{2.11.40}$$

把式 (2.11.33), (2.11.39) 和 (2.11.40) 代入式 (2.11.32), 并利用 Gronwall 不等式, 得

$$\|\nabla u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\Delta u_{m\tau}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leqslant C_{27}(T), \quad t\in[0,T]. \tag{2.11.41}$$

式 (2.11.9) 两端同乘以 $g_{mjt^2}(t)$, 并对 $j=1,2,\cdots,m$ 求和, 得到

$$\begin{aligned}
&\|u_{mt^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
=&(\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m|^2)\nabla u_m\}+\Delta u_m+\Delta u_{mt}-\delta|u_{mt}|^{p-1}u_{mt}+\mu|u_m|^{q-1}u_m, u_{mt^2}).
\end{aligned} \tag{2.11.42}$$

由式 (2.11.11), (2.11.29), 利用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 推出

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(x,t)|^2)\nabla u_m(x,t)\}u_{mt^2}(x,t)dx\right| \\
\leqslant & \int_\Omega \Bigg[\sigma(|\nabla u_m(x,t)|^2)|\nabla^2 u_m(x,t)| \\
&+2|\sigma'(|\nabla u_m(x,t)|^2)\|\nabla u_m(x,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\sum_{i,j=1}^N \left|\frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]|u_{mt^2}(x,t)|dx \\
\leqslant & \frac{1}{10}\|u_{mt^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{28}(T).
\end{aligned} \tag{2.11.43}$$

由于$1\leqslant p\leqslant 1+\dfrac{2}{N}$ $(N\geqslant 1)$, $1<q<\infty$ $(N=1,2)$, $1<q\leqslant \dfrac{N+2}{N-2}$ $(N=3,4)$ 和

$1+\frac{1}{N} \leqslant q \leqslant \min\left\{\frac{N+2}{N-2}, \frac{N-2}{N-4}\right\}$ $(N>4)$, 利用式 (2.11.12), (2.11.17), (2.11.41) 以及 Sobolev 嵌入定理, 有

$$\|u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^{2p}(\Omega)}^p \leqslant C_{29}\|u_{mt}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^p \leqslant C_{30}(T), \tag{2.11.44}$$

$$\|u_m(\cdot,t)\|_{L^{2q}(\Omega)}^q \leqslant C_{31}\|u_m(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}^q \leqslant C_{32}\|\nabla^2 u_m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^q \leqslant C_{33}(T). \tag{2.11.45}$$

利用式 (2.11.44), (2.11.45), Hölder 不等式和 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned} |-\delta(|u_{mt}|^{p-1}u_{mt}, u_{mt^2})| &\leqslant \delta\|u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^{2p}(\Omega)}^p\|u_{mt^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{1}{10}\|u_{mt^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{34}(T), \end{aligned} \tag{2.11.46}$$

$$\begin{aligned} |\mu(|u_m|^{q-1}u_m, u_{mt^2})| &\leqslant \mu\|u_m(\cdot,t)\|_{L^{2q}(\Omega)}^q\|u_{mt^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{1}{10}\|u_{mt^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{35}(T). \end{aligned} \tag{2.11.47}$$

应用式 (2.11.17) 和 Cauchy 不等式, 可见

$$|(\Delta u_m, u_{mt^2})| \leqslant \frac{1}{10}\|u_{mt^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{36}(T), \tag{2.11.48}$$

$$|(\Delta u_{mt}, u_{mt^2})| \leqslant \frac{1}{10}\|u_{mt^2}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{37}\|\Delta u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.11.49}$$

将式 (2.11.43), (2.11.46) 和式 (2.11.49) 代入式 (2.11.42), 得到

$$\|u_{mt^2}(\cdot,t)\|^2 \leqslant C_{38}\|\Delta u_{mt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{39}(T). \tag{2.11.50}$$

式 (2.11.50) 在 $[0,t]$ 上积分, 并利用式 (2.11.41), 有

$$\int_0^t \|u_{m\tau^2}(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leqslant C_{40}(T), \quad t\in[0,T]. \tag{2.11.51}$$

由式 (2.11.41) 和式 (2.11.51) 知道式 (2.11.31) 成立. □

2.11.4 主要定理的证明

证明 由引理 2.11.1–引理 2.11.6 知道

$$\begin{aligned} &\|u_m(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u_{mt}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_0^t (\|\Delta u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{m\tau^2}(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2) d\tau \\ &+ \int_0^t \|u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} d\tau \leqslant C_{41}(T), \quad t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{2.11.52}$$

根据上述估计式, 可以从 $\{u_m(x,t)\}$ 中选出子序列, 仍然记为 $\{u_m(x,t)\}$, 使得当 $m\to\infty$ 时,

$$\{u_m(x,t)\} \text{ 在 } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛于 } u(x,t), \tag{2.11.53}$$

$$\{u_{mt}(x,t)\} \text{ 在 } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛于 } u_t(x,t), \tag{2.11.54}$$

$$\{u_{mt^2}(x,t)\} \text{ 在 } L^2((0,T);L^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛于 } u_{tt}(x,t), \tag{2.11.55}$$

$$\{u_{mt}(x,t)\} \text{ 在 } L^{p+1}((0,T);L^{p+1}(\Omega)) \text{ 中弱收敛于 } u_t(x,t). \tag{2.11.56}$$

现在证明当 $m\to\infty$ 时,

$$\{|u_m(x,t)|^{q-1}u_m(x,t)\} \text{ 在 } L^{\frac{q+1}{q}}(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } |u(x,t)|^{q-1}u(x,t), \tag{2.11.57}$$

$$\{|u_{mt}(x,t)|^{p-1}u_{mt}(x,t)\} \text{ 在 } L^{\frac{p+1}{p}}(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } |u_t(x,t)|^{p-1}u_t(x,t). \tag{2.11.58}$$

事实上, 由于

$$\begin{aligned}&\int_0^t \||u_m(\cdot,\tau)|^{q-1}u_m(\cdot,\tau)\|_{L^{\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}}d\tau=\int_0^t\|u_m(\cdot,\tau)\|_{L^{q+1}}^{q+1}d\tau\\ \leqslant&[C(\Omega,q+1)]^{q+1}\int_0^t\|\nabla u_m(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^{q+1}d\tau\leqslant C_{42}(T),\quad t\in[0,T],\end{aligned} \tag{2.11.59}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^t \||u_{m\tau}(\cdot,\tau)|^{p-1}u_{m\tau}(\cdot,\tau)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)}^{\frac{p+1}{p}}d\tau\\ =&\int_0^t\int_\Omega|u_{m\tau}(x,\tau)|^{p+1}dxd\tau\leqslant C_{43}(T),\quad t\in[0,T],\end{aligned} \tag{2.11.60}$$

由式 (2.11.59) 知道存在 $\varphi(x,t)\in L^{\frac{q+1}{q}}(Q_T)$, 使得当 $m\to\infty$ 时,

$$\{|u_m(x,t)|^{q-1}u_m(x,t)\} \text{ 在 } L^{\frac{q+1}{q}}(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } \varphi(x,t). \tag{2.11.61}$$

由于

$$H^1(Q_T)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(Q_T), \tag{2.11.62}$$

因而可以从 $\{u_m(x,t)\}$ 中选取子列, 仍记为 $\{u_m(x,t)\}$, 使得当 $m\to\infty$ 时, 子序列 $\{u_m(x,t)\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中收敛于 $u(x,t)$, 进而 $\{u_m(x,t)\}$ 在 Q_T 上几乎处处收敛于 $u(x,t)$. 因此在 Q_T 上

$$\{|u_m(x,t)|^{q-1}u_m(x,t)\} \text{ 几乎处处收敛于 } |u(x,t)|^{q-1}u(x,t). \tag{2.11.63}$$

由式 (2.11.58), (2.11.62) 和引理 2.11.2 知道

$$\varphi(x,t)=|u(x,t)|^{q-1}u(x,t). \tag{2.11.64}$$

同理可以证明式 (2.11.58) 成立.

现在, 证明子序列 $\{\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(x,t)|^2)\nabla u_m(x,t)\}\}$, 当 $m\to\infty$ 时, 在 $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ 中弱收敛于 $\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u(x,t)|^2)\nabla u(x,t)\}$. 事实上, 对于任意的 $w\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, 有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^T\int_\Omega \operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m|^2)\nabla u_m-\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u\}wdxdt\right|\\
=&\left|\int_0^T\int_\Omega\{\sigma(|\nabla u_m|^2)(\nabla u_m-\nabla u)+[\sigma(|\nabla u_m|^2)-\sigma(|\nabla u|^2)]\nabla u\}\nabla wdxdt\right|\\
\leqslant& K_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla u_m-\nabla u||\nabla w|dxdt+\int_0^T\int_\Omega|\sigma(|\nabla u_m|^2)-\sigma(|\nabla u|^2)||\nabla u||\nabla w|dxdt\\
\leqslant& K_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla u-\nabla u_m||\nabla w|dxdt+K_3\int_0^T\int_\Omega|\nabla u_m-\nabla u||\nabla w|dxdt\\
\leqslant& C_{44}\int_0^T\|\nabla u-\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}dt.
\end{aligned}\tag{2.11.65}
$$

因为 $H^2(Q_T)\hookrightarrow\hookrightarrow H^1(Q_T)$, 所以可以从 $\{u_m(x,t)\}$ 中选出子序列, 仍记为 $\{u_m(x,t)\}$, 使得当 $m\to\infty$ 时, 子序列 $\{\nabla u_m\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中收敛于 ∇u. 由式 (2.11.65) 知, 当 $m\to\infty$ 时,

$$
\{\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(x,t)|^2)\nabla u_m(x,t)\}\}\text{ 在}L^2(Q_T)\text{ 中弱收敛于 }\operatorname{div}\{\sigma(\nabla u(x,t)|^2)\nabla u(x,t)\}\ .\tag{2.11.66}
$$

由式 (2.11.53)–(2.11.55), (2.11.57), (2.11.58) 和式 (2.11.66) 推出, 对于任意的 $w\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^{p+1}(Q_T)$,

$$
\int_0^T\int_\Omega\{u_{tt}-\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u\}-\Delta u-\Delta u_t+\delta|u_t|^{p-1}u_t-\mu|u|^{q-1}u\}wdxdt=0,\tag{2.11.67}
$$

并且关系式 (2.11.5)–(2.11.7) 成立.

现在, 证明式 (2.11.3) 成立. 根据式 (2.11.53), (2.11.54) 和引理 2.11.3, 特别得到子序列 $\{u_{m'}(0,x)\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛于 $u(x,0)$, 而当 $m'\to\infty$ 时, $u_{m'}(0,x)=u_{0m'}(x)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 $u_0(x)$. 因而 $u(0,x)=u_0(x)$.

同理可证 $u_t(x,0)=u_1(x)$.

现在证明解的唯一性. 设 $v_1(x,t)$ 和 $v_2(x,t)$ 是问题 (2.11.1)–(2.11.3) 的两个广义解. 因此 $u(x,t)=v_1(x,t)-v_2(x,t)$ 满足如下问题

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\{\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla v_1|^2)\nabla v_1\}-\operatorname{div}\{\sigma(|\nabla v_2|^2)\nabla v_2\}\}\\
&\quad+\delta|v_{1t}|^{p-1}v_{1t}-\delta|v_{2t}|^{p-1}v_{2t}\\
&=\mu|v_1|^{q-1}v_1-\mu|v_2|^{q-1}v_2,\quad x\in\Omega,\quad t>0,
\end{aligned}\tag{2.11.68}
$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad t>0, \tag{2.11.69}$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in\Omega. \tag{2.11.70}$$

方程 (2.11.68) 两边同乘以 $2u_t$, 并两端各加上 $2uu_t$, 然后在 Ω 上积分, 通过分部积分, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2)+2\|\nabla u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\\&+2\int_\Omega\{\sigma(|\nabla v_1|^2)\nabla v_1-\sigma(|\nabla v_2|^2)\nabla v_2\}\nabla u_t dx\\&+2\int_\Omega(\delta|v_{1t}|^{p-1}v_{1t}-\delta|v_{2t}|^{p-1}v_{2t})(v_{1t}-v_{2t})dx\\=&2\int_\Omega(\mu|v_1|^{q-1}v_1-\mu|v_2|^{q-1}v_2)u_t dx+2\int_\Omega uu_t dx.\end{aligned} \tag{2.11.71}$$

易知

$$\int_\Omega(|v_{1t}|^{p-1}v_{1t}-|v_{2t}|^{p-1}v_{2t})(v_{1t}-v_{2t})dx\geqslant 0. \tag{2.11.72}$$

当 $N\geqslant 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega(|v_1|^{q-1}v_1-|v_2|^{q-1}v_2)u_t dx\right|\leqslant q\int_\Omega\sup(|v_1|^{q-1},|v_2|^{q-1})|u||u_t|dx\\&\leqslant C_{45}(\||v_1|^{q-1}\|_{L^N(\Omega)}+\||v_2|^{q-1}\|_{L^N(\Omega)})\|u\|_{L^r(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{2}=1$. 由于 $(q-1)N\leqslant r$, $r=\dfrac{2N}{N-2}$ 以及 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}&\||v_1|^{q-1}\|_{L^N(\Omega)}=\|v_1\|_{L^{N(q-1)}(\Omega)}^{q-1}\leqslant C_{46}\|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega)}^{q-1},\\&\||v_2|^{q-1}\|_{L^N(\Omega)}\leqslant C_{47}\|\nabla v_2\|_{L^2(\Omega)}^{q-1}.\end{aligned}$$

由于 $v_1,v_2\in L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega))$, 因而

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega(|v_1|^{q-1}v_1-|v_2|^{q-1}v_2)u_t dx\right|&\leqslant C_{48}(\|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega)}^{q-1}+\|\nabla v_2\|_{L^2(\Omega)}^{q-1})\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant C_{49}(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2).\end{aligned} \tag{2.11.73}$$

注意到关于 $\sigma(s)$ 的假定, 得

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega\{\sigma(|\nabla v_1|^2)\nabla v_1-\sigma(|\nabla v_2|^2)\nabla v_2\}\nabla u_t dx\right|\\=&\left|\int_\Omega\{[\sigma(|\nabla v_1|^2)-\sigma(|\nabla v_2|^2)]\nabla v_1+\sigma(|\nabla v_2|^2)(\nabla v_1-\nabla v_2)\}\nabla u_t dx\right|\\\leqslant&\int_\Omega\{|\sigma(|\nabla v_1|^2)-\sigma(|\nabla v_2|^2)||\nabla v_1||\nabla u_t|\}dx+\int_\Omega\sigma(|\nabla v_2|^2)|\nabla v_1-\nabla v_2||\nabla u_t|dx\\\leqslant&C_{50}\int_\Omega|\nabla v_1-\nabla v_2||\nabla u_t|dx\end{aligned}$$

$$\leqslant C_{51}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.11.74}$$

从式 (2.5.71)–(2.5.74) 可知

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant C_{52}\int_0^t(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2)d\tau. \tag{2.11.75}$$

因而, $u=0$.

当 $N=1$ 时, $H^2(\Omega)\hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$. 因此, 根据中值定理, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega(|v_1|^{q-1}v_1-|v_2|^{q-1}v_2)u_tdx\right|&=q\int_\Omega|\lambda v_1+(1-\lambda)v_2|^{q-1}|u||u_t|dx\\&\leqslant C_{53}(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2),\end{aligned} \tag{2.11.76}$$

其中 $0<\lambda<1$. 由于式 (2.11.72) 和 (2.11.74) 对 $N=1$ 成立, 因而对 $N=1$, 也有 $u=0$. □

2.11.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [113]. 与本节有关的文献见 [85], [114]–[121].

2.12 一类具色散项非线性波动方程的初边值问题

2.12.1 引言

本节研究下列一类具色散项非线性波动方程的初边值问题

$$u_{tt}+\Delta^2u+\lambda u_t=\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i(u_{x_i}),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \tag{2.12.1}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}=0,\quad t\in[0,\infty), \tag{2.12.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega \tag{2.12.3}$$

弱解的整体存在性、渐近性质和解的爆破, 其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ 表示 u 沿 $\partial\Omega$ 外法向 ν 的导数, $\sigma_i(s)(i=1,2,\cdots,N)$ 是给定的非线性函数和 $\lambda\geqslant 0$ 是一实数.

在 $N=1$ 的情况下, 不失一般性, 假定 $\Omega=(0,1)$, 问题 (2.12.1)–(2.12.3) 变成

$$u_{tt}+u_{xxxx}+\lambda u_t=\sigma(u_x)_x,\quad (x,t)\in(0,1)\times(0,\infty), \tag{2.12.4}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{2.12.5}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{2.12.6}$$

形如式 (2.12.4) 是源于弹塑性微观结构模型的一类重要的非线性发展方程, 它们描写弹塑性杆的纵振动和反平面剪切, 见文献 [48]. 当 $\lambda=0$ 和实数 $a<0$ 时, 在假定"$\sigma(s)=as^2$"下, 文献 [48] 的作者指出变型和小的低阶非线性项之间的相互作用, 以及高阶色散微结构项导致方程具有局部孤立子结构. 非线性的积聚效应和色散微结构项的色散效应的作用导致一适定但增长的"跳跃"轮廓. 对于一般的具有 $\lambda=0$ 的方程 (2.12.4), 在假定"$\sigma\in C^2(\mathbb{R}),\sigma''(s)$ 满足局部 Lipschitz 条件和 $\sigma'(s)$ 下有界"的情况下, 文献 [50] 的作者证明了对应的问题 (2.12.4)–(2.12.6) 存在唯一的广义解, 并给出问题 (2.12.4)–(2.12.6) 解在有限时刻爆破的充分条件.

在现实过程中, 线性阻尼以及色散起着重要的作用. 所以, 具有线性阻尼或者色散项的非线性发展方程的研究近年来吸引了许多数学家和工程师们的关注.

下面研究一类具有色散项的非线性波动方程初边值问题 (2.12.1)–(2.12.3) 解的整体存在性、渐近性质和爆破. 我们证明非线性项和初边值在较温和条件下的初边值问题分别在大初值和小初值能量的情况下存在整体弱解和当 $t\to\infty$ 时, 该解以指数形式衰减为零. 特别地, 在空间维数 $N=1$ 的情况下, 弱解调整为唯一的广义解. 如果保证弱解整体存在性的条件不满足, 那么在相反的条件下, 初边值问题 (2.12.4)–(2.12.6) 解在有限时刻爆破. 最后给出一个例子.

2.12.2 弱解的整体存在性和渐近性质

定义位势井

$$W=\{u\in H_0^2(\Omega)|I(u)=\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}-b\|\nabla u\|^{m+1}_{L^{m+1}(\Omega)}>0\}\cup\{0\},$$

此处和以后 $m>1$ 和 $b>0$ 是实数.

为了证明下面的论述, 需要以下引理.

引理 2.12.1 [49,122] 对于任意的 $u\in H_0^2(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ 与 $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ 等价.

引理 2.12.2 设 $m+1\leqslant\dfrac{2N}{N-2}$. 如果 $N>2$, 那么 W 是 H_0^2 中 0 的一个邻域.

证明 根据 Sobolev 嵌入定理

$$H_0^2(\Omega)\hookrightarrow W_0^{1,m+1}(\Omega). \tag{2.12.7}$$

对于任意的 $u\in H_0^2(\Omega)$, 如果 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}=0$, 显然 $u\in W$; 如果 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}>0$, 式 (2.12.7) 和 Poincaré 不等式给出只要 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}<(1/C_*b)^{\frac{1}{m-1}}$, 就有

$$b\|\nabla u\|^{m+1}_{L^{m+1}(\Omega)}\leqslant C_*b\|\Delta u\|^{m-1}_{L^2(\Omega)}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}<\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.12.8}$$

其中 C_* 表示 $H_0^0(\Omega)$ 嵌入 $W_0^{m+1}(\Omega)$ 的嵌入常数. 方程 (2.12.8) 推出引理 2.12.2 的结论. □

为了下面的目的, 对于合适的 u 引入由下式

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{b}{m+1}\|\nabla u\|^{m+1}_{L^{m+1}(\Omega)} \tag{2.12.9}$$

定义的泛函 J. 显然, 对所有这样的 u,

$$J(u) = \frac{1}{2}I(u) + d_1\|\nabla u\|^{m+1}_{L^{m+1}(\Omega)} = \frac{1}{m+1}I(u) + \frac{d_1}{b}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.12.10}$$

其中此处和以后 $d_1 = \dfrac{(m-1)b}{2(m+1)}$.

定理 2.12.1 设

(i) $\sigma_i \in C^1(\mathbb{R})$, $|\sigma_i(s)| \leqslant b|s|^m, s \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, N$, 如果 $N > 2$, 则 $m+1 \leqslant \dfrac{2N}{N-2}$.

(ii) $u_0 \in W, u_1 \in L^2(\Omega)$ 使得

$$\begin{aligned} 0 < E(0) &= \frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{0x_i}} \sigma_{i=1}(s)dsdx \\ &< \frac{m-1}{4(m+1)}\left(\frac{1}{C_* b}\right)^{\frac{2}{m-1}}. \end{aligned} \tag{2.12.11}$$

则对于任意的 $T > 0$, 问题 (2.12.1)–(2.12.3) 存在唯一弱解 $u \in L^\infty([0,T]; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0,T]; L^2(\Omega))$ 且当 $\lambda > 0$ 时,

$$\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^{m+1}(\Omega)} \leqslant ME(0)e^{-\delta t}, \quad t > 0 \tag{2.12.12}$$

成立, 其中 M 和 δ 均为正常数.

证明 寻找问题 (2.12.1)–(2.12.3) 形如

$$u^n(\cdot,t) = \sum_{j=1}^n T_{jn}(t)w_j(x) \tag{2.12.13}$$

的近似解 $u^n(x,t)$, 其中 $\{w_j(x)\}_{j=1}^\infty$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 中也是 $L^2(\Omega)$ 中的正交基, 且系数 $\{T_{jn}(t)\}(T_{jn}(t) = (u^n(x,t), w_j))$ 满足下列 Cauchy 问题

$$(u_{tt}^n, w_j) + (\Delta^2 u^n, w_j) + \lambda(u_t^n, w_j) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i(u_{x_i}^n), w_j\right), \quad t > 0, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{2.12.14}$$

$$u^n(x,0) = u_0^n(x), \quad u_t^n(x,0) = u_1^n(x). \tag{2.12.15}$$

由于 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^2(\Omega)$ 中和在 $L^2(\Omega)$ 中稠密, 选择 $u_0^n, u_1^n \in C_c^\infty(\Omega)$, 使得当 $n \to \infty$ 时,

$$\text{在 } H_0^2(\Omega) \text{ 中 } u_0^n \to u_0,\ \ \text{在 } L^2(\Omega)\text{中 } u_1^n \to u_1. \tag{2.12.16}$$

在式 (2.2.14) 中用 $u_t^n(x,t)$ 代替 w_j 得

$$\frac{d}{dt}E_n(t) + \lambda\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, \tag{2.12.17}$$

$$E_n(t) + \lambda\int_0^t \|u_t^n(\cdot,\tau)\|^2 d\tau = E_n(0), \quad t > 0, \tag{2.12.18}$$

其中

$$E_n(t) = \frac{1}{2}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}^n} \sigma_i(s)dsdx.$$

显然

$$E_n(t) \geqslant \frac{1}{2}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u^n(\cdot,t)), \quad t > 0, \tag{2.12.19}$$

$$E_n(0) = \frac{1}{2}\|u_1^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{0x_i}^n} \sigma_i(s)dsdx. \tag{2.12.20}$$

应用积分中值定理, 由假定 (i), 式 (2.12.7) 和式 (2.12.16) 知, 当 $n \longrightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \int_{u_{0x_i}}^{u_{0x_i}^n} \sigma_i(s)dsdx\right| &\leqslant \int_\Omega |\sigma_i(\xi_i)(u_{0x_i}^n - u_{0x_i})|dx \\ &\leqslant \|\sigma_i(\xi_i)\|_{L^{(m+1)'}(\Omega)}\|u_{0x_i}^n - u_{0x_i}\|_{L^{(m+1)}(\Omega)} \\ &\leqslant b\|\xi_i\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^m\|u_{0x_i}^n - u_{0x_i}\|_{L^{(m+1)}(\Omega)} \to 0,\end{aligned} \tag{2.12.21}$$

其中 $(m+1)'$ 是 $(m+1)$ 的共轭指数, $\xi_i = u_{0x_i} + \theta_i u_{0x_i}^n, 0 < \theta_i < 1, i = 1, \cdots, N$. 所以当 $n \to \infty$ 时, $E_n(0) \to E(0)(> 0)$, 其中 $E(0)$ 如式 (2.12.11) 所示. 不失一般性, 假定对于所有的 $E_n(0) < 2E(0)$, 由式 (2.12.18) 推出, 对于所有的

$$E_n(t) < 2E(0), \quad t > 0. \tag{2.12.22}$$

因为 $u_0 \in W$, 联合式 (2.12.16) 和式 (2.12.17) 导出, 当 $n \to \infty$ 时, $I(u_0^n) \to I(u_0) > 0$. 不失一般性, 令 $I(u_0^n) > 0$, 即对所有的 n, $u_0^n \in W$. 所以对于所有的 n,

$$u^n(x,t) \in W, \quad t > 0. \tag{2.12.23}$$

事实上, 如果存在一个 $T > 0$, 使得 $u^n(x,t) \in W$, $t \in [0,T)$, 但另一方面 $u^n(x,T) \in \partial W$, 即对某个 n, $I(u^n(x,T)) = 0$, 于是 $\|\Delta u^n(x,T)\| \neq 0$ (或另外根据引

理 2.12.2, $u^n(x,T)$ 是 W 的一个内点). 由式 (2.12.8), (2.12.10), (2.12.19), (2.12.22) 和式 (2.12.11) 得

$$\begin{aligned} b\|\nabla u^n(\cdot,t)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^{m+1} &\leqslant C_* b(2E(0)b/d_1)^{\frac{m-1}{2}}\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &< \|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \end{aligned} \tag{2.12.24}$$

由式 (2.12.23) 推出 $I(u^n(\cdot,T))>0$, 这是一个矛盾. 因此, 式 (2.12.16) 成立. 由式 (2.12.23) 推出, 对于 $t>0$ 式 (2.12.24) 成立.

从式 (2.12.17), (2.12.18), (2.12.21), (2.12.22) 和式 (2.12.10) 可见

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{2}\left(\frac{1}{b}\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u^n(\cdot,t)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^{m+1}\right) \\ &+\lambda\int_0^t \|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leqslant 2E(0), \quad t>0. \end{aligned} \tag{2.12.25}$$

依照式 (2.12.25), 一方面有

$$\begin{aligned} |(\sigma_i(u_{x_i}^n), w_{jx_i})| &\leqslant \|\sigma_i(u_{x_i}^n)\|_{L^{(m+1)'}(\Omega)}\|w_{jx_i}\|_{L^{(m+1)}(\Omega)} \\ &\leqslant M\|u_{x_i}^n(\cdot,t)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^m\|\Delta w_j\|_{L^2(\Omega)} \leqslant M, \\ &t>0, \quad i=1,\cdots,N, \quad j=1,\cdots,n, \end{aligned}$$

其中此处和以后用 M 和 $C_i(i=1,2,\cdots)$ 表示不依赖于 n 和 t 的不同正常数, 即对于任意的 $T>0$, 在方程组 (2.12.14) 中的非线性项在 $[0,T]$ 上是一致有界的. 所以问题 (2.12.14), (2.12.15) 的解对于每一个 n 在 $[0,T]$ 上是存在的. 另一方面, 可以从 $\{u^n\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{u^n\}$, 使得对于任意的 $T>0$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\text{在 } L^\infty([0,T];H_0^2(\Omega))\text{中, 弱} * u^n \to u, \tag{2.12.26}$$

$$\text{在 } L^\infty([0,T];L^2(\Omega))\text{中, 弱} * u_t^n \to u_t; \tag{2.12.27}$$

对于任意的 $t>0$

$$\text{在 } H_0^2(\Omega)\text{中, 弱} * u^n(x,t) \to u(x,t), \tag{2.12.28}$$

$$\text{在 } L^2(\Omega)\text{中, 弱} * u_t^n(x,t) \to u_t(x,t). \tag{2.12.29}$$

根据式 (2.12.28), (2.12.29), Sobolev 嵌入定理和 $\sigma_i(s)$ 的连续性, 对于任意的 $t>0$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\text{在 } L^2(\Omega)\text{中, 强}\nabla u^n(x,t) \to \nabla u(x,t) \text{ 并在 } \Omega\text{上几乎处处收敛}, \tag{2.12.30}$$

$$\text{在 } \Omega\text{上几乎处处 } \sigma_i(u_{x_i}^n(x,t)) \to \sigma_i(u_{x_i}(t)), i=1,2,\cdots,N. \tag{2.12.31}$$

式 (2.12.14) 在 $(0,t)$ 上积分, 得

$$
\begin{aligned}
&(u_t^n(x,t),w_j)+\int_0^t(\Delta u^n(x,\tau),\Delta w_j)d\tau+\lambda\int_0^t(u_t^n(x,\tau),w_j)d\tau\\
=&-\sum_{i=1}^N\int_0^t(\sigma_i(u_x^n(x,\tau)),w_{jx_i})d\tau+(u_1^n,w_j),\quad t>0.
\end{aligned}\tag{2.12.32}
$$

由于

$$
\int_0^t(\Delta u^n(x,\tau),\Delta w_j)d\tau\leqslant\int_0^t\|\Delta u^n(x,\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta w_j\|_{L^2(\Omega)}d\tau\leqslant MT,\quad t\in[0,T],\tag{2.12.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t(\sigma_i(u_{x_i}^n(x,\tau)),w_{jx_i})d\tau\\
\leqslant&\int_0^t\|\sigma_i(u_{x_i}^n(x,\tau))\|_{L^{(m+1)'}(\Omega)}\|w_{jx_i}\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}d\tau\\
\leqslant&M\int_0^t\|u_{x_i}^n(x,\tau)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^m\|\Delta w_j\|_{L^2(\Omega)}d\tau\\
\leqslant&MT,\quad i=1,\cdots,N,\quad j=1,\cdots,n,\quad t\in[0,T],
\end{aligned}\tag{2.12.34}
$$

在式 (2.12.32) 中令 $n\to\infty$, 再应用式 (2.12.28), (2.12.29), (2.12.33), (2.12.34) 和 Lebesgue 控制收敛定理给出

$$
\begin{aligned}
&(u_t(x,t),w_j)+\int_0^t(\Delta u,\Delta w_j)d\tau+\lambda\int_0^t(u_t,w_j)d\tau+\sum_{i=1}^N\int_0^t(\sigma_i(u_{x_i}),w_{jx_i})d\tau\\
=&(u_1,w_j),\quad t>0,\quad j=1,2,\cdots.
\end{aligned}\tag{2.12.35}
$$

因为 $\{w_j\}$ 在 $H_0^2(\Omega)$ 中稠密, 式 (2.12.35) 对 t 求导, 对任意的 $v\in H_0^2(\Omega)$ 有

$$
\left(u_{tt}(x,t)-\Delta^2u(x,t)+\lambda u_t(x,t)-\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i(u_{x_i}(x,t)),v\right)=0,\quad t\in[0,T].\tag{2.12.36}
$$

由式 (2.12.26), (2.12.27) 知, 当 $n\to\infty$ 时, 在 $W^{1,\infty}[0,T]$ 中

$$
弱*(u^n(x,t),w_j)\to(u(x,t),w_j),\quad j=1,2\cdots.\tag{2.12.37}
$$

因为 $W^{1,\infty}[0,T]\hookrightarrow C[0,T]$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$
(u^n(x,0),w_j)\to(u(x,0),w_j),\quad j=1,2,\cdots.\tag{2.12.38}
$$

在式 (2.12.35) 中令 $t\to0^+$, 得

$$(u_t(x,0),w_j)=(u_1,w_j),\quad j=1,2,\cdots. \tag{2.12.39}$$

综合式 (2.12.37), (2.12.38) 和式 (2.12.16), 可见

$$\text{在}H_0^2(\Omega)\text{中}, u(x,0)=u_0(x),\ \text{在}L^2(\Omega)\text{中}, u_t(x,0)=u_1(x). \tag{2.12.40}$$

由方程 (2.12.36) 和式 (2.12.40) 推出, $u\in L^\infty([0,T];H_0^2(\Omega))\cap W^{1,\infty}([0,T];L^2(\Omega))$ 是问题 (2.12.1)–(2.12.3) 的整体弱解.

现在, 讨论上述弱解的渐近性质.

在式 (2.12.14) 中用 $u^n(x,t)$ 代替 w_j 得

$$\begin{aligned}0=&\frac{d}{dt}(u_t^n,u^n)-\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta u^n(\cdot,t)\|^2\\&+\sum_i(\sigma_i(u_{x_i}^n),u_{x_i}^n)+\frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\\geqslant&\frac{d}{dt}(u_t^n,u^n)-\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+I(u^n(x,t))\\&+\frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2,\quad t>0.\end{aligned} \tag{2.12.41}$$

由式 (2.12.24) 得

$$b\|\nabla u^n(\cdot,t)\|_{L^{m+1}(\Omega)}^{m+1}\leqslant\gamma\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2,\quad t>0,$$

其中 $\gamma=C_*b(2E(0)b/d_1)^{\frac{m-1}{2}}<1$. 所以

$$I(u^n(\cdot,t))=\|\Delta u^n(\cdot,t)\|^2-b\|\nabla u^n(\cdot,t)\|_{L^{m+1}(\Omega)}^{m+1}\geqslant b\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\|\nabla u^n(\cdot,t)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^{m+1}, \tag{2.12.42}$$

$$I(u^n(x,t))\geqslant(1-\gamma)\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{2.12.43}$$

$$\|\nabla u^n(\cdot,t)\|_{L^{m+1}(\Omega)}^{m+1}+\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\gamma}{b}+1\right)I(u^n(x,t)),\quad t>0. \tag{2.12.44}$$

式 (2.12.17) 两端同乘以 $e^{\delta t}$, 给出

$$\frac{d}{dt}(e^{\delta t}E_n(t))+\lambda e^{\delta t}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2=\delta e^{\delta t}E_n(t),\quad t>0. \tag{2.12.45}$$

式 (2.12.45) 在 $(0,t)$ 上积分, 并应用式 (2.12.22), (2.12.44) 和式 (2.12.41) 得

$$\begin{aligned}&e^{\delta t}E_n(t)+\lambda\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau\\\leqslant&E_n(0)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\Delta u^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2\right.\\&\left.+\frac{b}{m+1}\|\nabla u^n(\cdot,\tau)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^{m+1}\right)d\tau\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2E(0)+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau+C_1\delta\int_0^t e^{\delta\tau}I(u^n(x,\tau))d\tau\\
&\leqslant 2E(0)+\left(\frac{1}{2}+C_1\right)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau\\
&\quad -C_1\delta\left[e^{\delta t}(u_t^n(x,t),u^n(x,t))-(u_1^n,u_0^n)-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u_t^n(x,\tau),u^n(x,\tau))d\tau\right]\\
&\quad -\frac{1}{2}\lambda C_1\delta\left[e^{\delta t}\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2-\|u_0^n\|_{L^2(\Omega)}^2-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|u^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau\right]\\
&\leqslant 2E(0)+\left(\frac{1}{2}+C_1\right)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau+C_1\delta\left[e^{\delta t}\left(\frac{1}{2}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+\frac{1}{2}(1+\lambda)\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\frac{1}{2}\|u_1^n\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}(1+\lambda)\|u_0^n\|_{L^2(\Omega)}^2\right]\\
&\quad +C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}(\|(u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2)d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2E(0)+\left(\frac{1}{2}+C_1\right)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau+C_3\delta e^{\delta t}E_n(t)\\
&\quad +\frac{1}{2}C_1\delta(\|u_1^n\|_{L^2(\Omega)}^2+(1+\lambda)\|u_0^n\|_{L^2(\Omega)}^2)\\
&\quad +C_4\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E_n(\tau)d\tau,\qquad t>0.
\end{aligned}
\tag{2.12.46}
$$

取 $\delta: 0<\delta<\min\{(2C_3)^{-1},(2C_4)^{-1},\lambda/(1+2C_1)\}$, 把式 (2.12.46) 化为

$$
e^{\delta t}E_n(t)+\lambda\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau\leqslant ME(0)+2C_4\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E_n(\tau)d\tau,\qquad t>0.
\tag{2.12.47}
$$

式 (2.12.47) 应用 Gronwall 不等式, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{d_1}{2}\left(\frac{1}{b}\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla u^n(\cdot,t)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^{m+1}\right)\\
&\leqslant E_n(t)\leqslant ME(0)e^{-\delta_1 t},\quad t>0,
\end{aligned}
\tag{2.12.48}
$$

其中 $\delta_1=(1-2C_4\delta)\delta>0$. 在式 (2.12.48) 中令 $n\to\infty$, 由在 $L^\infty([0,T];H_0^2(\Omega))\cap W^{1,\infty}([0,T];L^2(\Omega))$ 中的范数的序列弱 $*$ 下半连续推出

$$
\begin{aligned}
&\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^{m+1}\\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}\inf(\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla u^n(\cdot,t)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^{m+1})\\
&\leqslant ME(0)e^{-\delta_1 t},\qquad t>0,
\end{aligned}
\tag{2.12.49}
$$

其中 $u\in L^\infty([0,T];H_0^2(\Omega))\cap W^{1,\infty}([0,T];L^2(\Omega))$ 是问题 (2.12.1)–(2.12.3) 的弱解. □

定理 2.12.2 设

(i) 假定定理 2.12.1 的(i)成立, 或者 $\sigma_i(s)s \geqslant 0$ 或者 $\sigma_i'(s) \geqslant C_0, s \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, N$, 其中 C_0 是一常数;

(ii) $u_0 \in H_0^2(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$,

则对于任意的 $T > 0$, 问题 (2.12.1)–(2.12.3) 存在唯一弱解 $u \in L^\infty([0,T]; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0,T]; L^2(\Omega))$, 且如果

(iii) $\displaystyle\int_0^s \sigma_i(\tau)d\tau \leqslant \sigma_i(s)s, s \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, N$,

则当 $\lambda > 0$ 时, 式 (2.12.12) 成立.

证明 我们寻找形如式 (2.12.13) 的问题 (2.12.1)–(2.12.3) 的近似解 $u^n(x,t)$.

情况 1. 如果 $\sigma_i(s)s \geqslant 0, s \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, N$, 这时注意到 $\displaystyle\int_0^s \sigma_i(\tau)d\tau \geqslant 0$ $(i = 1, \cdots, N)$, 重复定理 2.12.1 的证明, 并利用式 (2.12.18) 和式 (2.12.22) 知

$$\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\lambda \int_0^t \|u_t^n(\cdot,\tau)\|^2 d\tau \leqslant 4E(0), \quad t > 0. \tag{2.12.50}$$

在方程 (2.12.14) 中以 $u^n(\cdot,t)$ 代替 w_j 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(u_t^n, u^n) - \|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N (\sigma_i(u_{x_i}^n), u_{x_i}^n) = 0, \quad t > 0.\end{aligned} \tag{2.12.51}$$

方程 (2.12.17) 加上 ε 与式 (2.12.51) 的乘积给出

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\bigg[\frac{1}{2}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}^n} \sigma_i(s)dsdx + \varepsilon\left(\frac{\lambda}{2}\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (u_t^n, u^n)\right)\bigg] \\ &+ (\lambda - \varepsilon)\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \varepsilon\sum_{i=1}^N (\sigma_i(u_{x_i}^n), u_{x_i}^n) = 0, \quad t > 0.\end{aligned} \tag{2.12.52}$$

注意到 $|(u_t^n, u^n)| \leqslant \dfrac{\lambda}{2}\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \dfrac{1}{2\lambda}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, 取 $\varepsilon = \lambda/2$, 方程 (2.12.52) 两端同乘以 $e^{\delta t}$, 所得结果在 $(0,t)$ 上积分, 并利用定理 2.12.2 的假定 (iii), 得

$$\begin{aligned}&e^{\delta t}\left[\frac{1}{4}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}^n} \sigma_i(s)dsdx\right] \\ &+ \frac{\lambda}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left[\|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N (\sigma_i(u_{x_i}^n(x,\tau)), u_{x_i}^n(x,\tau))\right]d\tau\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(\|u_1^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u_0^n\|_{L^2(\Omega)}^2) + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\int_0^{u_{0x_i}^n}\sigma_i(s)dsdx + \frac{\lambda^2}{4}\|u_0^n\|^2$$
$$+ \frac{\lambda}{2}(u_1^n, u_0^n) + \delta\int_0^t e^{\delta\tau}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i(u_{x_i}^n), u_{x_i}^n)d\tau + C_5\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(\|u_t^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$+ \|\Delta u^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2)d\tau, \quad t > 0, \tag{2.12.53}$$

取 $\delta : 0 < \delta < \min\{\lambda/2, \lambda/2C_5\}$. 由式 (2.12.53) 有

$$\frac{1}{4}\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant ME_n(0)e^{-\delta t}, \quad t > 0. \tag{2.12.54}$$

根据式 (2.12.50), 重复定理 2.12.1 证明的方法给出, 存在 $\{u^n\}$ 的一子序列, 仍记为 $\{u^n\}$, 使得式 (2.12.26)–(2.12.29) 成立和极限函数 $u \in L^\infty([0,T]; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0,T]; L^2(\Omega))$ 是问题 (2.12.1)–(2.12.3) 的弱解.

在式 (2.12.54) 中令 $n \to \infty$, 由式 (2.12.26), (2.12.27) 和在 $L^\infty([0,T]; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0,T]; L^2(\Omega))$ 中的范数的序列弱 * 下半连续得到

$$\begin{aligned}
&\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leqslant& \lim_{n\to\infty}\inf\ (\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
\leqslant& ME(0)e^{-\delta t}, \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{2.12.55}$$

情况 2. 如果 $\sigma_i'(s) \geqslant C_0, s \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, N$, 令 $\tilde{\sigma}_i(s) = \sigma_i(s) - k_0 s - \sigma_i(0)$, 其中 $k_0 = \min\{C_0, 0\} \leqslant 0$, $i = 1, \cdots, N$. 显然 $\tilde{\sigma}_i(0) = 0, \tilde{\sigma}_i'(s) = \sigma_i'(s) - k_0 \geqslant 0$, $\tilde{\sigma}_i(s)s \geqslant 0, s \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, N$, 且如果定理 2.12.2 的假定 (iii) 成立, 于是通过简单计算知, $\int_0^s \tilde{\sigma}_i(\tau)d\tau \leqslant \tilde{\sigma}_i(s)s, s \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, N$. 所以将 $\sigma_i(s) = \tilde{\sigma}_i(s) + k_0 s + \sigma_i(0)$ 代入方程 (2.12.14), 并重复情况 1 的证明, 得定理 2.12.2 的结论. □

2.12.3　一维的情况

定理 2.12.3　设

(i) $\sigma \in C^3(\mathbb{R}), \sigma'''(s)$ 局部 Lipschitz 连续, $\sigma'(0) = \sigma''(0) = 0, |\sigma(s)| \leqslant b|s|^m$, $s \in \mathbb{R}$;

(ii) $u_0 \in W \cap H^4(\Omega), u_1 \in H_0^2(\Omega)$ 使得

$$0 < E(0) = \frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|u_{0xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega\int_0^{u_{0x}}\sigma(s)dsdx < \frac{m-1}{4(m+1)}\left(\frac{1}{C_*b}\right)^{\frac{2}{m-1}}, \tag{2.12.56}$$

那么对任意的 $T > 0$, 问题(2.12.4)–(2.12.6)存在唯一广义解 $u \in C([0,T]; H^4(\Omega) \cap$

$H_0^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H_0^2(\Omega))\cap C^2([0,T];L^2(\Omega))$, 且当 $\lambda>0$ 时,

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_x(\cdot,t)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^{m+1}\leqslant ME(0)e^{-\delta_1 t},\qquad t>0. \tag{2.12.57}$$

证明 我们仍从形如式 (2.12.13) 的问题 (2.12.4)–(2.12.6) 的近似解 $u^n(x,t)$ 出发, 其中 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$ 中的一个标准正交基, 且系数 $\{T_{jn}\}_{j=1}^n$ ($T_{jn}(t)=(u^n(x,t),w_j)$) 满足下列 Cauchy 问题

$$\begin{aligned}&(u_{tt}^n(x,t),w_j)+(u_{x^4}^n(x,t),w_j)+\lambda(u_t^n(x,t),w_j)\\&=(\sigma(u_x^n(t))_x,w_j),\quad t>0,\quad j=1,\cdots,n,\end{aligned} \tag{2.12.58}$$

$$u^n(0)=u_0^n,\quad u_t^n(0)=u_1^n, \tag{2.12.59}$$

其中此处和以后的 $u_0^n,u_1^n\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 当 $n\to\infty$ 时, 在 $H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$ 中 $u_0^n\to u_0$, 在 $H^2(\Omega)$ 中 $u_1^n\to u_1$. 重复定理 2.12.1 的证明方法 (这里分别用 u_{xx}^n 和 u_x^n 代替 Δu^n 和 ∇u^n), 并根据式 (2.12.25) 以及 Sobolev 嵌入定理有

$$\|u^n(\cdot,t)\|_{C^1(\bar\Omega)}\leqslant M,\quad t>0. \tag{2.12.60}$$

在方程 (2.12.58) 中用 $u_{x^4t}^n(\cdot,t)$ 代替 w_j , 对 x 分部积分, 应用式 (2.12.60) 和引理 1.8.16 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u_{xxt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{x^4}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2)+\lambda\|u_{xxt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\\&=(\sigma(u_x^n)_{x^3},u_{xxt}^n)+(u^n,u_t^n)\\&\leqslant M(\|u^n(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^2+\|u_{xxt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2),\quad t>0.\end{aligned} \tag{2.12.61}$$

由式 (2.12.61) 和 Gronwall 不等式给出

$$\|u_t^n(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}^2+\|u^n(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^2+2\lambda\int_0^t\|u_{xxt}^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau\leqslant M(T), \tag{2.12.62}$$

$$\|u_t^n(\cdot,t)\|_{C^1(\bar\Omega)}+\|u^n(\cdot,t)\|_{C^3(\bar\Omega)}\leqslant M(T),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.12.63}$$

其中此处和以后用 $M(T)$ 表示仅依赖于 T 的不同正常数. 在方程 (2.12.58) 中以 $u_{tt}^n(x,t)$ 代替 w_j, 并应用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\|u_{tt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant&(\|u_{x^4}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}+\lambda\|u_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\&+\|\sigma(u_x^n(\cdot,t))_x\|_{L^2(\Omega)})\|u_{tt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.12.64}$$

$$\|u_{tt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant M(T),\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.12.65}$$

令 $v^n(x,t)=u^n(x,t)-u^{n-1}(x,t)$, 则 $v^n(x,t)$ 满足

$$(v_{tt}^n(x,t),w_j)+(v_{x^4}^n(x,t),w_j)+\lambda(v_t^n(x,t),w_j)$$

$$=(\sigma(u_x^n(x,t))_x-\sigma(u_x^{n-1}(x,t))_x,w_j),\quad t>0,\quad j=1,\cdots,n,\tag{2.12.66}$$

$$v^n(x,0)=u_0^n-u_0^{n-1},\quad v_t^n(x,0)=u_1^n-u_1^{n-1}.\tag{2.12.67}$$

在方程 (2.12.66) 中用 $v_{x^4t}^n(x,t)$ 代替 w_j, 利用 Lagrange 中值定理和式 (2.12.62), (2.12.63) 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v_{xxt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_{x^4}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2)+\lambda\|v_{xxt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\\&=((\sigma(u_x^n)-\sigma(u_x^{n-1}))_{x^3},v_{xxt}^n)+(v^n,v_t^n)\\&\leqslant M(T)(\|v^n(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}^2+\|v_{xxt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned}\tag{2.12.68}$$

对式 (2.12.68) 应用 Gronwall 不等式, 可见当 $n\to\infty$ 时, 在 $[0,T]$ 上一致地

$$\begin{aligned}&\|v_{xxt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v^n(\cdot,t)\|_{H^4}^2+2\lambda\int_0^t\|v_{xxt}^n(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau\\&\leqslant(\|v_{1xx}^n\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_0^n\|_{H^4}^2)e^{M(T)T}\to 0.\end{aligned}\tag{2.12.69}$$

在方程 (2.12.66) 中以 $v_{tt}^n(x,t)$ 代替 w_j, 应用 Hölder 不等式, 式 (2.12.62), (2.12.63) 和式 (2.12.69) 知, 当 $n\to\infty$ 时, 在 $[0,T]$ 上一致地

$$\begin{aligned}\|v_{tt}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant&\|v_{x^4}^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}+\lambda\|v_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\&+\|\sigma'(u_x^n(\cdot,t))v_{xx}^n(\cdot,t)+\sigma'(\xi_n(\cdot,t))u_{xx}^{n-1}(\cdot,t)v_x^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\\leqslant&M(T)(\|v^n(\cdot,t)\|_{H^4}+\|v_t^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)})\to 0,\end{aligned}\tag{2.12.70}$$

其中 $\xi_n=u_x^n+\theta_nu_x^{n-1},0<\theta_n<1$. 由式 (2.12.69) 和式 (2.12.70) 推得, 当 $n\to\infty$ 时, 在 $[0,T]$ 上一致地

$$\|u^n(\cdot,t)-u^m(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}+\|u_t^n(\cdot,t)-u_t^m(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}+\|u_{tt}^n(\cdot,t)-u_{tt}^m(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\to 0,$$

即 $\{u^n\}$ 是 $C([0,T];H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H_0^2(\Omega))\cap C^2([0,T];L^2(\Omega))$ 中的 Cauchy 序列, 所以当 $n\to\infty$ 时,

$$\text{在}C([0,T];H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H_0^2(\Omega))\cap C^2([0,T];L^2(\Omega))\text{中},u^n\to u.\tag{2.12.71}$$

在 Cauchy 问题 (2.12.58), (2.12.59) 中令 $n\to\infty$, $u\in C([0,T];H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H_0^2(\Omega))\cap C^2([0,T];L^2(\Omega))$ 是问题 (2.12.4)–(2.12.6) 的广义解.

令 $u,v\in C([0,T];H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H_0^2(\Omega))\cap C^2([0,T];L^2(\Omega))$ 是问题 (2.12.4)–(2.12.6) 的两个广义解, $w=u-v$. 于是有

$$\begin{aligned}&w_{tt}(x,t)+w_{xxxx}(x,t)+\lambda w_t(x,t)\\&=\sigma(u_x(x,t))_x-\sigma(v_x(x,t))_x,\quad t\in(0,T],\end{aligned}\tag{2.12.72}$$

$$w(0) = 0, \quad w_t(0) = 0. \tag{2.12.73}$$

方程 (2.12.72) 与 w_t 作 $L^2(\Omega)$ 内积得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|w_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + 2\lambda\int_0^t \|w_t(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau \\
&= 2(\sigma'(u_x)w_{xx} + \sigma''(\xi)v_{xx}w_x, w_t) \\
&\leqslant M(T)(\|w_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}), \quad 0 < t \leqslant T,
\end{aligned} \tag{2.12.74}$$

其中 $\xi = u_x + \theta v_x$, $0 < \theta < 1$. 式 (2.12.74) 由 Gronwall 不等式给出

$$\|w_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = \|w_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{2.12.75}$$

因此, $w(x,t) = 0$, 即几乎处处 $u(x,t) = v(x,t)$, $t \in [0,T]$.

重复定理 2.12.1 的证明方法可得估计 (2.12.57).

2.12.4 解的爆破

定理 2.12.4 设

(i) $\sigma_i \in C(\mathbb{R}), \sigma_i(s)s \leqslant k\int_0^s \sigma_i(\tau)d\tau \leqslant -k\beta|s|^{m+1}, s \in \mathbb{R}, i = 1,\cdots,N$, 其中 $k > 2$ 和 $\beta > 0$ 是常数; 如果 $\lambda > 0$, 还有 $1 < m \leqslant 3$.

(ii) $u_0 \in H_0^2(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$ 使得 $E(0) < 0$, 其中 $E(0)$ 如式(2.12.11) 所示,

那么问题 (2.12.1)–(2.12.3) 的解在有限时刻 T 爆破, 即当 $\lambda > 0, 1 < m \leqslant 3, t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau \to \infty, \tag{2.12.76}$$

且当 $\lambda = 0, t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \to \infty, \tag{2.12.77}$$

其中 $\tilde{T}$ 对于不同的条件是不同的.

证明 方程 (2.12.1) 与 u_t 作 $L^2(\Omega)$ 内积推出

$$\dot{E}(t) + \lambda\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0, \quad E(t) \leqslant E(0) < 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2.12.78}$$

其中

$$E(t) = \frac{1}{2}(\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \sum_{i=1}^N \int_\Omega\int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(s)dsdx, \quad t \geqslant 0. \tag{2.12.79}$$

令

$$F(t) = \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau, \tag{2.12.80}$$

其中 $\lambda \geqslant 0$ 如在方程 (2.12.1) 中所示. 于是

$$\dot{F}(t) = 2(u, u_t) + \lambda \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.12.81}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{F}(t) &= 2\left(\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(u_{x_i}) u_{x_i} dx\right) \\
&\geqslant 2\left(\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} - \|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} - k\sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(s) dsdx\right) \\
&\geqslant 2\left(2\|u_t(\cdot,t)^2_{L^2(\Omega)} - (k-2)\sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(s) dsdx - 2E(0)\right) \\
&\geqslant 2\left(2\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (k-2)\beta \|\nabla u(\cdot,t))\|^{m+1}_{L^{m+1}(\Omega)} - 2E(0)\right), \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{2.12.82}$$

由定理 2.12.4 的假定 (i) 和以下事实

$$\begin{aligned}
k\sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(s) dsdx \leqslant{}& 2E(0) - \|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ (k-2)\sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(s) dsdx
\end{aligned}$$

知, 根据式 (2.12.82) 有

$$\dot{F}(t) \geqslant 2(k-2)\beta \int_0^t \|\nabla u(\cdot,\tau)\|^{m+1}_{L^{(m+1)}(\Omega)} d\tau - 4E(0)t + \dot{F}(0), \quad t > 0, \tag{2.12.83}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{F}(x,t) + \dot{F}(x,t) \geqslant{}& 4\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2(k-2)\beta\Big(\|\nabla u(\cdot,t)\|^{m+1}_{L^{(m+1)}(\Omega)} \\
&+ \int_0^t \|\nabla u(\cdot,\tau)\|^{m+1}_{L^{(m+1)}(\Omega)} d\tau\Big) - 4E(0)(1+t) + \dot{F}(0) \\
={}& g(t), \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{2.12.84}$$

取 $p = \dfrac{m+3}{2}$, 显然 $2 < p < m+1$, $p' = \dfrac{m+3}{m+1}$ (< 2). 由 Young 不等式和 Poincaré 不等式有

$$\begin{aligned}
|(u, u_t)| &= \frac{1}{p}\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p'}\|u_t(\cdot,t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} \\
&\leqslant C_6\left[(\|\nabla u(\cdot,t)\|^{m+1}_{L^{(m+1)}(\Omega)})^\mu + (\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)})^\mu\right],
\end{aligned} \tag{2.12.85}$$

$$|(u, u_t)|^{\frac{1}{\mu}} \leqslant C_7\left[\|\nabla u(\cdot,t)\|^{m+1}_{L^{(m+1)}(\Omega)} + \|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right], \quad t > 0, \tag{2.12.86}$$

其中此处和以后的 C_j $(j = 6, 7, \cdots)$ 表示不依赖于 $t, \mu = \dfrac{m+3}{2(m+1)}$ (< 1) 的常数. 应用 Hölder 不等式得

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^{(m+1)}(\Omega)}^{m+1} \geqslant C_8(\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{m+1}{2}}, \quad t>0, \tag{2.12.87}$$

$$\int_0^t \|\nabla u(\cdot,\tau)\|_{L^{m+1}(\Omega)}^{m+1} d\tau \geqslant C_9 t^{\frac{1-m}{2}} \left(\int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau\right)^{\frac{m+1}{2}}, \ t>0. \tag{2.12.88}$$

(1) 如果 $\lambda>0$, 于是由式 (2.12.86)–(2.12.88) 推出

$$\begin{aligned}
g(t) \geqslant & C_{10}\Bigg(2\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^{m+1}(\Omega)}^{m+1} + \|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \int_0^t \|\nabla u(\cdot,\tau)\|_{L^{m+1}(\Omega)}^{m+1} d\tau\Bigg) - 4E(0)t + \dot F(0) \\
\geqslant & C_{11}\Bigg[|(u,u_t)|^{\frac{1}{\mu}} + (\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{m+1}{2}} \\
& + t^{\frac{1-m}{2}}\left(\int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau\right)^{\frac{m+1}{2}}\Bigg] - 4E(0)t + \dot F(0) \\
\geqslant & C_{11} t^{\frac{1-m}{2}}\left[|(u,u_t)|^\alpha + (\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2)^\alpha + \left(\int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau\right)^\alpha\right] \\
& - 4E(0)t + \dot F(0) - C_{11} t^{\frac{1-m}{2}}, \quad t\geqslant 1,
\end{aligned} \tag{2.12.89}$$

其中此处和以后 $\alpha=1/\mu>1$. 因为当 $t\to\infty$ 时, $-4E(0)t+\dot F(0)-C_{11}t^{\frac{1-m}{2}}\to\infty$, 必存在一个 $t_0\geqslant 1$, 使得当 $t\geqslant t_0$ 时,

$$-4E(0)t + \dot F(0) - C_{11} t^{\frac{1-m}{2}} \geqslant 0. \tag{2.12.90}$$

令 $y(t)=\dot F(t)+F(t)$. 那么由式 (2.12.83) 和式 (2.12.80) 知, 当 $t\geqslant t_0$ 时, $y(t)>0$.

应用不等式

$$(a_1+\cdots+a_l)^n \leqslant 2^{(n-1)(l-1)}(a_1^n+\cdots+a_l^n),$$

其中 $a_i\geqslant 0\ (i=1,\cdots,l)$ 和 $n>1$ 是实数, 由式 (2.12.89), (2.12.90) 导出

$$g(t) \geqslant C_{12} t^{\frac{1-m}{2}} y^\alpha(t), \quad t\geqslant t_0. \tag{2.12.91}$$

综合式 (2.12.84), (2.12.91) 给出

$$\dot y(t) \geqslant C_{12} t^{\frac{1-m}{2}} y^\alpha(t), \quad t\geqslant t_0. \tag{2.12.92}$$

所以

$$t \leqslant \tilde T = \begin{cases} \dfrac{3-m}{2}\left[t_0^{\frac{3-m}{2}} + \dfrac{1}{C_{12}(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_0)}\right]^{\frac{2}{3-m}}, & m<3, \\ t_0 + \exp\dfrac{1}{C_{12}(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_0)}, & m=3, \end{cases} \tag{2.12.93}$$

且当 $t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$y(t) \to \infty. \tag{2.12.94}$$

由式 (2.12.80), (2.12.81) 和式 (2.12.94) 知, 当 $t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$(2+\lambda)\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda\int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \geqslant \dot{F}(t) + F(t) \to \infty. \tag{2.12.95}$$

由式 (2.12.95) 可导出, 当 $t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \to \infty. \tag{2.12.96}$$

事实上, 如果

$$\sup_{0\leqslant t<\tilde{T}} \left(\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \right) < M, \tag{2.12.97}$$

从而

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leqslant \int_0^t (\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_t(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2) d\tau + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leqslant (1+\tilde{T})M + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad 0 \leqslant t < \tilde{T},
\end{aligned} \tag{2.12.98}$$

这与式 (2.12.95) 矛盾. 因此式 (2.12.96) 成立.

(2) 如果 $\lambda = 0$, 则由式 (2.12.86), (2.12.87) 知

$$\begin{aligned}
g(t) &\geqslant C_{10}\left(2\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^{m+1}(\Omega)}^{m+1} + \|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1\right) - 4E(0)t + \dot{F}(0) \\
&\geqslant C_{11}\left[|(u,u_t)|^\alpha + (\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2)^\alpha\right] - 4E(0)t + \dot{F}(0), \qquad t > 0.
\end{aligned} \tag{2.12.99}$$

应用得到式 (2.12.92) 的同样方法, 必存在一个 $t_1 \geqslant 0$, 使得 $-4E(0)t + \dot{F}(0) > 0$ 和当 $t \geqslant t_1$ 时, $y(t) = \dot{F}(t) + F(t) > 0$. 因此, 综合式 (2.12.84) 与式 (2.12.99) 给出

$$\dot{y}(t) \geqslant C_{13} y^\alpha(t), \qquad t \geqslant t_1. \tag{2.12.100}$$

由不等式 (2.12.100) 推出, 存在一个正常数 $\tilde{T} = t_1 + [C_{13}(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)]^{-1}$, 使得当 $t \to \tilde{T}^-$ 时, $y(t) \to \infty$. 因为 $y(t) \leqslant \|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, 于是当 $t \to \tilde{T}^-$ 时,

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \to \infty.$$

□

例子 取 $\sigma_i(s)=a|s|^{m-1}s,\ i=1,\cdots,N$, 其中 $a\neq 0, m>1$ 均为实数. 显然, $\sigma_i\in C^1(\mathbb{R}), |\sigma_i(s)|=|a||s|^m, i=1,\cdots,N$.

(1) 如果 $a>0$, $N>2$, 还有 $m+1\leqslant\dfrac{2N}{N-2}$, 则 $\sigma_i(s)s\geqslant 0$ 和

$$\int_0^s\sigma_i(\tau)d\tau=\frac{a}{m+1}|s|^{m+1}\leqslant a|s|^{m+1}=\sigma_i(s)s,\quad s\in\mathbb{R},\quad i=1,\cdots,N,$$

即定理 2.12.2 的假定 (i) 和 (iii) 成立. 所以根据定理 2.12.2, 当初值 $u_0\in H_0^2(\Omega), u_1\in L^2(\Omega)$ 时, 对应问题 (2.12.1)–(2.12.3) 存在整体弱解 $u\in L^\infty([0,T];H_0^2(\Omega))\cap W^{1,\infty}([0,T];L^2(\Omega))$, 且当 $\lambda>0$ 时, 此解有渐近性质 (2.12.49), 其中 $E(0)$ 如下式 (2.12.101) 所示.

(2) $a<0$ 的情况.

(a) 如果 $u_0\in W, u_1\in L^2(\Omega))$ 使得

$$\begin{aligned}0<E(0)&=\frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\Delta u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{a}{m+1}\|\nabla u_0\|^{m+1}_{L^{m+1}(\Omega)}\\&<\frac{m-1}{4(m+1)}\left(\frac{1}{C_*|a|}\right)^{\frac{2}{m-1}}\end{aligned}\tag{2.12.101}$$

和如果 $N>2$, 还有 $m+1\leqslant\dfrac{2N}{N-2}$, 于是定理 2.12.1 的假定 (i) 和 (ii) 成立. 所以根据定理 2.12.1 对应的问题 (2.12.1)–(2.12.3) 仍存在整体弱解 $u\in L^\infty([0,T];H_0^2(\Omega))\cap W^{1,\infty}([0,T];L^2(\Omega))$, 且当 $\lambda>0$ 时, 此解有性质

$$\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\Delta u(\cdot,t)\|^{m+1}_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u(\cdot,t)\|^{m+1}_{L^{m+1}(\Omega)}\leqslant ME(0)e^{-\delta_1 t},\quad t>0,$$

其中 $\delta_1=(1-2C_4\delta)\delta>0$.

(b) 如果 $u_0\in H_0^2(\Omega), u_1\in L^2(\Omega)$ 使得 $E(0)<0$; 如果 $\lambda>0$, 还有 $1<m\leqslant 3$, 经简单验证给出

$$\sigma_i(s)s=k\int_0^s\sigma_i(\tau)d\tau=-k\beta|s|^{m+1},\quad s\in\mathbb{R},\quad i=1,\cdots,N,$$

其中 $k=m+1>2, \beta=-a/k>0$, 即定理 2.12.4 的假定 (i) 和 (ii) 成立. 因此, 根据定理 2.12.4 对应的问题 (2.12.1)–(2.12.3) 的解 u 在有限时刻爆破, 见式 (2.12.76) 和式 (2.12.77).

(3) $N=1, \sigma(s)=a|s|^{m-1}s$ 的情况.

如果 $m>3$, 直接验证指出 $\sigma\in C^3(\mathbb{R}), \sigma'''(s)$ 是局部 Lipschitz 连续, $\sigma'(0)=\sigma''(0)=0$. 所以根据定理 2.12.3 对应的问题 (2.12.4)–(2.12.6) 存在唯一的整体广义解 $u\in C([0,T];H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H_0^2(\Omega))\cap C^2([0,T];L^2(\Omega))$, 且当 $\lambda>0$, 初值 $u_0\in W\cap H^4(\Omega), u_1\in H_0^2(\Omega)$ 时, u 有衰减性质 (2.12.57), 使得

$$0 < E(0) = \frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|u_{0xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{a}{m+1}\|u_{0x}\|_{L^{m+1}(\Omega)}^{m+1}$$
$$< \frac{m-1}{4(m+1)}\Big(\frac{1}{C_*|a|}\Big)^{\frac{2}{m-1}}.$$

2.12.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [123]. 与本节有关的文献见 [50], [124]–[129].

2.13 一类具有色散和非线性应变项的四阶波动方程的初边值问题

2.13.1 引言

2.12 节讨论了下列初边值问题

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \gamma u_t + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i(u_{x_i}) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{2.13.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.13.2}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2.13.3}$$

其中 $\gamma \geqslant 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一有界区域, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 表示 u 沿 $\partial\Omega$ 的外法向 ν 的导数. 而且证明了初边值问题 (2.13.1)–(2.13.3) 弱解的存在性、渐近性和解的爆破性.

为了推广 2.12 节中的方法和改进结果, 本节继续考虑初边值问题 (2.13.1)–(2.13.3).

对方程 (2.13.1) 中的非线性函数 $\sigma_i(s), 1 \leqslant i \leqslant N$, 假设满足

$$(\mathrm{H})\begin{cases} \text{(i)}\ \ \sigma_i(s) \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}_+),\ \text{对于}\ s \neq 0, \sigma_i(s) > 0, \\ \qquad \text{对于}\ s > 0, s\sigma_i'(s) - \sigma_i(s) > 0, \\ \qquad \text{对于}\ N = 1,2,\ \text{存在}\ p\ \text{和}\ q\ \text{满足}\ 1 < p \leqslant q < \infty; \\ \qquad \text{对于}\ N \geqslant 3, 1 < p \leqslant q < \dfrac{N+2}{N-2},\ \text{使得} \\ \text{(ii)}\ \ \text{对于}\ s \in \mathbb{R}\ \text{和}\ a > 0, |\sigma_i(s)| \leqslant a|s|^q, \\ \text{(iii)}\ \text{对于}\ s \in \mathbb{R},\ (p+1)G_i(s) \leqslant s\sigma_i(s),\ G_i(s) = \displaystyle\int_0^s \sigma_i(\tau)d\tau. \end{cases}$$

首先对于问题 (2.13.1)–(2.13.3) 不仅应用新方法引入位势井 W 和 W 的外集 V, 而且还引入位势井族 $\{W_\delta\}$ 和对应的族 $\{V_\delta\}$. 于是利用它们不仅得到不变集和解的真空隔离, 而且还给出对于 $E(0) < d$ 和 γ 的某一范围解整体存在与不存在的

门槛结果. 最后研究问题 (2.13.1)–(2.13.3) 具有临界初值条件 $E(0)=d, I(u_0)\geqslant 0$ 或 $I(u_0)<0$ 整体解的存在性, 并给出整体解存在与不存在的门槛结果. 对于问题 (2.13.1)–(2.13.3) 所有以上未解决的问题获得了解决.

下面用到内积 $(u,v)=\int_\Omega uv\mathrm{d}x$ 和 $\sigma(s)=\{\sigma_1(s),\sigma_2(s),\cdots,\sigma_N(s)\}$,

$$C_*=\sup_{u\in H_0^2(\Omega),u\neq 0}\frac{\|\nabla u\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1}}{\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{q+1}},\quad \lambda_1=\inf_{u\in H_0^2(\Omega),u\neq 0}\frac{\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}.$$

定义 2.13.1 如果 $u\in L^\infty\left((0,T);H_0^2(\Omega)\right), u_t\in L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega)\right)$, 且满足

(i)

$$\begin{aligned}&(u_t,v)+\gamma(u,v)+\int_0^t a(u,v)d\tau-\int_0^t b(u,v)d\tau\\&=(u_1,v)+\gamma(u_0,v),\quad \forall v\in H_0^2(\Omega),\quad 0<t<T,\end{aligned}\tag{2.13.4}$$

其中

$$a(u,v)=(\Delta u,\Delta v),\quad b(u,v)=\sum_{i=1}^N\int_\Omega\left(\sigma_i(u_{x_i}),v_{x_i}\right)dx;$$

(ii) 在 $H_0^2(\Omega)$ 中 $u(x,0)=u_0(x)$, 在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_t(x,0)=u_1(x)$;

(iii)

$$E(t)+\gamma\int_0^t\|u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau\leqslant E(0),\quad \forall t\in[0,T),\tag{2.13.5}$$

其中

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2-\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{x_i})dx.$$

2.13.2 预备引理和位势井族的引入

下面定义和研究与位势井有关的某些泛函. 利用它们对问题 (2.13.1)–(2.13.3) 引进位势井族 W_δ 和对应的 V_δ 族.

首先对问题 (2.13.1)–(2.13.3) 定义

$$J(u)=\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2-\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i\left(u_{x_i}\right)dx,$$

$$I(u)=\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2-\sum_{i=1}^N\int_\Omega u_{x_i}\sigma_i\left(u_{x_i}\right)dx,$$

$$I_\delta(u)=\delta\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2-\sum_{i=1}^N\int_\Omega u_{x_i}\sigma_i\left(u_{x_i}\right)dx,\quad \delta>0.$$

引理 2.13.1　设 $\sigma(s)$ 满足 (H), $u \in H_0^2(\Omega)$. 于是对于 $1 \leqslant i \leqslant N$, 下述结论成立:

(i) $\sigma_i(0) = G_i(0) = 0$, 对于 $s > 0, \sigma_i(s)s > 0$; 对于 $s < 0$, $\sigma_i(s)s < 0, G_i(s) < 0$.

(ii) 对 $s > 0$, $G_i(s), \sigma_i(s)$ 和 $\dfrac{\sigma_i(s)}{s}$ 全是递增的.

(iii) 对于 $s \in \mathbb{R}$, $|G_i(s)| \leqslant \dfrac{a}{q+1}|s|^{q+1}$.

(iv) 对于 $s \geqslant 1$ 和某 $B > 0$,

$$G_i(s) \geqslant B|s|^{p+1}, \tag{2.13.6}$$

对于 $s \geqslant 1$,

$$s\sigma_i(s) \geqslant (p+1)B|s|^{p+1}. \tag{2.13.7}$$

证明　(i)–(iii) 的结论立刻由 (H) 中的 (i) 和 (ii) 推出. 下面证明 (iv). 首先 (H) 中的 (iii) 给出

$$\frac{\sigma_i(s)}{G_i(s)} \geqslant \frac{p+1}{s}, \quad s > 0$$

和

$$\int_{G_i(1)}^{G_i(s)} \frac{dG_i(\tau)}{G_i(\tau)} \geqslant (p+1)\int_1^s \frac{d\tau}{\tau}, \quad s \geqslant 1.$$

上式给出

$$G_i(s) \geqslant G_i(1)|s|^{p+1}, \ \ s \geqslant 1.$$

因此得式 (2.13.6) 和式 (2.13.7).　□

定义 2.13.2　定义

$$\begin{aligned}
&H^+ = \{u \in H_0^2(\Omega) | \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \neq 0, \ u_{x_i}(x) \geqslant 0, \ 1 \leqslant i \leqslant N\},\\
&\Omega^+ = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant N} \Omega_i^+, \quad \Omega_i^+ = \{x \in \Omega | u_{x_i}(x) > 0\},\\
&\Omega^- = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant N} \Omega_i^-, \quad \Omega_i^- = \{x \in \Omega | u_{x_i}(x) < 0\}.
\end{aligned}$$

引理 2.13.2　设 $\sigma(s)$ 满足 (H), $u(x) \in H^+$ 和

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_{x_i}\sigma_i(\lambda u_{x_i})dx, \tag{2.13.8}$$

则

(i) $\varphi(\lambda)$ 在 $0 < \lambda < \infty$ 上是递增的.

(ii) $\lim_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda)=0$, $\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(\lambda)=\infty$.

证明 (i) 首先, 对于 $u\in H^+$ 有 $|\Omega^+|>0$. 因此, 由 (H) 中的 (i) 知

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)&=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left(\lambda u_{x_i}^2\sigma_i'(\lambda u_{x_i})-u_{x_i}\sigma_i(\lambda u_{x_i})\right)dx\\&=\frac{1}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\lambda u_{x_i}\left(\lambda u_{x_i}\sigma_i'(\lambda u_{x_i})-\sigma_i(\lambda u_{x_i})\right)dx>0,\end{aligned}$$

所以在 $0<\lambda<\infty$ 上 $\varphi(\lambda)$ 是递增的.

(ii) 由 (H) 中的 (ii) 有, 当 $\lambda\to 0$ 时,

$$\begin{aligned}0<\varphi(\lambda)&=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\lambda u_{x_i}\sigma_i(\lambda u_{x_i})dx\leqslant\frac{a}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega|\lambda u_{x_i}|^{q+1}dx\\&=a\lambda^{q-1}\sum_{i=1}^{N}\|u_{x_i}\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1}\to 0.\end{aligned}$$

另一方面, 由式 (2.13.7) 推出

$$\varphi(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\lambda u_{x_i}\sigma_i(\lambda u_{x_i})dx\geqslant\frac{(p+1)B}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_{i\lambda}}|\lambda u_{x_i}|^{p+1}dx,$$

其中

$$\Omega_{i\lambda}=\left\{x\in\Omega\,\middle|\,u_{x_i}(x)\geqslant\frac{1}{\lambda}\right\}. \tag{2.13.9}$$

因为当 $\lambda\to\infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_{i\lambda}}|u_{x_i}|^{p+1}dx\to\sum_{i=1}^{N}\|u_{x_i}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}, \tag{2.13.10}$$

得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(\lambda)=\infty. \qquad\square$$

引理 2.13.3 设 $\sigma(s)$ 满足 (H). 又设 $u\in H_0^2(\Omega)$ 和 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\neq 0$, 那么

(i) $\lim_{\lambda\to 0}J(\lambda u)=0$.

(ii) $I(\lambda u)=\lambda\dfrac{d}{d\lambda}J(\lambda u)$.

进一步, 如果 $u(x)\in H^+$, 于是下述结论成立:

(iii) $\lim_{\lambda\to\infty}J(\lambda u)=-\infty$.

(iv) 在区间 $0<\lambda<\infty$ 上, 存在唯一的 $\lambda^*=\lambda^*(u)$, 使得

$$\left.\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)\right|_{\lambda=\lambda^*}=0.$$

(v) $J(\lambda u)$ 在 $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ 上是递增的, 在 $\lambda^* \leqslant \lambda < \infty$ 上是递减的并在 $\lambda = \lambda^*$ 处取最大值.

(vi) 对于 $0 < \lambda < \lambda^*$, $I(\lambda u) > 0$; 对于 $\lambda^* < \lambda < \infty$, $I(\lambda u) < 0$ 和 $I(\lambda^* u) = 0$.

证明 (i) 由

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega G_i(\lambda u_{x_i})dx \tag{2.13.11}$$

和

$$|G_i(\lambda u_{x_i})| \leqslant \frac{a}{q+1}\lambda^{q+1}|u_{x_i}|^{q+1}$$

推得.

(ii) 由

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u) = \lambda^2\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \lambda u_{x_i}\sigma_i(\lambda u_{x_i})dx = I(\lambda u)$$

推出.

(iii) 由式 (2.13.11),

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega G_i(\lambda u_{x_i})dx \geqslant B\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_{i\lambda}}|\lambda u_{x_i}|^{p+1}dx$$

和式 (2.13.10) 推出, 其中 $\Omega_{i\lambda}$ 由式 (2.13.8) 定义.

(iv) 和 (v) 由引理 2.13.2 和

$$\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u) = \lambda\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega u_{x_i}\sigma_i(\lambda u_{x_i})dx = \lambda\left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \varphi(\lambda)\right) \tag{2.13.12}$$

推得, 其中 $\varphi(\lambda)$ 由式 (2.13.8) 定义.

(vi) 由 (ii), 式 (2.13.12) 和引理 2.13.2 推出. □

引理 2.13.4 设 $\sigma(s)$ 满足 (H). 又设 $u \in H_0^2(\Omega)$ 和 $0 < \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} < r(\delta)$, 那么 $I_\delta(u) > 0$. 特别地, 如果 $0 < \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} < r(1)$, 于是 $I(u) > 0$, 其中

$$r(\delta) = \left(\frac{\delta}{aC^*}\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

证明 由 $0 < \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} < r(\delta)$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega u_{x_i}\sigma_i(u_{x_i})dx &\leqslant \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |u_{x_i}\sigma_i(u_{x_i})|dx \leqslant a\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |u_{x_i}|^{q+1}dx \\ &= a\sum_{i=1}^{N}\|u_{x_i}\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} \leqslant aC_*\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{q+1}\end{aligned}$$

$$= aC_*\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{q-1}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 < \delta\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

和 $I_\delta(u) > 0$. □

引理 2.13.5 设 $\sigma(s)$ 满足 (H). 又设 $u \in H_0^2(\Omega)$ 和 $I_\delta(u) < 0$, 则 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} > r(\delta)$. 特别地, 如果 $I(u) < 0$, 那么 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} > r(1)$.

证明 首先, 由 $I_\delta(u) < 0$ 知 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$. 由此和

$$\delta\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 < \sum_{i=1}^N \int_\Omega u_{x_i}\sigma_i(u_{x_i})dx \leqslant aC_*\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{q-1}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

有 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} > r(\delta)$. □

引理 2.13.6 设 $\sigma(s)$ 满足 (H). 又设 $u \in H_0^2(\Omega), I_\delta(u) = 0$ 和 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, 则 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r(\delta)$. 特别地, 如果 $I(u) = 0$ 和 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, 则 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r(1)$.

证明 由 $I_\delta(u) = 0$ 得

$$\delta\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^N \int_\Omega u_{x_i}\sigma_i(u_{x_i})dx \leqslant aC_*\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{q-1}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

上式同 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ 一起给出 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r(\delta)$. □

定义 2.13.3 定义

(i)

$$d = \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u),$$

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^2(\Omega) | I(u) = 0, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \neq 0\}.$$

(ii)

$$d_1 = \inf_{u\in\mathcal{N}^+} J(u),$$

$$\mathcal{N}^+ = \{u \in H^+ | I(u) = 0\}.$$

(iii)

$$d(\delta) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\delta} J(u),$$

$$\mathcal{N}_\delta = \{u \in H_0^2(\Omega) | I_\delta(u) = 0, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \neq 0\}.$$

(iv)

$$d_1(\delta) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\delta^+} J(u),$$

$$\mathcal{N}_\delta^+ = \{u \in H^+ | I_\delta(u) = 0\}.$$

引理 2.13.7 设 $\sigma(s)$ 满足 (H), 则

(i) 对于 $a(\delta) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\delta}{p+1}, 0 < \delta < \dfrac{p+1}{2}, d_1(\delta) \geqslant a(\delta)r^2(\delta)$;

(ii) $d_1(\delta)$ 在 $0<\delta\leqslant 1$ 上是严格递增的, 在 $1\leqslant\delta<\infty$ 上是严格递减的并在 $\delta=1$ 处取最大值;

(iii) $\lim_{\delta\to 0} d_1(\delta)=0$, $\lim_{\delta\to\infty} d_1(\delta)=-\infty$.

证明 (i) 对于任意的 $u\in\mathcal{N}_\delta^+$ 有 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\geqslant r(\delta)$, 以及由

$$\begin{aligned}
J(u)&=\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2-\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{x_i})dx\\
&\geqslant\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^N\int_\Omega u_{x_i}\sigma_i(u_{x_i})dx\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{p+1}\right)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{p+1}I_\delta(u)\\
&=a(\delta)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\geqslant a(\delta)r^2(\delta)
\end{aligned}$$

得 (i).

(ii) 下面证明对任意的 $0<\delta'<\delta''<1$ 或 $1<\delta''<\delta'<\infty$, 有 $d_1(\delta')<d_1(\delta'')$. 对任意的 $u\in\mathcal{N}_{\delta''}^+$, 由

$$\delta\|\Delta(\lambda u)\|_{L^2(\Omega)}^2=\sum_{i=1}^N\int_\Omega\lambda u_{x_i}\sigma_i(\lambda u_{x_i})dx,\tag{2.13.13}$$

即

$$\delta\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2=\varphi(\lambda)\tag{2.13.14}$$

定义了 $\lambda=\lambda(\delta)$, 其中 $\varphi(\lambda)$ 由式 (2.13.8) 定义. 由引理 2.13.2 推出对于每一个 $\delta>0$, 存在满足式 (2.13.14) 和式 (2.13.13) 唯一的 $\lambda=\lambda(\delta)$, 这就指出 $\lambda(\delta)u\in\mathcal{N}_\delta^+$ 和 $\lambda(\delta'')=1$. 令 $g(\lambda)=J(\lambda u)$. 从而

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}g(\lambda)&=\frac{1}{\lambda}\left(\|\Delta(\lambda u)\|_{L^2(\Omega)}^2-\sum_{i=1}^N\int_\Omega\lambda u_{x_i}\sigma_i(\lambda u_{x_i})dx\right)\\
&=\frac{1}{\lambda}\Big((1-\delta)\|\Delta(\lambda u)\|_{L^2(\Omega)}^2+I_\delta(\lambda u)\Big)\\
&=(1-\delta)\lambda\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

取 $v=\lambda(\delta')u$, 于是 $v\in\mathcal{N}_{\delta'}^+$.

(a) 如果 $0<\delta'<\delta''<1$, 于是 $\lambda(\delta')<\lambda(\delta'')=1$,

$$\begin{aligned}
J(u)-J(v)&=g(1)-g(\lambda(\delta'))\\
&>(1-\delta'')r^2(\delta'')\lambda(\delta')(1-\lambda(\delta'))\equiv\varepsilon_1(\delta',\delta'')>0.
\end{aligned}$$

(b) 如果 $1 < \delta'' < \delta' < \infty$, 于是 $\lambda(\delta') > \lambda(\delta'') = 1$,

$$\begin{aligned} J(u) - J(v) &= g(1) - g(\lambda(\delta')) \\ &> (\delta'' - 1)r^2(\delta'')\lambda(\delta'')(\lambda(\delta') - 1) \equiv \varepsilon_2(\delta', \delta'') > 0. \end{aligned}$$

因此, 对于任意的 $0 < \delta' < \delta'' < 1$ 或 $1 < \delta'' < \delta' < \infty$, 得到 $d_1(\delta'') - d_1(\delta') > \varepsilon(\delta', \delta'') > 0$.

(iii) 对于任意的 $u \in H^+$, 由式 (2.13.13) 重新定义 $\lambda = \lambda(\delta)$, 即式 (2.13.14). 再从引理 2.13.2 得到, 对于每一个 $\delta > 0$, 存在满足式 (2.13.14) 和 (2.13.13) 唯一的 $\lambda = \lambda(\delta)$. 根据引理 2.13.2 有

$$\lim_{\delta \to 0} \lambda(\delta) = 0, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\delta) = \infty.$$

所以由引理 2.13.3 得

$$\lim_{\delta \to 0} J(\lambda(\delta)u) = \lim_{\lambda \to 0} J(\lambda u) = 0, \tag{2.13.15}$$

$$\lim_{\delta \to \infty} J(\lambda(\delta)u) = \lim_{\lambda \to \infty} J(\lambda u) = -\infty. \tag{2.13.16}$$

方程 (2.13.15) 和 (i) 给出 $\lim_{\delta \to 0} d_1(\delta) = 0$. 式 (2.13.16) 给出 $\lim_{\delta \to \infty} d_1(\delta) = -\infty$. □

引理 2.13.8 设 $\sigma(s)$ 满足 (H), 则

(i) $d \geqslant \dfrac{p-1}{2(p+1)} r^2(1) = \dfrac{p-1}{2(p+1)} \left(\dfrac{1}{aC^*} \right)^{\frac{2}{q-1}}$;

(ii) 至少存在一个 $u \in \mathcal{N}$, 使得

$$J(u) = d;$$

(iii) 如果 $w \in \mathcal{N}$ 是一极小化变量, 即 $J(w) = d$, 则 $w \in \mathcal{N}^+$;

(iv) $d = d_1$.

证明 (i) 对于任意的 $u \in \mathcal{N}$ 有 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r(1)$, 以及从

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega G_i(u_{x_i}) dx \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p+1} I(u) \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)} \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \frac{p-1}{2(p+1)} r^2(1) \end{aligned}$$

得 (i).

(ii) 由 d 的定义知, 对于每一个 $m(m=1,2,\cdots)$, 存在 $u_m\in\mathcal{N}$, 使得

$$d\leqslant J(u_m)<d+\frac{1}{m},\quad m=1,2,\cdots. \tag{2.13.17}$$

由引理 2.13.6 和

$$\frac{p-1}{2(p+1)}\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{p+1}I(u_m)\leqslant J(u_m)<d+1$$

得

$$r^2(1)\leqslant\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)}<\frac{2(p+1)}{p-1}(d+1),\quad m=1,2,\cdots.$$

所以存在 $u\in\mathcal{N}$ 和 $\{u_m\}$ 的子序列 $\{u_\nu\}$, 使得当 $\nu\to\infty$ 时, 在 $H^2_0(\Omega)$ 中 $u_\nu\to u$ 是弱收敛, 在 $W^{1,q+1}(\Omega)$ 中 $u_\nu\to u$ 是强收敛.

因此

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{\nu x_i})dx-\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{x_i})dx\right|\\ \leqslant&\sum_{i=1}^N\int_\Omega|\sigma_i\left(u_{x_i}+\theta_{\nu i}(u_{\nu x_i}-u_{x_i})\right)||u_{\nu x_i}-u_{x_i}|dx\\ \leqslant&\sum_{i=1}^N\|\sigma_i\left(u_{x_i}+\theta_{\nu i}(u_{\nu x_i}-u_{x_i})\right)\|_{L^r(\Omega)}\|u_{\nu x_i}-u_{x_i}\|_{L^{q+1}(\Omega)},\end{aligned}$$

其中 $r=\dfrac{q+1}{q}, 0<\theta_{\nu_i}=\theta_{\nu_i}(x)<1$.

因为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^N\|\sigma_i\left(u_{x_i}+\theta_{\nu i}(u_{\nu x_i}-u_{x_i})\right)\|^r_{L^r(\Omega)}\\ \leqslant&\sum_{i=1}^N a^r\|u_{x_i}+\theta_{\nu i}(u_{\nu x_i}-u_{x_i})\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\leqslant C,\end{aligned}$$

有

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{\nu x_i})dx=\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{x_i})dx.$$

所以由式 (2.13.17) 得

$$\begin{aligned}\frac12\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}&\leqslant\liminf_{\nu\to\infty}\frac12\|\Delta u_\nu\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant\liminf_{\nu\to\infty}\left(d+\frac1\nu+\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{\nu x_i})dx\right)\\ &=\lim_{\nu\to\infty}\left(d+\frac1\nu+\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{\nu x_i})dx\right)\end{aligned}$$

$$= d + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} G_i(u_{\nu x_i}) dx,$$

这就给出 $J(u) \leqslant d$. 另一方面, 有 $J(u) \geqslant d$. 所以 $J(u) = d$.

(iii) 令 $w \in \mathcal{N}$ 满足 $J(w) = d$. 证明 $w \in \mathcal{N}^+$, 即对于 $w, |\Omega^-| = 0$. 如果这不真, 则 $|\Omega^-| > 0$. 考虑以下两种情况:

(a) $|\Omega^-| > 0, |\Omega^+| = 0$. 对于这种情况有

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} w_{x_i} \sigma_i(w_{x_i}) dx < 0, \quad I(w) > 0,$$

这与 $I(w) = 0$ 矛盾.

(b) $|\Omega^-| > 0, |\Omega^+| > 0$. 对于这种情况定义

$$\bar{w} = \begin{cases} w, & x \notin \Omega^-, \\ -w, & x \in \Omega^-. \end{cases}$$

于是 $|\bar{w}| = |w|, \bar{w}_{x_i} = |w_{x_i}|, 1 \leqslant i \leqslant N$. 所以 $\bar{w} \in \mathcal{N}^+$. 从 $I(\bar{w}) < I(w) = 0$ 和引理 2.13.3 知, 存在唯一的 $\lambda_1 = \lambda_1(\bar{w})$, 使得 $0 < \lambda_1 < 1$ 和 $I(\lambda_1 \bar{w}) = 0$. 另一方面, 由 d 的等价定义

$$d = \inf_{u \in H_0^2(\Omega), u \neq 0} \left(\sup_{\lambda > 0} J(\lambda u) \right),$$

得

$$d = J(w) = \sup_{\lambda > 0} J(\lambda w).$$

所以有

$$d = J(w) \geqslant J(\lambda_1 w) > J(\lambda_1 \bar{w}) \geqslant d_1,$$

这与 d 和 d_1 的定义矛盾.

(iv) 由 d 和 d_1 的定义有 $d \leqslant d_1$. 另一方面, 由这个引理的 (ii) 和 (iii) 推出, 存在 $w \in \mathcal{N}^+$, 使得 $d = J(w) \geqslant d_1$. □

定理 2.13.1 设 $\sigma(s)$ 满足 (H), 则

(i) 对于 $0<\delta<\infty, d(\delta) \leqslant d_1(\delta)$; 对于 $0<\delta<\dfrac{p+1}{2}, d(\delta) \geqslant a(\delta) r^2(\delta)$.

(ii) 存在 $\lim_{\delta \to 0} d(\delta)=0$ 和 $\delta_0 \geqslant \dfrac{p+1}{2}$, 使得 $d(\delta_0) = 0$ 和对于 $0<\delta<\delta_0, d(\delta) > 0$.

(iii) $d(\delta)$ 在 $\delta = 1$ 处取最大值 $d = d(1)$.

证明 (i) 由 $d(\delta)$ 和 $d_1(\delta)$ 的定义推出 $d(\delta) \leqslant d_1(\delta)$. 对于 $0 < \delta < \dfrac{p+1}{2}, d(\delta) \geqslant a(\delta) r^2(\delta)$ 的证明与引理 2.13.7 的证明一样.

(ii) 这个结论由这个定理的 (i) 和引理 2.13.7 推出.

(iii) 这个结论由对于 $\delta > 0$ 和 $\delta \neq 1, d(\delta) \leqslant d_1(\delta) < d_1(1) = d_1 = d$ 得到. □

定义 2.13.4 定义

$$W = \{u \in H_0^2(\Omega) | I(u) > 0, J(u) < d\} \cup \{0\},$$
$$V = \{u \in H_0^2(\Omega) | I(u) < 0, J(u) < d\},$$
$$W_\delta = \{u \in H_0^2(\Omega) | I_\delta(u) > 0, J(u) < d(\delta)\} \cup \{0\}, \quad 0 < \delta < \delta_0,$$
$$V_\delta = \{u \in H_0^2(\Omega) | I_\delta(u) < 0, J(u) < d(\delta)\}, \quad 0 < \delta < \delta_0.$$

显然, $W = W_1, V = V_1$.

2.13.3 不变集和解的真空隔离

现在, 在初边值问题流的条件下讨论一些集合的不变集和问题 (2.13.1)–(2.13.3) 解的真空隔离. 首先考虑 $0 < E(0) < d$ 的情形.

定理 2.13.2 设 $\sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 又设 $0 < e < d$, (δ_1, δ_2) 是包含 $\delta = 1$ 的最大区间, 使得对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2), d(\delta) > e$, 则

(i) 若 $I(u_0) > 0$ 或 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$, 对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, 具有 $E(0) = e$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的所有解属于 W_δ.

(ii) 若 $I(u_0) < 0$, 对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, 具有 $E(0) = e$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的所有解属于 V_δ.

证明 (i) 令 $u(x,t)$ 是具有 $E(0) = e$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的任意解, $I(u_0) > 0$ 或 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$, T 是 $u(x,t)$ 存在时间. 首先证明对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, $u_0(x) \in W_\delta$. 如果 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$, 于是对于 $0 < \delta < \delta_0, u_0(x) \in W_\delta$. 如果 $I(u_0) > 0$, 于是 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$. 从而

$$\frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_0) = E(0) < d(\delta), \quad \delta \in (\delta_1, \delta_2). \tag{2.13.18}$$

首先对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$ 得到 $J(u_0) < d(\delta)$. 然后, 对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$ 得到 $I_\delta(u_0) > 0$. 否则, 存在 $\bar{\delta} \in (\delta_1, \delta_2)$, 使得 $I_{\bar{\delta}}(u_0) = 0$ 和 $J(u_0) \geqslant d(\bar{\delta})$. 这与式 (2.13.18) 矛盾. 所以对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2), u_0(x) \in W_\delta$. 其次, 对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2), t \in (0,T), u(x,t) \in W_\delta$. 如果它不对, 于是存在 $t_0 \in (0,T)$, 使得对于某个 $\delta \in (\delta_1, \delta_2), u(x,t_0) \in \partial W_\delta$, 即 $I_\delta(u(x,t_0)) = 0, \|\Delta u(x,t_0)\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ 或 $J(u(x,t_0)) = d(\delta)$. 由式 (2.13.18) 得

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u) \leqslant E(0) < d(\delta), \quad \delta \in (\delta_1, \delta_2), \quad t \in (0,T), \tag{2.13.19}$$

这指出 $J(u(x,t_0)) = d(\delta)$ 是不可能的. 如果 $I_\delta(u(x,t_0)) = 0$ 和 $\|\Delta u(x,t_0)\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, 则根据 $d(\delta)$ 的定义知 $J(u(x,t_0)) \geqslant d(\delta)$, 这与式 (2.13.19) 矛盾.

(ii) 设 $u(x,t)$ 是具有 $E(0) = e$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的任意解, $I(u_0) < 0$, T 是 $u(x,t)$ 存在的时间. 首先, 应用类似于 (i) 的方法, 可证对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2), u_0(x) \in$

V_δ. 其次证明, 对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2), t \in (0,T), u(x,t) \in V_\delta$. 如果这不真, 那么存在 $t_0 \in (0,T)$, 使得对于某 $\delta \in (\delta_1, \delta_2), u(x,t_0) \in \partial V_\delta$, 即 $I_\delta(u(x,t_0)) = 0$ 或 $J(u(x,t_0)) = d(\delta)$. 式 (2.13.19) 还指出, $J(u(x,t_0)) = d(\delta)$ 是不可能的. 令 t_0 是第一个时间, 使得 $I_\delta(u(x,t)) = 0$. 于是对于 $0 < t < t_0, I_\delta(u) < 0$. 所以对于 $0 < t < t_0, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} > r(\delta)$ 和 $\|\Delta u(t_0)\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r(\delta)$. 因此又得到 $J(u(t_0)) \geqslant d(\delta)$, 这与式 (2.13.19) 矛盾. □

注意到, 如果 $0 < e' < e < d$ 和区间 (δ_1', δ_2') 是包含 $\delta = 1$ 的最大区间, 使得对于 $\delta \in (\delta_1', \delta_2'), d(\delta) > e'$, 则有 $\delta_1' < \delta_1 < \delta_2 < \delta_2'$. 因此由定理 2.13.2 可得下面的推论.

推论 2.13.1 如果在定理 2.13.2 中假定 $E(0) = e$ 用 $0 < E(0) \leqslant e$ 替代, 则定理 2.13.2 的结论仍成立.

定理 2.13.3 设 $\sigma(s), u_i(x)(i = 0,1), e$ 和 (δ_1, δ_2) 与定理 2.13.2 中相同. 于是对于任意的 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$ 两集合 W_δ 和 V_δ 均为不变集, 因此只要 $0 < E(0) \leqslant e$, 在问题 (2.13.1)–(2.13.3) 流的条件下, 两集合

$$W_{\delta_1\delta_2} = \bigcup_{\delta_1<\delta<\delta_2} W_\delta, \quad V_{\delta_1\delta_2} = \bigcup_{\delta_1<\delta<\delta_2} V_\delta$$

分别为不变集.

由式 (2.13.19) 推出, 如果 $0 < E(0) \leqslant e < d$ 和区间 (δ_1, δ_2) 同在定理 2.13.2 中一样, 则对于任意的 $\delta \in (\delta_1, \delta_2), u(x,t) \in \mathcal{N}_\delta$ 是不可能的. 所以对于具有 $0 < E(0) \leqslant e < d$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的所有解的集合, 存在真空域

$$U_e = \mathcal{N}_{\delta_1\delta_2} = \bigcup_{\delta_1<\delta<\delta_2} \mathcal{N}_\delta = \{u \in H_0^2(\Omega) | I_\delta(u) = 0, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \neq 0, \delta_1 < \delta < \delta_2\},$$

使得 $u(x,t) \notin U_e$.

下面讨论具有 $E(0) \leqslant 0$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 解的不变集.

引理 2.13.9 设 $\sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$, 则具有 $E(0) = 0$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的所有非平凡解满足

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r_0 = \left(\frac{q+1}{2aC_*}\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

证明 令 $u(x,t)$ 是具有 $E(0) = 0$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的任意解, T 是 $u(x,t)$ 存在的时间. 首先由式 (2.13.5) 得

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u) \leqslant E(0) = 0, \quad 0 \leqslant t < T,$$

上式给出对于 $0 \leqslant t < T, J(u) \leqslant 0$. 所以由

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leqslant \sum_{i=1}^N \int_\Omega G_i(u_{x_i})dx \leqslant \frac{a}{q+1}\sum_{i=1}^N \int_\Omega |u_{x_i}|^{q+1}dx \\ &= \frac{a}{q+1}\sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} \leqslant \frac{a}{q+1}C_*\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{q+1} \\ &= \frac{a}{q+1}C_*\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{q-1}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

推出, 或 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = 0$ 或 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r_0$. 如果 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$, 则对于 $0 \leqslant t < T, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \equiv 0$. 否则, 存在 $t_0 \in (0,T)$, 使得 $0 < \|\Delta u(x,t_0)\|_{L^2(\Omega)} < r_0$. 利用类似的方法可证, 如果 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, 那么对于 $0 \leqslant t < T, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r_0$. □

定理 2.13.4 设 $\sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0) < 0$ 或 $E(0) = 0, \|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, 那么对于 $\delta \in \left(0, \frac{p+1}{2}\right)$, 问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的所有解属于 V_δ.

证明 令 $u(x,t)$ 是具有 $E(0) < 0$ 或 $E(0) = 0, \|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的任意解, T 是 $u(x,t)$ 存在的时间. 由式 (2.13.5) 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{p+1}\right)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{p+1}I_\delta(u) \\ \leqslant &\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u) \leqslant E(0), \quad \delta \in \left(0, \frac{p+1}{2}\right), \quad t \in [0,T). \qquad (2.13.20)\end{aligned}$$

如果 $E(0) < 0$, 于是对 $\delta \in \left(0, \frac{p+1}{2}\right)$ 有 $I_\delta(u) < 0$ 和 $J(u) < 0 < d(\delta)$. 如果 $E(0) = 0, \|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, 于是引理 2.13.9 给出对于 $0 \leqslant t < T, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r_0$. 所以不等式 (2.13.20) 仍给出 $I_\delta(u) < 0$ 和对于 $\delta \in \left(0, \frac{p+1}{2}\right), J(u) < 0 < d(\delta)$. 因此, 对于上述两种情况, 总有对于 $\delta \in \left(0, \frac{p+1}{2}\right), 0 \leqslant t < T, u(x,t) \in V_\delta$. □

2.13.4 具有 $E(0) < d$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 解的整体存在性与不存在性

下面证明具有 $E(0) < d$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 解的整体存在性与不存在性, 并给出解整体存在性与不存在性的门槛结果. 首先讨论解的整体存在性.

定理 2.13.5 设 $\sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0) < d$ 和 $I(u_0) > 0$ 或 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$, 那么问题 (2.13.1)–(2.13.3) 存在唯一整体弱解 $u(x,t) \in L^\infty\left((0,\infty); H_0^2(\Omega)\right)$, 且 $u_t(x,t) \in L^\infty\left((0,\infty); L^2(\Omega)\right)$ 和对于 $0 \leqslant t < \infty$, $u(x,t) \in W$.

证明 令 $\{w_j(x)\}$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 中的正交基. 设问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的近似解为

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j(x), \quad m = 1, 2\cdots$$

满足

$$(u_{mtt}, w_s) + \gamma(u_{mt}, w_s) + a(u_m, w_s) - b(u_m, w_s) = 0, \tag{2.13.21}$$

在 $H_0^2(\Omega)$ 中

$$u_m(x,0) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm} w_j(x) \to u_0(x), \tag{2.13.22}$$

在 $L^2(\Omega)$ 中

$$u_{mt}(x,0) = \sum_{j=1}^{m} b_{jm} w_j(x) \to u_1(x). \tag{2.13.23}$$

方程 (2.13.21) 两端同乘以 $g'_{sm}(t)$, 并对 s 求和得

$$\frac{d}{dt}E_m(t) + \gamma\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$$

和

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} + J(u_m) + \gamma\int_0^t \|u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau = E_m(0), \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2.13.24}$$

由式 (2.13.22) 和式 (2.13.23) 知, 当 $m \to \infty$ 时, $E_m(0) \to E(0)$. 所以对于充分大的 m 有

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\int_0^t \|u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau + J(u_m) < d. \tag{2.13.25}$$

由式 (2.13.25) 和

$$J(u_m) \geqslant \frac{p-1}{2(p+1)}\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p+1}I(u_m)$$

得

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{p-1}{2(p+1)}\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p+1}I(u_m) < d. \tag{2.13.26}$$

由定理 2.13.2 的证明知, $u_0(x) \in W$. 从而由

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + J(u_m(0)) = E_m(0),$$

式 (2.13.22) 和式 (2.13.23) 对于充分大的 m, 得 $u_m(x,0) \in W$. 由式 (2.13.25) 和类似于定理 2.13.2 的证明方法推得对于 $0 \leqslant t < \infty$ 和充分大的 m, $u_m(x,t) \in W$. 于是式 (2.13.26) 给出对于充分大的 m,

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{p-1}{2(p+1)}\|\Delta u_m\|^2_{L^2(\Omega)} < d, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.13.27}$$

不等式 (2.13.27) 给出

$$\|\Delta u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 < \frac{2(p+1)}{p-1}d, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.13.28}$$

$$\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 < 2d, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.13.29}$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} \leqslant C_* \|\Delta u_m\|_{L^2(\Omega)}^{q+1} < C_* \left(\frac{2(p+1)}{p-1}d\right)^{\frac{q+1}{2}}, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.13.30}$$

$$\|\sigma_i(u_{mx_i})\|_{L^r(\Omega)}^r \leqslant a^r \|u_{mx_i}\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} \leqslant a^r C_* \left(\frac{2(p+1)}{p-1}d\right)^{\frac{q+1}{2}},$$
$$r = \frac{q+1}{q}, \quad 0 \leqslant t < \infty, \ 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{2.13.31}$$

从式 (2.13.28)–(2.13.31) 知, 存在 $u, \chi_i (1 \leqslant i \leqslant N)$ 和 $\{u_m\}$ 的子序列 $\{u_\nu\}$, 使得当 $\nu \to \infty$ 时,

在 $L^\infty((0,\infty); H_0^2(\Omega))$ 中弱 $*$ 和在 $Q = \Omega \times [0,\infty)$ 中几乎处处 $u_\nu \to u$,
在 $L^\infty((0,\infty); L^2(\Omega))$ 中弱 $*$ $u_{\nu t} \to u_t$,
在 $L^\infty((0,\infty); L^{q+1}(\Omega))$ 中弱 $*$ $u_{\nu x_i} \to u_{x_i}, 1 \leqslant i \leqslant N$,
在 $L^{q+1}(\Omega)$ 中对于每一个 $t > 0, 1 \leqslant i \leqslant N$ 强 $u_{\nu x_i} \to u_{x_i}$,
在 $L^\infty((0,\infty); L^r(\Omega))$ 中弱 $*$ $\sigma_i(u_{\nu x_i}) \to \chi_i, 1 \leqslant i \leqslant N$.

由引理 2.11.2 知, $\chi_i = \sigma_i(u_{x_i})$. 方程 (2.13.21) 对 t 积分有

$$\begin{aligned}&(u_{mt}, w_s) + \gamma(u_m, w_s) + \int_0^t a(u_m, w_s)d\tau - \int_0^t b(u_m, w_s)d\tau \\ =& (u_{mt}(0), w_s) + \gamma(u_m(0), w_s), \quad 0 \leqslant t < \infty.\end{aligned}$$

在上式中令 $m = \nu \to \infty$, 得

$$(u_t, w_s) + \gamma(u, w_s) + \int_0^t a(u, w_s)d\tau - \int_0^t b(u, w_s)d\tau = (u_1, w_s) + \gamma(u_0, w_s), \quad \forall s \geqslant 1$$

和式 (2.13.4). 另一方面, 由式 (2.13.22) 和式 (2.13.23) 在 $H_0^2(\Omega)$ 中有 $u(x,0) = u_0(x)$ 和在 $L^2(\Omega)$ 中有 $u_t(x,0) = u_1(x)$. 下面证明 $u(x,t)$ 满足式 (2.13.5).

首先, 应用类似引理 2.13.8 中的证明方法, 可证对于每一个 $t > 0$ 有

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^N \int_\Omega G_i(u_{\nu x_i})dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega G_i(u_{x_i})dx.$$

所以由式 (2.13.24) 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma\int_0^t \|u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ \leqslant& \liminf_{\nu\to\infty} \frac{1}{2}\|u_{\nu t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \liminf_{\nu\to\infty}\frac{1}{2}\|\Delta u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2 + \liminf_{\nu\to\infty}\gamma\int_0^t \|u_{\nu\tau}\|^2 d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \liminf_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_{\nu t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\Delta u_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma\int_0^t\|u_{\nu\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau\right)\\
&=\liminf_{\nu\to\infty}\left(E_\nu(0)+\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{\nu x_i})dx\right)\\
&=\lim_{\nu\to\infty}\left(E_\nu(0)+\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{\nu x_i})dx\right)\\
&=E(0)+\sum_{i=1}^N\int_\Omega G_i(u_{x_i})dx,
\end{aligned}$$

上式给出式 (2.13.5). 最后由定理 2.13.2 知, 对于 $0\leqslant t<\infty, u(x,t)\in W$. □

注意到, 如果 $I(u_0)>0$, 于是根据式

$$\frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{p-1}{2(p+1)}\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{p+1}I(u_0)\leqslant\frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2+J(u_0)=E(0)$$

得到 $E(0)>0$. 所以推论 2.13.2 的假定弱于定理 2.13.5, 但结论强于定理 2.13.5.

推论 2.13.2 如果在定理 2.13.5 中的假定 "$E(0)<d, I(u_0)>0$" 用 "$0<E(0)<d, I_{\delta_2}(u_0)>0$" 替代, 其中 (δ_1,δ_2) 是包含 $\delta=1$ 的最大区间, 使得对于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2), d(\delta)>E(0)$, 则问题 (2.13.1)–(2.13.3) 存在整体弱解 $u(x,t)\in L^\infty\left((0,\infty);H_0^2(\Omega)\right)$, 具有 $u_t(x,t)\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right)$ 和对于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2), 0\leqslant t<\infty, u(x,t)\in W_\delta$.

定理 2.13.6 如果在推论 2.13.2 中假定 "$I_{\delta_2}(u_0)>0$ 或 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)}=0$" 用 "$\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)}<r(\delta_2)$" 替代, 那么问题 (2.13.1)–(2.13.3) 有整体弱解 $u(x,t)\in L^\infty\left((0,\infty);H_0^2(\Omega)\right)$, 且有 $u_t(x,t)\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right)$ 和满足

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant\frac{E(0)}{a(\delta_1)},\quad \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant 2E(0). \tag{2.13.32}$$

证明 首先 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)}<r(\delta_2)$ 给出 $I_{\delta_2}(u_0)>0$ 或 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)}=0$. 因此, 由推论 2.13.2 推出问题 (2.13.1)–(2.13.3) 存在整体弱解 $u(x,t)\in L^\infty\left((0,\infty);H_0^2(\Omega)\right)$, 具有 $u_t(x,t)\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right)$ 和对于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2), 0\leqslant t<\infty, u(x,t)\in W_\delta$. 同时在式

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+a(\delta)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{p+1}I_\delta(u)\leqslant\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+J(u)\leqslant E(0)$$

中令 $\delta\to\delta_1$, 得式 (2.13.32). □

下面分别证明对于 $0<E(0)<d$ 和 $E(0)\leqslant 0$, 问题 (2.13.1)–(2.13.3) 解的整体不存在性. 首先有如下定理.

定理 2.13.7 设 $0 \leqslant \gamma < \gamma_1(p) \equiv \dfrac{(p-1)\lambda_1}{\sqrt{p+3}}, \sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 又设 $0 < E(0) < d$ 和 $I(u_0) < 0$, 则问题 (2.13.1)–(2.13.3) 解的存在时间是有限的.

证明 设 $u(x,t)$ 是具有 $0 < E(0) < d, I(u_0) < 0$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的任意解, T 是 $u(x,t)$ 存在的时间. 证明 $T < \infty$. 如果这不对, 则 $T = \infty$. 令

$$F(t) = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \int_0^t \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau,$$

于是

$$\begin{aligned}
&\dot{F}(t) = 2(u_t, u) + \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \\
&\ddot{F}(t) = 2\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(u_{tt}, u) + 2\gamma(u_t, u) = 2\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2I(u).
\end{aligned} \quad (2.13.33)$$

由 $E(t) \leqslant E(0)$ 得

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{p-1}{2(p+1)}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{p+1}I(u) \leqslant \frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u) \leqslant E(0)$$

和

$$\begin{aligned}
\ddot{F}(t) &\geqslant (p+3)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + (p-1)\lambda_1^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(p+1)E(0) \\
&= (p+3)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left((p-1)\lambda_1^2 - \varepsilon\right)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(p+1)E(0), \\
\dot{F}^2(t) &= 4(u_t, u)^2 + 4\gamma(u_t, u)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^4 \\
&\leqslant \left(4 + \frac{p-1}{1+\varepsilon}\right)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{4(1+\varepsilon)}{p-1} + 1\right)\gamma^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^4.
\end{aligned} \quad (2.13.34)$$

令

$$f(\varepsilon) = (p-1)\lambda_1^2 - \varepsilon - \frac{4+(p-1)}{4+\dfrac{p-1}{1+\varepsilon}}\left(\frac{4(1+\varepsilon)}{p-1} + 1\right)\gamma^2.$$

从而由 $\gamma^2 < \dfrac{(p-1)^2\lambda_1^2}{p+3}$ 知 $f(0) > 0$. 所以存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $f(\varepsilon) > 0$, 即

$$\frac{p+3}{4+\dfrac{p-1}{1+\varepsilon}}\left(\frac{4(1+\varepsilon)}{p-1} + 1\right)\gamma^2 < (p-1)\lambda_1^2 - \varepsilon.$$

另一方面, 由定理 2.13.2 对于 $\delta \in (1, \delta_2), 0 \leqslant t < \infty$ 得 $u(x,t) \in V_\delta$, 其中 (δ_1, δ_2) 是包含 $\delta = 1$ 的最大时间区间, 使得对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2), d(\delta) > E(0)$. 所以对于 $\delta \in (1, \delta_2), 0 \leqslant t < \infty$ 有 $I_\delta(u) < 0$ 和 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} > r(\delta)$. 对于 $0 \leqslant t < \infty, I_{\delta_2}(u) \leqslant 0$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r(\delta_2)$. 因此根据式 (2.13..33) 有

$$\begin{aligned}\ddot{F}(t) &\geqslant -2I(u) = 2(\delta_2-1)\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - 2I_{\delta_2}(u)\\ &\geqslant 2(\delta_2-1)\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\geqslant 2(\delta_2-1)r^2(\delta_2) \equiv C(\delta_2) > 0,\\ \dot{F}(t) &\geqslant C(\delta_2)t + \dot{F}(0). \end{aligned} \tag{2.13.35}$$

因此有

$$2(u_t,u) + \gamma\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant C(\delta_2)t + \dot{F}(0). \tag{2.13.36}$$

式 (2.13.36) 两端同乘以 $e^{\gamma t}$ 得

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \geqslant C(\delta_2)te^{\gamma t} + \dot{F}(0)e^{\gamma t}. \tag{2.13.37}$$

式 (2.13.37) 对 t 积分知, 当 $t\to\infty$ 时,

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \frac{1}{\gamma}t + \frac{1}{\gamma}\left(\dot{F}(0) - \frac{1}{\gamma}\right)\left(1-e^{-\gamma t}\right) \to \infty.$$

所以存在 $t_0>0$, 使得对于 $t\geqslant t_0, \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} > 2(p+1)E(0)$. 从而对于 $t\geqslant t_0$ 有

$$\begin{aligned}&F(t)\ddot{F}(t) - \frac{p+3}{4+\dfrac{p-1}{1+\varepsilon}}\left(\dot{F}(t)\right)^2\\ \geqslant &\left((p-1)\lambda_1^2 - \varepsilon - \frac{p+3}{4+\dfrac{p-1}{1+\varepsilon}}\left(\frac{4(1+\varepsilon)}{p-1}+1\right)\gamma^2\right)\|u\|^4_{L^2(\Omega)} \geqslant 0, \quad t\geqslant t_0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\left(F(t)^{-\alpha}\right)'' = -\frac{\alpha}{F^{\alpha+2}(t)}\left(F(t)\ddot{F}(t) - (\alpha+1)\dot{F}^2(t)\right) \leqslant 0, \quad t\geqslant t_0,\\ &\alpha = \frac{p+3}{4+\dfrac{p-1}{1+\varepsilon}} - 1 > 0.\end{aligned}$$

另一方面, 式 (2.13.35) 表示, 存在 $t_1\geqslant t_0$, 使得 $\dot{F}(t_1)>0$. 所以存在 $T_1>0$, 使得

$$\lim_{t\to T_1} F^{-\alpha}(t) = 0, \quad \lim_{t\to T_1} F(t) = \infty,$$

这与 $T=\infty$ 矛盾. □

下面考虑 $E(0)\leqslant 0$ 的情况.

定理 2.13.8 设 $0\leqslant\gamma<\gamma_2(p)\equiv(p-1)\lambda_1, \sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x)\in H_0^2(\Omega), u_1(x)\in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0)<0$ 或 $E(0)=0, I(u_0)<0$, 则问题 (2.13.1)–(2.13.3) 解的存在时间是有限的.

证明　令 $u(x,t)$ 是具有 $E(0) < 0$ 或 $E(0) = 0, I(u_0) < 0$ 的问题 (2.13.1)-(2.13.3) 的任意解, T 是 $u(x,t)$ 的存在时间, 证明 $T < \infty$. 如果这不真, 则 $T = \infty$. 令

$$F_1(t) = e^{\frac{\gamma}{2}t}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

于是

$$\begin{aligned}
\dot{F}_1(t) &= e^{\frac{\gamma}{2}t}\left(2(u_t,u) + \frac{\gamma}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\right),\\
\ddot{F}_1(t) &= e^{\frac{\gamma}{2}t}\left(2\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(u_{tt},u) + 2\gamma(u_t,u) + \frac{\gamma^2}{4}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\
&= e^{\frac{\gamma}{2}t}\left(2\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2I(u) + \frac{\gamma^2}{4}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\right).
\end{aligned} \tag{2.13.38}$$

由式 (2.13.38) 和 $E(t) \leqslant E(0)$ 可得

$$\begin{aligned}
\ddot{F}_1(t) &\geqslant e^{\frac{\gamma}{2}t}\left((p+3)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + (p-1)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma^2}{4}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(p+1)E(0)\right)\\
&\geqslant e^{\frac{\gamma}{2}t}\left((p+3)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + (p-1)\lambda_1^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma^2}{4}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\right),\\
\dot{F}_1^2(t) &= e^{\gamma t}\left(4(u_t,u)^2 + 2\gamma(u_t,u)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma^2}{4}\|u\|_{L^2(\Omega)}^4\right)\\
&\leqslant e^{\gamma t}\left(\left(4 + \frac{p-1}{1+\varepsilon}\right)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{1+\varepsilon}{p-1} + \frac{1}{4}\right)r^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^4\right).
\end{aligned}$$

令

$$f_1(\varepsilon) = (p-1)\lambda_1^2 - \left(\frac{4+(p-1)}{4+\dfrac{p-1}{1+\varepsilon}}\left(\frac{1+\varepsilon}{p-1} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\right)\gamma^2,$$

于是由 $\gamma^2 < (p-1)^2\lambda_1^2$ 得 $f_1(0) > 0$. 因此存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $f_1(\varepsilon) > 0$, 即

$$\left(\frac{p+3}{4+\dfrac{p-1}{1+\varepsilon}}\left(\frac{1+\varepsilon}{p-1} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\right)\gamma^2 < (p-1)\lambda_1^2.$$

所以

$$\begin{aligned}
&F_1(t)\ddot{F}_1(t) - \frac{p+3}{4+\dfrac{p-1}{1+\varepsilon}}\dot{F}_1^2(t)\\
\geqslant{}& e^{\gamma t}\left((p-1)\lambda_1^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{p+3}{4+\dfrac{p-1}{1+\varepsilon}}\left(\frac{1+\varepsilon}{p-1} + \frac{1}{4}\right)\gamma^2\right)\|u\|_{L^2(\Omega)}^4 \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

另一方面, 由定理 2.13.4 推出, 对于 $\delta \in \left(1, \dfrac{p+1}{2}\right), 0 \leqslant t < \infty, u(x,t) \in V_\delta$. 所以, 如果在定理 2.13.7 的证明中 δ_2 用 $\dfrac{p+1}{2}$ 替代, 那么由式 (2.13.38) 可知

$$
\begin{aligned}
\ddot{F}_1(t) &\geqslant e^{\frac{\gamma}{2}t}(p-1)r^2\left(\frac{p+1}{2}\right) \equiv C(p)e^{\frac{\gamma}{2}t}, \\
\dot{F}_1(t) &\geqslant 2C(p)\left(e^{\frac{\gamma}{2}t}-1\right) + \dot{F}_1(0), \\
F_1(t) &\geqslant 4C(p)\left(e^{\frac{\gamma}{2}t}-1\right) + \left(\dot{F}_1(0) - 2C(p)\right)t.
\end{aligned}
$$

因此存在 $t_0 \geqslant 0$, 使得 $F_1(t_0) > 0$ 和 $\dot{F}_1(t_0) > 0$. 证明的剩余部分同于定理 2.13.7 的证明. □

注意到由

$$
\frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{p-1}{2(p+1)}\|\Delta u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p+1}I(u_0) \leqslant \frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + J(u_0) = E(0)
$$

看出, 如果 $E(0) < 0$, 于是 $I(u_0) \geqslant 0$ 是不可能的. 所以由定理 2.13.5, 定理 2.13.7 和定理 2.13.8 可得问题 (2.13.1)–(2.13.3) 整体解的存在性与不存在性的下列门槛结果.

定理 2.13.9 设 $\sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0) < d$ 和对于 $0 < E(0) < d, 0 \leqslant \gamma < \gamma_1(p)$; 对于 $E(0) \leqslant 0, 0 \leqslant \gamma < \gamma_2(p)$. 于是当 $I(u_0) \geqslant 0$ 时, 问题 (2.13.1)–(2.13.3) 存在整体弱解, 且当 $I(u_0) < 0$ 时, 问题 (2.13.1)–(2.13.3) 不存在任意整体弱解.

特别地, 对于 $\gamma = 0$ 的情况, 可得以下推论.

推论 2.13.3 设 $\gamma = 0, \sigma(s)$ 满足 (H),$u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0) < d$. 于是当 $I(u_0) \geqslant 0$ 时, 问题 (2.13.1)–(2.13.3) 存在整体弱解, 且当 $I(u_0) < 0$ 时, 问题 (2.13.1)–(2.13.3) 不存在任意整体弱解.

注 2.13.1 在定理 2.13.7 和定理 2.13.8 中条件 $0 \leqslant \gamma < \gamma_1(p)$ 和 $0 \leqslant \gamma < \gamma_2(p)$ 不包含 γ 必须小. 事实上, 当 $N = 1, 2$ 时, 在 (H) 中 q 和 p 可以非常大. 所以 $\gamma_1(p)$ 和 $\gamma_2(p)$ 也可以非常大.

2.13.5 具有临界初值条件$E(0) = d$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3)

现在讨论具有临界初值条件 $E(0) = d$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 整体解的存在性, 并给出解整体存在性和不存在性的门槛结果. 首先研究具有 $E(0) = d, I(u_0) \geqslant 0$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3).

定理 2.13.10 设 $\gamma \geqslant 0, \sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0) = d$ 和 $I(u_0) \geqslant 0$, 则问题 (2.13.1)–(2.13.3) 存在整体弱解 $u(x,t) \in L^\infty((0,\infty); H_0^2(\Omega))$, 且 $u_t(x,t) \in L^\infty\left((0,\infty); L^2(\Omega)\right)$ 和对于 $0 \leqslant t < \infty, u(x,t) \in \bar{W} = W \cup \partial W$.

证明　对两种情况 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ 和 $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$ 证明此定理.

(1) $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$.

(i) 如果 $I(u_0) > 0$, 则 $\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u_0)|_{\lambda=1} = \frac{1}{\lambda} I(\lambda u_0)|_{\lambda=1} > 0$. 所以存在一个区间 (λ', λ''), 使得 $\lambda' < 1 < \lambda''$, $\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u_0) > 0$ 和对于 $\lambda \in (\lambda', \lambda''), I(\lambda u_0) > 0$. 取一序列 $\{\lambda_m\}$, 使得 $\lambda' < \lambda_m < 1, m = 1, 2, \cdots$ 和当 $m \to \infty$ 时, $\lambda_m \to 1$. 令 $u_{0m}(x) = \lambda_m u_0(x)$ 和考虑初值条件

$$u(x, 0) = u_{0m}(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \tag{2.13.39}$$

与对应的问题 (2.13.1), (2.13.39), (2.13.3). 于是

$$I(u_{0m}) > 0 \tag{2.13.40}$$

和

$$E_m(0) = \frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_{0m}) < \frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_0) = E(0) = d. \tag{2.13.41}$$

(ii) 如果 $I(u_0) = 0$, 于是根据 d 的定义有 $J(u_0) \geqslant d$. 这与

$$\frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_0) = E(0) = d$$

一起给出 $J(u_0) = d$. 所以由引理 2.13.8 有 $u_0 \in \mathcal{N}^+$. 进一步, 由引理 2.13.2 得 $\lambda^* = \lambda^*(u_0) = 1, J(\lambda u_0)$ 在 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 上是递增的和对于 $0 < \lambda < 1, I(\lambda u_0) > 0$. 取一序列 $\{\lambda_m\}$, 使得 $0 < \lambda_m < 1, m = 1, 2, \cdots$ 和当 $m \to \infty$ 时, $\lambda_m \to 1$. 还令 $u_{0m}(x) = \lambda_m u_0(x)$ 和考虑问题 (2.13.1), (2.13.39), (2.13.3). 可以看出式 (2.13.40), (2.13.41) 仍成立.

从定理 2.13.5 推出, 对于每一个 m, 问题 (2.13.1), (2.13.39), (2.13.3) 有整体弱解 $u_m(x, t) \in L^\infty\left((0, \infty); H_0^2(\Omega)\right)$, 且 $u_{mt}(x, t) \in L^\infty\left((0, \infty); L^2(\Omega)\right)$ 和对于 $0 \leqslant t < \infty, u_m(x, t) \in W$ 满足

$$\begin{aligned}&(u_{mt}, v) + \gamma(u_m, v) + \int_0^t a(u_m, v)d\tau - \int_0^t b(u_m, v)d\tau \\ &= (u_1, v) + \gamma(u_{0m}, v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), \quad 0 \leqslant t < \infty\end{aligned} \tag{2.13.42}$$

和

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_m) + \gamma \int_0^t \|u_{m\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leqslant E_m(0) < d, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2.13.43}$$

这个证明的剩余部分同定理 2.13.5 的证明.

(2) $\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

在此情况下有 $J(u_0) = 0$ 和 $\frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = E(0) = d$. 再取一序列 $\{\lambda_m\}$, 使得

$0 < \lambda_m < 1$ 和当 $m \to \infty$ 时, $\lambda_m \to 1$. 令 $u_{1m}(x) = \lambda_m u_1(x)$. 考虑初值条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_{1m}(x) \tag{2.13.44}$$

和问题 (2.13.1), (2.13.44), (2.13.3). 由

$$E_m(0) = \frac{1}{2}\|u_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)} + J(u_0) = \frac{1}{2}\|u_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} = d$$

和定理 2.13.5 推出, 对于每一个 m, 问题 (2.13.1), (2.13.44), (2.13.3) 有整体弱解 $u_m(x,t) \in L^\infty\left((0,\infty); H_0^2(\Omega)\right)$, 且 $u_{mt}(x,t) \in L^\infty\left((0,\infty); L^2(\Omega)\right)$ 和对于 $0 \leqslant t < \infty, u_m(x,t) \in W$ 满足式 (2.13.42) 和式 (2.13.43). 这个证明的剩余部分同定理 2.13.5 的证明.

从定理 2.13.5 和定理 2.13.10 以及文献 [123] 中的定理 2.1 和定理 2.3 可得下面的推论.

推论 2.13.4 如果在文献 [123] 中的定理 2.1 和定理 2.3 假定 "$|\sigma_i(s)| \leqslant b|s|^m$, $0 < E(0) < \dfrac{m-1}{4(m+1)}\left(\dfrac{1}{bC_*}\right)^{\frac{2}{m-1}}$" 用 "$\sigma(s)$ 满足 (H), $0 < E(0) \leqslant d$" 替代, 于是这些定理的结果仍成立.

下面考虑具有 $E(0) = d, I(u_0) < 0$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 整体解的存在性.

引理 2.13.10 设 $\gamma > 0, \sigma(s)$ 满足 (H), $u(x,t)$ 是问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的弱解, T 是 $u(x,t)$ 存在的时间. 又设对于 $0 \leqslant t < T$,

$$\int_0^t \|u_\tau\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \equiv 0,$$

于是对于 $0 \leqslant t < T, u(t) \equiv u_0(x)$, 即 $u(x,t)$ 是问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的稳态解.

证明 由对于 $0 \leqslant t < T$, $\int_0^t \|u_\tau\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \equiv 0$ 可得在 $Q = \Omega \times [0,T)$ 上几乎处处 $u_t(x,t) = 0$, 所以有

$$\frac{d}{dt}\|u - u_0\|^2_{L^2(\Omega)} = 2(u_t, u - u_0) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t < T$$

和对于 $0 \leqslant t < T, u(x,t) \equiv u_0(x)$. □

引理 2.13.11 设 $\gamma > 0, \sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$ 和

$$V' = \{u \in H_0^2(\Omega) | I(u) < 0\}.$$

又设 $E(0) = d$, 则在问题 (2.13.1)–(2.13.3) 流的条件下 V' 是不变集.

证明 $u(x,t)$ 是具有 $E(0) = d$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的任意弱解, T 是 $u(x,t)$ 存在的时间. 证明对于 $0 < t < T, I(u) < 0$. 如果这不真, 于是存在 $t_0 \in (0,T)$, 使得对于 $0 \leqslant t < t_0$, $I(u_0) = 0$ 和 $I(u) < 0$. 所以由引理 2.13.5, 对于 $0 \leqslant t < t_0$, 有 $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} > r(1)$ 和 $\|\Delta u(\cdot,t_0)\|_{L^2(\Omega)} \geqslant r(1)$. 根据 d 的定义知, $J(u(t_0)) \geqslant d$. 由此和

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \int_0^t \|u_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + J(u) \leqslant E(0) = d$$

得 $J(u(x,t_0)) = d$ 和 $\int_0^{t_0} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = 0$, 这就给出 $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$, 即在 $[0,t_0]$ 上 $u(x,t_0) = u_0(x)$. 这破坏了 $I(u_0) < 0$. □

定理 2.13.11　设 $0 < \gamma < \gamma_1(p), \sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0) = d$ 和 $I(u_0) < 0$. 于是问题 (2.13.1)–(2.13.3) 解存在的时间是有限的, 除非 $u(x,t)$ 是问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的稳态解.

证明　令 $u(x,t)$ 是问题 (2.13.1)–(2.13.3) 的任意解, 但不是稳态解. T 是 $u(x,t)$ 的存在时间, 证明 $T < \infty$. 如果它不对, 则 $T = \infty$. 由定理 2.13.12 和引理 2.13.11 知, 存在 $t_0 > 0$, 使得 $\int_0^{t_0} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt > 0$ 和 $I(u(t_0)) < 0$ 满足

$$\frac{1}{2}\|u_t(\cdot,t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \int_0^{t_0} \|u_t(\cdot,t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + J(u(x,t_0)) \leqslant E(0) = d,$$

且给出

$$E(t_0) = \frac{1}{2}\|u_t(\cdot,t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u(x,t_0)) \leqslant d - \gamma \int_0^{t_0} \|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt < d.$$

令 $v(x,t) = u(x,t+t_0)$, 那么有 $E(v(x,0)) < d$ 和 $I(v(x,0)) < 0$, 由定理 2.13.7 推出 $v(x,t)$ 的存在时间是有限的, 这与 $T = \infty$ 矛盾. □

由定理 2.13.10 和定理 2.13.11 可得具有 $E(0) = d$ 的问题 (2.13.1)–(2.13.3) 解的整体存在性与不存在性的门槛结果.

定理 2.13.12　设 $0 < \gamma < \gamma_1(p), \sigma(s)$ 满足 (H), $u_0(x) \in H_0^2(\Omega), u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0) = d$, 则当 $I(u_0) \geqslant 0$ 时, 问题 (2.13.1)–(2.13.3) 存在整体弱解, 且当 $I(u_0) < 0$ 时, 问题 (2.13.1)–(2.13.3) 不存在整体弱解.

注 2.13.2　显然, 在此节中几乎所有结果的证明强依赖于引入的两个族 $\{W_\delta\}$ 和 $\{V_\delta\}$. 特别地, 解的整体不存在性的证明强依赖于 $\{V_\delta\}$. 所以为了得到此节的结果, 族 $\{W_\delta\}$ 和 $\{V_\delta\}$ 的引进是决定性的.

2.13.6　推论和例子

下面给出一些推论和例子, 还给出这些结果与文献 [123] 中结果的比较.

推论 2.13.5　如果在假定 (H) 中条件 "对于 $s \neq 0, \sigma_i(s) > 0$ 和对于 $s > 0, s\sigma_i'(s) - \sigma_i(s) > 0$" 用 "对于 $s < 0, \sigma_i(s) > 0$, 对于 $s > 0, \sigma_i(s)$ 是凸函数和 $\lim_{s\to 0} \sigma_i'(s) = 0$" 替代, 那么这节所有结果仍成立.

证明　首先对于 $s>0$, 由 $\sigma_i(s)$ 的凸性和 $\lim_{s\to 0} \sigma_i'(s)=0$ 给出 $\sigma_i'(s)$ 是递增的以及对于 $s > 0, s\sigma_i'(s) - \sigma_i(s) > 0$(见 [130]). 由 $\lim_s \to 0, \sigma_i'(s) = 0$ 给出 $\sigma_i'(s) > 0$ 和对于 $s > 0, \sigma_i(s)$ 是递增的, 这同 $\sigma_i(0) = 0$ 给出当 $s > 0$ 时, $\sigma_i(s) > 0$. □

推论 2.13.6 如果在假定 (H) 中条件 (i) 用 "$\sigma_i(s) \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_-)$, $\sigma_i(s)$ 对于 $-\infty < s < \infty$ 是凸的, 且 $\lim_{s\to 0} \sigma_i'(s) = 0$" 替代, 则这节所有结果仍成立.

推论 2.13.7 如果在假定 (H) 中条件 (i) 用 "$\sigma_i(s) \in C^1(\mathbb{R}), \sigma_i'(0) = 0$, $\sigma_i(s)$ 对于 $-\infty < s < \infty$ 是凸的" 替代, 则这节所有结果仍成立.

例 2.13.1 如果

$$\sigma_i(s) = a_i |u|^q, \quad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

其中 $a_i > 0, q$ 满足 (H) 中的条件, 于是 $\sigma(s)$ 满足 (H), 其中 $p = q$.

例 2.13.2 如果

$$\sigma_i(s) = a_i s^{2k}, \quad k = 1, 2, \cdots, \quad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

其中 $a_i > 0, p = q = 2k$ 是满足 (H) 中的条件, 于是 $\sigma(s)$ 满足 (H).

特别地, 如果在例 2.13.2 中令 $m = 2k$ 和 $b = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$, 于是在假定 (H) 中可以取 $p = q = m, a = b$. 因此根据引理 2.13.8 有

$$d \geqslant \frac{m-1}{2(m+1)} \left(\frac{1}{bC_*}\right)^{\frac{2}{m-1}}.$$

所以关于文献 [123] 中解的整体存在性和渐近性质由

$$0 < E(0) < d_0 = \frac{m-1}{4(m+1)} \left(\frac{1}{bC_*}\right)^{\frac{2}{m-1}}$$

推广到

$$0 < E(0) \leqslant d \leqslant \frac{m-1}{2(m+1)} \left(\frac{1}{bC_*}\right)^{\frac{2}{m-1}} = 2d_0.$$

2.13.7 与本节内容有关的文献

本节的内容取材于文献 [131]. 与本节有关的文献见 [13], [48]–[50], [107]–[111], [123], [126], [130], [135], [137]–[149], [341]–[343].

2.14 一类具强阻尼非线性波动方程解的整体存在性和解的渐近性质

2.14.1 引言

本节研究四阶强阻尼非线性波动方程初边值问题

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u - \alpha \Delta u_t = f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{2.14.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.14.2}$$

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2.14.3}$$

其中 α 是一正常数和 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域.

文献 [132] 利用位势井方法, 在对于 $f(u)$ 和初值的一些假定下, 证明了初边值问题整体弱解和强解的存在性. 文献 [132] 的作者首先研究了这个问题, 留下了一些感兴趣的没有解决的问题. 其次, 为了说明文献 [132] 写作的动机, 我们给出文献 [132] 得到的一些结果. 首先列出文献 [132] 中的一些定义:

(A_1) 如果 $N=1,2,\ 1<p<\infty$; 如果 $N\geqslant 3,\ 1<p\leqslant \dfrac{N-2}{N+2}$, $|f(u)|\leqslant a|u|^p$,

$$
\begin{aligned}
&J(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{a}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1},\\
&I(u)=\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2-a\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1},\\
&E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2-\int_\Omega F(u)dx,\\
&F(u)=\int_0^u f(s)ds,\\
&W=\{u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)|I(u)>0,J(u)<d\}\cup\{0\},\\
&V=\{u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)|I(u)<0,J(u)<d\},
\end{aligned}
$$

其中

$$
d=\inf_{\substack{u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}}\sup_{\lambda\geqslant 0}J(\lambda u).
$$

(A_2) 如果 $N=1,2,\ \dfrac{1}{2}<p_1<\infty$; 如果 $N\geqslant 3,\ \dfrac{2}{N}<p_1\leqslant\dfrac{4}{N-2}$, $|f'(u)|\leqslant A|u|^{p_1}$,

$$
B_R=\{u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)|(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}<R\},
$$

其中

$$
R=\left(aC_*^{p+1}\right)^{\frac{1}{p-1}},\quad C_*=\sup_{\substack{u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}}\frac{\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}}{(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}}.
$$

文献 [132] 有以下两个主要定理.

定理 2.14.1 设 $f\in C(\mathbb{R})$, $f(u)u\geqslant 0$ 和满足 (A_1), $u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0)<d$ 和 $u_0\in W$. 于是问题 (2.14.1)–(2.14.3) 存在整体弱解 $u\in L^\infty\left((0,\infty);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$, 且 $u_t\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right)$ 和对于 $0\leqslant t<\infty$, $u\in W$.

定理 2.14.2 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, $f(u)u\geqslant 0$ 和满足 (A_2), $u_0\in H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $u_1\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. 又设 $E(0)<d$ 和 $u_0\in B_R$, 则问题 (2.14.1)–(2.14.3) 存在唯一整体强解 $u\in L^\infty\left((0,\infty);H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$, 且 $u_t\in L^\infty\left((0,\infty);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$, $\forall T>0$ 和对于 $0\leqslant t<\infty$, $u\in B_R$.

上面的定理断言解关于时间的整体存在性. 对于具阻尼非线性双曲型方程, 通常我们想知道, 当时间 t 趋于无穷时, 解的行为如何, 即所谓解的渐近性质. 为了更清楚些, 我们期望, 当 $t \to \infty$ 时, 解衰减为零. 这是本节主要考虑的问题. 另一方面, 我们也关注减弱假定 (A_1) 和 (A_2). 做这些工作之前, 因为在文献 [132] 中对强解给予了关注, 需要对强解定义进行改变. 我们发现由 $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 仅知 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 而不是 $\Delta u|_{\partial\Omega} = 0$. 为了解决这个问题, 引入如下定义的空间 H_4.

H_4 等于在 $H^4(\Omega)$ 中 $\{w_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ 的闭线性扩张, 其中 $\{w_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ 是特征值问题 $-\Delta w = \lambda w, x \in \Omega, w|_{\partial\Omega} = 0$ 的特征函数系.

注意到, 对于任意的 $w_j(x)$ 有 $\Delta w_j|_{\partial\Omega} = -\lambda_j w_j|_{\partial\Omega} = 0$. 所以对于任意的 $u \in H_4$, 有 $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 和 $\Delta u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 这就推出 $u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0$. 于是可以用

$$H_4 = \left\{u \,|\, u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ \Delta u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ 且\ u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

等价地定义 H_4. 另外, 用 H 表示 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. 于是将给出强解的一个新定义.

定义 2.14.1 函数 $u = u(x,t)$ 称为问题 (2.14.1)–(2.14.3) 在 $\Omega \times [0,T)$ 上的强解, 如果 $u \in L^\infty([0,T); H_4)$, $u_t \in L^\infty([0,T); H)$ 和 $u_{tt} \in L^\infty([0,T); L^2(\Omega))$ 满足

$$\int_0^T (u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u - \alpha \Delta u_t - f(u), \varphi) dt = 0, \quad \forall \varphi \in C([0,T); L^2(\Omega)),$$

在 H_4 中 $u(x,0) = u_0(x)$ 和在 H 中 $u_t(x,0) = u_1(x)$.

现在, 我们研究问题 (2.14.1)–(2.14.3), 其中 α 是一正常数, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域和 $f(u)$ 满足

$$(\mathrm{H}_1)\begin{cases} \text{(i)}\ \ f \in C^1(\mathbb{R})\ 和\ u\,(uf'(u) - f(u)) \geqslant 0,\ 其中等式仅对于\ u = 0\ 成立. \\ \text{(ii)}\ 对于\ 1 \leqslant N \leqslant 4, 1 < q < \infty;\ 对\ N \geqslant 5, 1 < q < \dfrac{N+4}{N-4}, |f(u)| \leqslant A|u|^q. \\ \text{(iii)}\ 存在一个\ p > 1,\ 使得 \\ \qquad (p+1)F(u) \leqslant uf(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds \end{cases}$$

或

$$(\mathrm{H}_2)\begin{cases} \text{(i)}\ \ f \in C^1(\mathbb{R})\ 和\ u\,(uf'(u) - f(u)) \geqslant 0,\ 其中等式仅对于\ u = 0\ 成立. \\ \text{(ii)}\ \ 对于\ 1 \leqslant N \leqslant 4, 0 < q_1 < \infty;\ 对于\ N = 5, 6, 0 < q_1 < \dfrac{N}{N-4}; \\ \qquad 对于\ N \geqslant 7, 0 < q_1 < \dfrac{6}{N-4}, f(0) = 0, |f'(u)| \leqslant a|u|^{q_1}. \\ \text{(iii)}\ 存在一个\ p > 1,\ 使得 \\ \qquad (p+1)F(u) \leqslant uf(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds. \end{cases}$$

下面将采用记号:

$$\|u\|_H^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \|u\|_{H^4}^2 = \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla^3 u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

2.14.2 预备引理

对于问题 (2.14.1)–(2.14.3), 定义

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega F(u)dx = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \int_\Omega F(u)dx,$$

$$I(u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega uf(u)dx = \|u\|_H^2 - \int_\Omega uf(u)dx,$$

$$I_\delta(u) = \delta\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\right) - \int_\Omega uf(u)dx = \delta\|u\|_H^2 - \int_\Omega uf(u)dx, \ \delta > 0,$$

$$d = \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u), \quad \mathcal{N} = \{u \in H | I(u) = 0, u \neq 0\},$$

$$d(\delta) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\delta} J(u), \quad \mathcal{N}_\delta = \{u \in H | I_\delta(u) = 0, u \neq 0\},$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega F(u)dx = \frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u).$$

显然, 如果 $f(u)$ 满足 (H_1) 或 (H_2), 于是对于 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (或 $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$), 上面所有的定义是完善的.

引理 2.14.1 设 $f(u)$ 满足 (H_1) 或 (H_2), $u \in H$(或 $u \in H_4$) 和 $g(u) = \dfrac{f(u)}{u}$, $u \neq 0$, 那么

(i) $\lim_{u\to 0} g(u) = 0$;

(ii) $g(u)$ 在 $(0, \infty)$ 上是严格递增的, 在 $(-\infty, 0)$ 上是严格递减的;

(iii) $f(u)u > 0$, $\forall u \neq 0$;

(iv) $f(u)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是严格递增的;

(v) $0 \leqslant F(u) \leqslant A_1|u|^{q+1}$ 或 $A_2|u|^{q_1+2}$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

证明 (i) 结论直接由 (H_1) 或 (H_2) 中的 (ii) 得到.

(ii) 由 (H_1) 或 (H_2) 中的 (i) 知

$$g'(u) = \frac{uf'(u) - f(u)}{u^2} \begin{cases} > 0, & u > 0, \\ < 0, & u < 0. \end{cases}$$

(iii) 从这个引理的 (i) 和 (ii) 看出, 对于任意的 $u \neq 0$, $g(u) > 0$, 这就给出对于任意的 $u \neq 0$, $f(u)u > 0$.

(iv) 由 (H_1) 中的 (i) 或 (H_2) 和此引理的 (iii) 有

$$f'(u) \geqslant \frac{f(u)}{u} > 0, \quad \forall u \neq 0.$$

(v) 由 $f(0)=0$ 和这个引理的 (ii) 有 $F(u)\geqslant 0$ 和 $F(u)\leqslant A_1|u|^{q+1}$ 或由在 (H_1) 或 (H_2) 中的 (ii) 推出 $A_2|u|^{q_1+2}$. □

下面将给出一些引理帮助我们陈述和证明主要定理. 但不证明它们, 因为可以在文献 [133] 的引理 2.1 到引理 2.9 中令 $\sigma_i(s)\equiv 0\ (1\leqslant i\leqslant N)$ 和 $\alpha=1$ 得到.

引理 2.14.2 设 $f(u)$ 满足 (H_1), $u\in H$ 或 $f(u)$ 满足 (H_2), $u\in H^4$, 那么

$$F(u)\geqslant B|u|^{p+1},\quad \forall|u|\geqslant 1,\quad 某B>0$$

和

$$uf(u)\geqslant (p+1)B|u|^{p+1},\quad \forall|u|\geqslant 1.$$

引理 2.14.3 设 $f(u)$ 满足 (H_1), $u\in H$ 或 $f(u)$ 满足 (H_2), $u\in H_4$, $\varphi(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_\Omega uf(\lambda u)d\lambda$, $\lambda>0$, 则

(i) $\lim_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda)=0$, $\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(\lambda)=\infty$;

(ii) 在 $(-\infty,\infty)$ 上 $\varphi(\lambda)$ 是严格递增的.

引理 2.14.4 设 $f(u)$ 满足 (H_1), $u\in H$, $u\neq 0$ 或 $f(u)$ 满足 (H_2), $u\in H_4$, $u\neq 0$, 则

(i) $\lim_{\lambda\to 0}J(\lambda u)=0$, $\lim_{\lambda\to\infty}J(\lambda u)=-\infty$;

(ii) 存在唯一 $\lambda^*=\lambda^*(u)$, 使得

$$\left.\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)\right|_{\lambda=\lambda^*}=0;$$

(iii) 在 $0<\lambda\leqslant\lambda^*$ 上, $J(\lambda u)$ 是递增的, 在 $\lambda^*\leqslant\lambda<\infty$ 上是递减的和在 $\lambda=\lambda^*$ 处取最大值.

(iv) 对于 $0<\lambda<\lambda^*$, $I(\lambda u)>0$; 对 $\lambda^*<\lambda<\infty$, $I(\lambda u)<0$ 和 $I(\lambda^* u)=0$.

引理 2.14.5 设 $f(u)$ 满足 (H_1), $u\in H$ 或 $f(u)$ 满足 (H_2), $u\in H_4$.

(i) 如果 $0<\|u\|_H<r(\delta)$, 则 $I_\delta(u)>0$.

(ii) 如果 $I_\delta(u)<0$, 则 $\|u\|_H>r(\delta)$.

(iii) 如果 $I_\delta(u)=0$, $u\neq 0$, 则 $\|u\|_h\geqslant r(\delta)$,

$$r(\delta)=\left(\frac{\delta}{AC_*^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q-1}},\ 如果f(u)\ 满足(\mathrm{H}_1),\ C_*=\sup_{\substack{u\in H\\u\neq 0}}\frac{\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)}}{\|u\|_H};$$

$$r(\delta)=\left(\frac{(q_1+1)\delta}{aC_*^{q_1+2}}\right)^{\frac{1}{q_1}},\ 如果f(u)\ 满足(\mathrm{H}_2),\ C_*=\sup_{\substack{u\in H\\u\neq 0}}\frac{\|u\|_{L^{q_1+2}(\Omega)}}{\|u\|_H}.$$

引理 2.14.6 设 $f(u)$ 满足 (H_1), $u\in H$ 或 $f(u)$ 满足 (H_2), $u\in H_4$, 则

(i) 对于 $a(\delta)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\delta}{p+1}, 0<\delta<\dfrac{p+1}{2}, d(\delta)\geqslant a(\delta)r^2(\delta)$;

(ii) $\lim_{\delta\to\infty}d(\delta)=0$ 和存在 $0<\delta_0\leqslant\dfrac{p+1}{2}$, 使得 $d(\delta_0)=0$ 以及对于 $0<\delta<\delta_0$, $d(\delta)>0$.

(iii) $d(\delta)$ 在 $0<\delta\leqslant 1$ 上是递增的, 在 $1\leqslant\delta<\delta_0$ 上是递减的和在 $\delta=1$ 处取最大值.

现在对于问题 (2.14.1)–(2.14.3) 定义下列集合. 下面将叙述它们的不变集.

$$
\begin{aligned}
&W=\{u\in H|I(u)>0, J(u)<d\}\cup\{0\},\\
&W_\delta=\{u\in H|I_\delta(u)>0, J(u)<d(\delta)\}\cup\{0\},\quad 0<\delta<\delta_0,\\
&V=\{u\in H|I(u)<0, J(u)<d\},\\
&V_\delta=\{u\in H|I_\delta(u)<0, J(u)<d(\delta)\},\quad 0<\delta<\delta_0.
\end{aligned}
$$

另外, 定义

$$
\begin{aligned}
&W'=\{u\in H|I(u)>0\}\cup\{0\},\\
&W'_\delta=\{u\in H|I_\delta(u)>0\}\cup\{0\},\quad 0<\delta<\delta_0,\\
&V'=\{u\in H|I(u)<0\},\\
&V'_\delta=\{u\in H|I_\delta(u)<0\},\quad 0<\delta<\delta_0.
\end{aligned}
$$

上面的定义仅对于 $f(u)$ 满足 (H_1) 成立. 对于 $f(u)$ 满足 (H_2), 可以在上面的所有定义中用 $u\in H_4$ 替代 $u\in H$. 现在给出两个定理说明以上流形的不变性.

定理 2.14.3 设 $f(u)$ 满足 (H_1), $u_0\in H$, $u_1\in L^2(\Omega)$. 又设 $0<E(0)<d$ 和 (δ_1,δ_2) 是最大区间, 使得对于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$, $d(\delta)>E(0)$, 则

(i) 只要 $u_0\in W'$, 对于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$, 问题 (2.14.1)–(2.14.3) 的所有弱解属于 W_δ;

(ii) 只要 $u_0\in V'$, 对于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$, 问题 (2.14.1)–(2.14.3) 的所有弱解属于 V_δ.

定理 2.14.4 设 $f(u)$ 满足 (H_2), $u_0\in H_4$, $u_1\in H$. 又设 $0<E(0)<d$ 和 (δ_1,δ_2) 是最大区间, 使得对于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$, $d(\delta)>E(0)$, 则

(i) 只要 $u_0\in W'$, 对于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$, 问题 (2.14.1)–(2.14.3) 的所有弱解属于 W_δ;

(ii) 只要 $u_0\in V'$, 对于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$, 问题 (2.14.1)–(2.14.3) 的所有弱解属于 V_δ.

2.14.3 解的整体存在性

下面分别给出问题 (2.14.1)–(2.14.3) 的整体弱解和整体强解的不同于文献 [132] 中的一些新的存在性定理. 首先考虑问题 (2.14.1)–(2.14.3) 整体弱解的存在性定理.

定理 2.14.5 设 $f(u)$ 满足 (H_1), $u_0\in H$, $u_1\in L^2(\Omega)$. 又设 $E(0)<d$ 和 $u_0\in W'$, 则问题 (2.14.1)–(2.14.3) 存在整体解 $u\in L^\infty((0,\infty);H)$, 且 $u_t\in L^\infty\left((0,\infty);L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left((0,\infty);H_0^1(\Omega)\right)$ 和对于 $0\leqslant t<\infty$, $u\in W$.

证明 令 $\{w_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ 是特征值问题 $-\Delta w = \lambda w,\ x \in \Omega,\ w|_{\partial\Omega} = 0$ 的特征函数系. 作问题 (2.14.1)–(2.14.3) 的近似解

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x), \quad m = 1, 2, \cdots, \tag{2.14.4}$$

满足

$$\begin{aligned}&(u_{mtt}, w_s) + (\nabla u_m, \nabla w_s) + (\Delta u_m, \Delta w_s) + \alpha(\nabla u_{mt}, \nabla w_s)\\ =& (f(u_m), w_s), \quad s = 1, 2, \cdots, m,\end{aligned} \tag{2.14.5}$$

$$\text{在 } H \text{ 中, 当 } m \to \infty \text{ 时}, u_m(x,0) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm} w_j(x) \to u_0, \tag{2.14.6}$$

$$\text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中, 当 } m \to \infty \text{ 时}, u_{mt}(x,0) = \sum_{j=1}^{m} b_{jm} w_j(x) \to u_1. \tag{2.14.7}$$

式 (2.14.5) 两端同乘以 $g'_{sm}(t)$, 对 s 求和, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_m(t) + \alpha \|\nabla u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$$

和

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} + J(u_m) + \alpha \int_0^t \|\nabla u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}\tau = E_m(0), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.14.8}$$

其中

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} + J(u_m).$$

由 $E(0) < d$, $u_0 \in W'$ 和式 (2.14.6), (2.14.7) 推出 $E_m(0) < d$ 和对于充分大的 m, $u_m(0) \in W'$. 于是利用式 (2.14.8) 和在文献 [133] 中定理 3.1 的证明方法可得对于 $0 \leqslant t < \infty$ 和充分大的 m, $u_m(t) \in W'$. 因此由式 (2.14.8) 和

$$J(u_m) \geqslant \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_m\|^2_H + \frac{1}{p+1} I(u_m) \geqslant \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_m\|^2_H,$$

对于充分大的 m, 得

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_m\|^2_H + \alpha \int_0^t \|\nabla u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau < d, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

所以有

$$\|u_m\|_H^2 \leqslant \frac{2(p+1)}{p-1}d, \quad \|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant 2d, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

$$\int_0^t \|\nabla u_{m\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leqslant \frac{d}{\alpha}, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

$$\|u_m\|_{L^{q+1}(\Omega)}^2 \leqslant C_*^2 \|u_m\|_H^2 \leqslant C_*^2 \frac{2(p+1)}{p-1}d, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

$$\|f(u_m)\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \leqslant \int_\Omega (A|u_m|^q)^r\, dx = A_1 \|u_m\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1}$$

$$\leqslant C_*^{q+1} \left(\frac{2(p+1)}{p-1}d\right)^{\frac{q+1}{2}}, \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad r = \frac{q+1}{q}.$$

因此存在 u 和 $\{u_m\}$ 的子序列 $\{u_\nu\}$, 使得当 $\nu \to \infty$ 时,

$u_\nu \to u$ 在 $L^\infty((0,\infty);H)$ 中是弱 $*$ 收敛和在 $Q=\Omega\times[0,\infty)$ 中是几乎处处收敛,

$u_\nu \to u$ 对于每一个 $t>0$ 在 $L^{q+1}(\Omega)$ 中是强收敛,

$u_{\nu t} \to u_t$ 在 $L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))$ 中是弱 $*$ 收敛,

$f(u_\nu) \to \chi$ 在 $L^\infty((0,\infty);L^r(\Omega))$ 中是弱 $*$ 收敛,

$u_{\nu t} \to u_t$ 在 $L^2((0,\infty);H_0^1(\Omega))$ 中是弱收敛.

根据文献 [13] 中的引理 1.3 有 $\chi = f(u)$. 式 (2.14.5) 对 t 积分, 得

$$(u_{mt}, w_s) + \int_0^t (\nabla u_m, \nabla w_s)d\tau + \int_0^t (\Delta u_m, \Delta w_s)d\tau + \alpha(\nabla u_m, \nabla w_s)$$
$$= \int_0^t (f(u_m), w_s)d\tau + (u_{mt}(0), w_s) + \alpha(\nabla u_m(0), \nabla w_s). \tag{2.14.9}$$

在式 (2.14.9) 中对于固定的 s, 令 $m=\nu\to\infty$, 有

$$(u_t, v) + \int_0^t (\nabla u, \nabla v)d\tau + \int_0^t (\Delta u, \Delta v)d\tau + \alpha(\nabla u, \nabla v)$$
$$= \int_0^t (f(u), v)d\tau + (u_1, v) + \alpha(\nabla u_0, \nabla v), \quad \forall\, v \in H. \tag{2.14.10}$$

另一方面, 由式 (2.14.6) 和式 (2.14.7) 知, 在 H 中 $u(x,0) = u_0$ 和在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_t(x,0) = u_1$. 故 $u(x,t)$ 是问题 (2.14.1)–(2.14.3) 的整体弱解. 最后, 由定理 2.14.3 对于 $0 \leqslant t < \infty$, 得 $u \in W$. □

其次, 我们尝试给出问题 (2.14.1)–(2.14.3) 整体强解的存在性定理. 但是这里应用不同于定理 2.14.5 的另外方法证明主要定理. 先给出一些引理, 然后证明关键定理 (定理 2.14.6).

设 $f(u)$ 满足 (H_2), $u_0 \in H_4$, $u_1 \in H$, $\{w_j(x)\}_{j=1}^\infty$ 是同于定理 2.14.5 证明中的那个序列. 由式 (2.14.4) 作近似解 u_m, 且满足

$$(u_{mtt} - \Delta u_m + \Delta^2 u_m - \alpha\Delta u_{mt} - f(u_m), w_s) = 0, \quad s = 1,2,\cdots,m, \tag{2.14.11}$$

在 $H^4(\Omega)$ 中当 $m \to \infty$ 时,

$$u_m(x,0) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm} w_j(x) \to u_0(x), \tag{2.14.12}$$

在 $H^2(\Omega)$ 中当 $m \to \infty$ 时,

$$u_{mt}(x,0) = \sum_{j=1}^{m} b_{jm} w_j(x) \to u_1(x). \tag{2.14.13}$$

应用证明定理 2.14.5 的方法可证以下引理.

引理 2.14.7 设 $f(u)$ 满足 (H_2), $u_0 \in H_4$, $u_1 \in H$. 又设 $E(0) < d$ 和 $u_0 \in W'$. 则对于由式 (2.14.4) 定义的近似解 u_m 和式 (2.14.11)–(2.14.13), 得

$$\|u_m\|_H^2 \leqslant \frac{2(p+1)}{p-1} d, \quad \|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant 2d, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2.14.14}$$

引理 2.14.8 在引理 2.14.7 的条件下, 进一步有

$$\|u_{mt}\|_H^2 + \|u_m\|_{H_4}^2 \leqslant C(T), \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad \forall T > 0. \tag{2.14.15}$$

证明 式 (2.14.11) 两端同乘以 $\lambda_s^2 g'_{sm}(t)$, 并对 s 求和知

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\Delta u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|_{H_4}^2\right) + \alpha\|\nabla^3 u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(f(u_m), \Delta^2 u_{mt}\right), \tag{2.14.16}$$

其中

$$\begin{aligned}\left(f(u_m), \Delta^2 u_{mt}\right) &= -\left(f'(u_m)\nabla u_m, \nabla^3 u_{mt}\right)\\ &\leqslant \|f'(u_m)\|_{L^r(\Omega)}\|\nabla u_m\|_{L^s(\Omega)}\|\nabla^3 u_{mt}\|_{L^2(\Omega)},\\ &\quad 1 < r, s < \infty, \ \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(i) 如果 $N \geqslant 7$, 取 $s = \dfrac{2N}{N-6}$, $r = \dfrac{N}{3}$, 有

$$\begin{aligned}&\|\nabla u_m\|_{L^s(\Omega)} \leqslant C\|u_m\|_{H_4},\\ &\|f'(u_m)\|_{L^r(\Omega)}^r \leqslant \int_\Omega \left(a|u_m|^{q_1}\right)^{\frac{N}{3}} dx = a^{\frac{N}{3}} \int_\Omega |u_m|^{q_1 \cdot \frac{N}{3}} dx.\end{aligned}$$

由 (H_2) 有 $q_1 \cdot \dfrac{N}{3} \leqslant \dfrac{2N}{N-4}$. 因此由引理 2.14.7 得 $\|f'(u_m)\|_{L^r(\Omega)} \leqslant C$ 和

$$\left(f(u_m), \Delta^2 u_{mt}\right) \leqslant C\|u_m\|_{H_4}\|\nabla^3 u_{mt}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{C}{2\alpha}\|u_m\|_{H_4}^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nabla^3 u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.14.17}$$

(ii) 如果 $N = 5, 6$, 取 s 充分大, 使得 $q_1 r \leqslant \dfrac{2N}{N-4}$. 于是仍得 $\|f'(u_m)\|_{L^r(\Omega)} \leqslant C$ 和式 (2.14.17).

(iii) 如果 $1 \leqslant N \leqslant 4$, 取 $s = r = 4$. 于是仍有式 (2.14.17).

将式 (2.14.17) 代入式 (2.14.16), 然后对 t 积分此不等式, 利用式 (2.14.6), 式 (2.14.7) 和 Gronwall 不等式, 立得式 (2.14.15). □

引理 2.14.9 在引理 2.14.7 的条件下, 进一步有

$$\|u_{mtt}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C(T), \quad 0 \leqslant t < T, \quad \forall T > 0. \tag{2.14.18}$$

证明 式 (2.14.11) 两端同乘以 $g''_{sm}(t)$, 并对 s 求和得

$$\begin{aligned}\|u_{mtt}\|^2_{L^2(\Omega)} &= \left(\Delta u_m - \Delta^2 u_m + \alpha \Delta u_{mt} + f(u_m), u_{mtt}\right) \\ &\leqslant (\|\Delta u_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta^2 u_m\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \|\Delta u_{mt}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|f(u_m)\|_{L^2(\Omega)})\|u_{mtt}\|_{L^2(\Omega)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{2.14.19}$$

由在 (H_2) 中的 (ii) 可知

$$|f(u)| \leqslant \frac{a}{q_1 + 1}|u|^{q_1+1}.$$

所以由式 (2.14.15) 容易看出, 对于 $0 \leqslant t \leqslant T$ 和 $\forall T > 0$, $\|f(u_m)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C(T)$, 这与式 (2.14.15) 和引理 2.14.8 结合得式 (2.14.18). □

由引理 2.14.7–引理 2.14.9 易得下面的定理.

定理 2.14.6 设 $f(u)$ 满足 (H_2), $u_0 \in H_4$, $u_1 \in H$. 又设 $E(0) < d$, $I(u_0) > 0$ 或 $u = 0$, 即 $u_0 \in W'$, 则问题 (2.14.1)–(2.14.3) 存在整体强解 $u \in L^\infty([0,T); H_4) \cap L^\infty((0,\infty); H)$, 且 $u_t \in L^\infty([0,T); H) \cap L^\infty\left((0,\infty); L^2(\Omega)\right)$, 对于 $\forall T > 0$, $u_{tt} \in L^\infty\left([0,T); L^2(\Omega)\right)$ 和对于 $0 \leqslant t < \infty$, $u \in W$.

2.14.4 解的渐近性质

现在证明问题 (2.14.1)–(2.14.3) 整体弱解的渐近性质.

引理 2.14.10 设 $f(u)$ 满足 (H_1), $u_0 \in H$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, u_m 是定理 2.14.5 的证明中给出的近似解, 则

(i)
$$\begin{aligned} I(u_m) = \|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} &- \frac{d}{dt}(u_{mt}, u_m) \\ &- \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall m \text{和 } 0 \leqslant t < \infty; \end{aligned} \tag{2.14.20}$$

(ii) 进一步, 如果 $0 < E(0) < d$, $u_0 \in W'$, 则对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, $u_m \in W_\delta$ 和对于 $0 \leqslant t < \infty$ 以及充分大的 m,

$$I(u_m) \geqslant (1 - \delta_1)\|u_m\|^2_H, \tag{2.14.21}$$

其中 (δ_1, δ_2) 是最大区间, 使得对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, $d(\delta) > E(0)$.

证明 (i) 方程 (2.14.11) 两端同乘以 $g_{sm}(t)$, 并对 s 求和, 得式 (2.14.20).

(ii) 由式 (2.14.8) 对于充分大的 m 得

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_m) \leqslant E_m(0) < d(\delta), \quad \delta_1 < \delta < \delta_2, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2.14.22}$$

对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, $0 \leqslant t < \infty$ 和充分大的 m, 利用文献 [133] 中证明定理 3.1 的类似方法可证 $u_m(t) \in W_\delta$. 因此对于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, 有 $I_\delta(u_m) \geqslant 0$ 和 $I_{\delta_1}(u_m) \geqslant 0$. 从而

$$\begin{aligned} I(u_m) &= \|u_m\|_H^2 - \int_\Omega u_m f(u_m)dx \\ &= (1-\delta_1)\|u_m\|_H^2 + I_{\delta_1}(u_m) \geqslant (1-\delta_1)\|u_m\|_H^2. \end{aligned}$$

□

定理 2.14.7 设 $f(u)$ 满足 (H_1), $u_0 \in H$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. 又设 $0 < E(0) < d$ 和 $u_0 \in W'$, 则对于正常数 C 和 λ, 在定理 2.14.5 中给定的整体弱解 u 成立

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_H^2 \leqslant Ce^{-\lambda t}, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2.14.23}$$

证明 首先证明由定理 2.14.5 的证明中给出的近似解 u_m 对于正常数 C 和 λ 以及充分大的 m 成立不等式

$$0 \leqslant E_m(t) \leqslant Ce^{-\lambda t}, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.14.24}$$

其中

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|_H^2 - \int_\Omega F(u_m)dx.$$

注意到, 由定理 2.14.5 的证明有

$$\frac{d}{dt}E_m(t) + \alpha\|\nabla u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0. \tag{2.14.25}$$

式 (2.14.25) 两端同乘以 $e^{\gamma t}(\gamma > 0)$ 得

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}E_m(t)\right) + \alpha e^{\gamma t}\|\nabla u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \gamma e^{\gamma t}E_m(t)$$

和

$$e^{\gamma t}E_m(t) + \alpha\int_0^t e^{\gamma\tau}\|\nabla u_{m\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau = E_m(0) + \gamma\int_0^t e^{\gamma\tau}E_m(\tau)d\tau. \tag{2.14.26}$$

由引理 2.14.10 对于 $0 \leqslant t < \infty$ 和充分大的 m 有 $u_m(x,t) \in W$, 这给出

$$\begin{aligned} E_m(t) &= \frac{1}{2}\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_m) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_m\|_H^2 + \frac{1}{p+1}I(u_m) \\ &\geqslant 0, \quad 0 \leqslant t < \infty. \end{aligned} \tag{2.14.27}$$

由引理 2.14.10 知

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{\gamma\tau}E_m(\tau)d\tau &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t e^{\gamma\tau}\left(\|u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_m\|^2_H\right)d\tau\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t e^{\gamma\tau}\left(\|u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{1-\delta_1}I(u_m)\right)d\tau\\ &=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1-\delta_1}\right)\int_0^t e^{\gamma\tau}\|u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\\ &\quad-\frac{1}{2(1-\delta_1)}\int_0^t e^{\gamma\tau}\frac{d}{d\tau}\left((u_{m\tau},u_m)+\frac{\alpha}{2}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)d\tau \end{aligned}\tag{2.14.28}$$

和

$$\begin{aligned}&-\int_0^t e^{\gamma\tau}\frac{d}{d\tau}\left((u_{m\tau},u_m)+\frac{\alpha}{2}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)d\tau\\ &=(u_{mt}(0),u_m(0))+\frac{\alpha}{2}\|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}-e^{\gamma t}\left((u_{mt},u_m)+\frac{\alpha}{2}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\quad+\gamma\int_0^t e^{\gamma\tau}\left((u_{m\tau},u_m)+\frac{\alpha}{2}\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)d\tau\\ &\leqslant\frac{1}{2}\left(\|u_{mt}(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}e^{\gamma t}\left(\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\quad+\frac{\gamma}{2}\int_0^t e^{\gamma\tau}\left(\|u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)d\tau.\end{aligned}\tag{2.14.29}$$

由式 (2.14.27) 得

$$E_m(t)\geqslant\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{p-1}{2(p+1)}\|u_m\|^2_H.\tag{2.14.30}$$

因此存在一常数 $C>0$, 使得

$$\frac{1}{2}\left(\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\leqslant CE_m(t),\quad 0\leqslant t<\infty.$$

所以由式 (2.14.26), (2.14.28), (2.14.29) 和式 (2.14.30) 推出, 存在正常数 C_0 和 C_1, 使得

$$\begin{aligned}&e^{\gamma t}E_m(t)+\alpha\int_0^t e^{\gamma\tau}\|\nabla u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\\ &\leqslant C_0E_m(0)+\frac{\lambda_0\gamma}{2}\left(1+\frac{1}{1-\delta_1}\right)\int_0^t e^{\gamma\tau}\|\nabla u_{m\tau}\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+C_1\gamma e^{\gamma\tau}E_m(t)\\ &\quad+C_1\gamma^2\int_0^t e^{\gamma\tau}E_m(\tau)d\tau,\quad 0\leqslant t<\infty,\end{aligned}\tag{2.14.31}$$

其中

$$\lambda_0 = \sup_{\substack{u\in H\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

取 γ 使得

$$0 < \gamma < \min\left\{\frac{1}{2C_1}, \frac{2\alpha}{\lambda_0\left(1+\dfrac{1}{1-\delta_1}\right)}\right\}.$$

于是式 (2.14.31) 给出

$$e^{\gamma t}E_m(t) \leqslant 2C_0E_m(0) + 2C_1\gamma^2\int_0^t e^{\gamma\tau}E_m(\tau)d\tau$$

和对于充分大的 m,

$$e^{\gamma t}E_m(t) \leqslant 2C_0E_m(0)e^{2C_1\gamma^2 t} < 2C_0de^{2C_1\gamma^2 t}, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

这给出式 (2.14.24), 其中 $C = 2C_0d$, $\lambda = \gamma(1-2C_1\gamma) > 0$.

由式 (2.14.30) 对于充分大的 m,

$$\|u_{mt}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m\|^2_H \leqslant \frac{2(p+1)}{p-1}E_m(t), \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

令 $\{u_\nu\}$ 是在定理 2.14.5 的证明中定义的 $\{u_m\}$ 的子序列. 于是有

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_H &\leqslant \liminf_{\nu\to\infty}\left(\|u_{\nu t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_\nu\|^2_H\right)\\ &\leqslant \liminf_{\nu\to\infty}\frac{2(p+1)}{p-1}E_\nu(t) \leqslant \frac{2(p+1)}{p-1}Ce^{-\lambda t}, \quad 0 \leqslant t < \infty,\end{aligned}$$

由此得式 (2.14.23). □

推论 2.14.1 在定理 2.14.7 的条件下, 对于正常数 C 和 λ

$$\|u\|^2_{L^r(\Omega)} \leqslant Ce^{-\lambda t}, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

其中对于 $N \geqslant 5, 1 \leqslant r \leqslant \dfrac{2N}{N-4}$; 对于 $N = 4, 1 \leqslant r < \infty$ 和对于 $N \leqslant 3, 1 \leqslant r \leqslant \infty$. 特别地, 如果 $N \leqslant 3$, 则

$$\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leqslant Ce^{-\lambda t}, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2.14.32}$$

不等式 (2.14.32) 指出, 问题 (2.14.1)–(2.14.3) 描述波的振幅和振动, 当 $t \to \infty$ 时, 问题 (2.14.1)–(2.14.3) 的解以指数衰减为零.

2.14.5 例

下面给出满足假定 (H_1) 和 (H_2) 的非线性项 f 的一些明显的例子.

例 2.14.1 如果

$$f(u) = au^{2k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中 $a > 0, p = q = 2k + 1$ 满足 (H_1) 中的条件, 则 $f(u)$ 满足 (H_1).

例 2.14.2 如果

$$f(u) = u^{q_1+1},$$

其中 $p = q_1 + 1$ 满足 (H_2) 中的条件, 则 $f(u)$ 满足 (H_2).

2.14.6 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [344]. 与本节有关的文献见 [13], [90], [124], [132], [133], [135], [141], [345]–[360].

2.15 一类高阶非线性波动方程的时间周期问题

2.15.1 引言

本节讨论文献 [150], [151] 中在晶格动力学研究中提出的如下高阶非线性波动方程的时间周期问题

$$u_{tt} - u_{xx} - \mu u_{xxxx} - a_1 u_{xxtt} = a_2(u_x^2)_x, \quad 0 < x < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.15.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.15.2}$$

$$u(x, t+\omega) = u(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.15.3}$$

其中 $\mu > 0, a_1 > 0$ 和 $a_2 \neq 0$ 表示与平衡状态格点间距有关的物理常数, 以及 $\omega > 0$ 是常数. 未知函数 $u(x,t)$ 表示格点位移. 此外, 在非线性弹性杆应变孤立子波的研究中, 也提出了类似于 (2.15.1) 的方程 ($\mu = 0$)(见 [152], [153]).

下面借助于 [154] 的方法, 利用临界点理论, 证明问题 (2.15.1)–(2.15.3) 的任意周期为 $\omega > 0$ 的时间周期弱解的存在性.

2.15.2 预备知识

定义二重指标集 $N_0^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2) | \alpha_1 和 \alpha_2 都是非负整数\}$; 其子集

$$S = \{(1,0), (0,1), (2,0), (1,1)\}.$$

对 $\forall\alpha\in S$, 记 $\partial^\alpha u=\dfrac{\partial|\alpha|u}{\partial x^{\alpha_1}\partial t^{\alpha_2}}$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$. 如果 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ 是一个二重指标, 记

$$[\lambda]=\big\{(\lambda_1,0),(0,\lambda_2)\big\}\subset N_0^2.$$

定义

$$\bar{S}=\big\{\beta=(\beta_1,\beta_2)\in N_0^2|\ \text{存在}\alpha\in S,\text{使得}\ \beta_1\leqslant\alpha_1,\beta_2=\alpha_2\big\}=\big\{(0,0)\big\}\cup S.$$

定义 2.15.1

$$C_{0,\omega}^\infty\big((0,1)\times\mathbb{R}\big)=\big\{u\in C^\infty\big((0,1)\times\mathbb{R}\big)|u(\cdot,t)\in C_0^\infty(0,1),\forall t\in\mathbb{R};\\ u(x,t+\omega)=u(x,t),\forall x\in(0,1)\big\}.$$

$C_{0,\omega}^\infty(\Omega)$ 定义为所有满足 $\varphi\in C_{0,\omega}^\infty\big((0,1)\times(0,\omega)\big)$ 的函数集合, 即 $C_{0,\omega}^\infty\big((0,1)\times\mathbb{R}\big)$ 中的函数定义域限制在 $\Omega=(0,1)\times(0,\omega)$ 上的函数集合.

对于有限的二重指标集 S, 定义相应的双线性型为

$$A(u,v)=\int_0^\omega\int_0^1(u_tv_t-u_xv_x+\mu u_{xx}v_{xx}+a_1u_{xt}v_{xt})dxdt, \tag{2.15.4}$$

内积为

$$(u,v)_A=\int_0^\omega\int_0^1(u_tv_t+u_xv_x+u_{xx}v_{xx}+u_{xt}v_{xt}+uv)dxdt, \tag{2.15.5}$$

以及相应的范数为

$$\|u\|_A=\big(\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.15.6}$$

对于二重指标集 S, 定义各向异性的 Sobolev 空间 $H_0^S(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_A$ 意义下的闭包. 所谓"各向异性"是指对自变量 x 和 t 的偏导数阶数有所不同. $H_{0,\omega}^S(\Omega)$ 为 $C_{0,\omega}^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_A$ 意义下的闭包.

引理 2.15.1 (Poincaré 不等式 [154]) 设 $S\subset N_0^2,\beta=(\beta_1,\beta_2)\in\bar{S}$. 这里 S 和 $\bar{S}$ 是上面定义的. 则对于 $\forall u\in H_{0,\omega}^S(\Omega)$, 有 $\partial^\beta u\in L^2(\Omega)$; 并且对每个满足 $\beta_2\leqslant\alpha_2$ 的 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in S$, 存在着仅依赖于 Ω,α 的常数 $C>0$, 使得对于 $\forall u\in H_{0,\omega}^s(\Omega)$, 成立

$$\|\partial^\beta u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

引理 2.15.2 [155] 设 $\lambda,\gamma\in N_0^2, 2\leqslant q<\infty, q$ 是正整数,

$$\theta(\gamma,q,\lambda)=\frac{\gamma_1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{q}}{\lambda_1}+\frac{\gamma_2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{q}}{\lambda_2},$$

这里规定$\dfrac{0}{0}=1,\dfrac{c}{0}=\infty(c\neq 0)$. 若 $\theta\leqslant 1$, 则算子 $\partial^\gamma: H^{[\lambda]}(\Omega)\mapsto L^q(\Omega)$ 是连续的, 并且存在常数 $h_0>0,C_1>0$ 使得对任意 $h\in(0,h_0)$, 成立估计式

$$\|\partial^\gamma u\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C_1h^{1-\theta}\big(\|\partial_x^{\lambda_1}u\|_{L^2(\Omega)}+\|\partial_t^{\lambda_2}u\|_{L^2(\Omega)}\big)+C_1h^{-\theta}\|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.15.7}$$

引理 2.15.3 记 $\gamma=(0,1)\in N_0^2$, 则算子

$$\partial^\gamma: H_{0,\omega}^S(\Omega)\mapsto L^3(\Omega)$$

是紧的.

证明 取 $\lambda=(2,1)\in N_0^2$, $q=3$, 易知 $\theta(\gamma,q,\lambda)=\dfrac{3}{4}<1$. 由引理 2.15.2 知道, 对任意充分小的 $\varepsilon>0$, 存在常数 $C_\varepsilon>0$, 使得

$$\begin{aligned}\|u_x\|_{L^3(\Omega)}&\leqslant\varepsilon\big(\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}+\|u_t\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}\big)+C_\varepsilon\|u\|_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant\varepsilon\|u\|_A+C_\varepsilon\|u\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{2.15.8}$$

注意到

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\big(\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|u\|_A,$$

如果 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $H_{0,\omega}^S(\Omega)$ 中有界, 则此序列必在 $H^1(\Omega)$ 中有界. 由于 $H^1(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2$, 从而 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 中存在子序列, 仍记为 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, 在 $L^2(\Omega)$ 中是 Cauchy 序列. 由式 (2.15.8) 知, 对 $\forall m,n\in\mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}\|(u_m)_x-(u_n)_x\|_{L^3(\Omega)}&\leqslant\varepsilon\|u_m-u_n\|_A+C_\varepsilon\|u_m-u_n\|_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant 2\varepsilon M+C_\varepsilon\|u_m-u_n\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}\tag{2.15.9}$$

其中 $M>0$ 是常数. 在式 (2.15.9) 中先令 $m,n\to\infty$, 再令 $\varepsilon\to 0$, 取极限得

$$\|(u_m)_x-(u_n)_x\|_{L^3(\Omega)}\to 0,$$

这表明 $\{(u_n)_x\}_{n=1}^\infty$ 是 $L^3(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列. □

引理 2.15.4 [156] 假定 $f:\Omega\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 是 Carathéodory 函数, 即对几乎每个 $y\in\Omega, f(y,\cdot)$ 连续; 并且对每一个 $\xi\in\mathbb{R}, f(\cdot,\xi)$ 是可测的. 如果存在常数 $p_1,p_2\geqslant 1, a>0$ 以及函数 $b(y)\in L^{p_2}(\Omega)$, 使得

$$|f(y,\xi)|\leqslant b(y)+a|\xi|^{\frac{p_1}{p_2}},$$

则复合函数算子

$$F_0\big(u(y)\big)=f\big(y,u(y)\big):L^{p_1}(\Omega)\mapsto L^{p_2}(\Omega)$$

是连续且有界的.

引理 2.15.5 假定 $f(x,t,u(x,t)) = u^2$, 则 $f: L^3(\Omega) \mapsto L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ 是连续有界的算子.

证明 记 $y=(x,t)$. 易知 $f(y,u(y)) = u^2(y)$ 是 Carathéodory 函数. 取 $a=1$, $p_1=3, p_2=\dfrac{3}{2}$ 和 $b(y)\equiv 0$, 则成立着

$$|f(y,u(y))| \leqslant b(y) + a|u|^{\frac{p_1}{p_2}}.$$

根据引理 2.15.4, 算子 $f(y,u(y)): L^3 \mapsto L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ 是连续有界的. □

引理 2.15.6 双线性型 (2.15.4) 满足如下两个不等式:

(1)
$$A(u,v) \leqslant C_0\|u\|_A\|v\|_A, \quad \forall u,v\in H^S_{0,\omega}(\Omega), \tag{2.15.10}$$

其中 $C_0>0$ 是常数.

(2) 如果 $\mu>1$, 则

$$A(u,u) \geqslant K_0\|u\|_A^2, \quad \forall u \in H^S_{0,\omega}(\Omega), \tag{2.15.11}$$

其中 $K_0>0$ 是常数.

证明 利用 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned} A(u,v) &= \int_0^\omega\int_0^1 (u_tv_t - u_xv_x + \mu u_{xx}v_{xx} + a_1u_{xt}v_{xt})dxdt \\ &\leqslant (2+\mu+a_1)\|u\|_A\|v\|_A, \quad \forall u,v\in H^S_{0,\omega}(\Omega). \end{aligned}$$

利用引理 2.15.2 知

$$\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.15.12}$$

记 $\mu=\sum_{i=1}^3 \mu_i, \mu_i>0\ (i=1,2,3)$ 且 $\mu_1>1$, 则

$$\begin{aligned} A(u,u) &= \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} + a_1\|u_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + (\mu_1+\mu_2+\mu_3)\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} + a_1\|u_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + (\mu_1-1)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu_2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu_3\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} + a_1\|u_{xt}\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant K_0\|u\|^2_A, \quad \forall u\in H^2_{0,\omega}(\Omega), \end{aligned} \tag{2.15.13}$$

其中 $K_0=\min\{1,\mu_1-1,\mu_2,\mu_3,a_1\}>0$ 是常数. □

引理 2.15.7 (山路引理[157]) 设 $J: X\mapsto \mathbb{R}$ 是 Banach 空间 X 上的 C^1 泛函, 并且满足 Palais-Smale 条件, 进一步假定

(1) $J(0)=0$;

(2) 存在实数 $\gamma>0,\delta>0$ 使得, 当 $\|u\|_X=r$ 时, $J(u)\geqslant\delta$;

(3) 存在 $u_0\in X$, $\|u\|_X>r$ 满足 $J(u_0)<\delta$, 则

$$\beta=\inf_{h\in\Phi}\max_{t\in[0,1]}J(h(t))$$

是泛函 J 的一个临界值, 其中

$$\Phi=\{h|h:[0,1]\mapsto X\text{连续, 且 }h(0)=0,h(1)=u_0\}.$$

注 2.15.1 引理中所言 "J 满足 Palais-Smale 条件" 是指对每一个满足 (i) $|J(u_n)|\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}$(其中 $M>0$ 是常数) 和 (ii) $\lim_{n\to\infty}J'(u_n)=0$ 的 X 中的序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都存在着收敛子序列. 满足 (1) 及 (2) 的序列称为 Palais-Smale 序列.

2.15.3 问题 (2.5.1)–(2.5.3) 非平凡弱解的存在性

定义 2.15.2 如果 $u\in H^S_{0,\omega}(\Omega)$ 满足

$$A(u,v)=a_2\int_0^{\omega}\int_0^1u_x^2v_xdxdt,\quad\forall v\in H^S_{0,\omega}(\Omega),\tag{2.15.14}$$

则称 u 是问题 (2.5.1)–(2.5.3) 的弱解.

在 $H^S_{0,\omega}(\Omega)$ 中定义泛函 $J(u)$ 为

$$J(u)=\frac{1}{2}A(u,v)-\frac{1}{3}a_2\int_0^{\omega}\int_0^1u_x^3dxdt,\quad\forall u\in H^S_{0,\omega}(\Omega),\tag{2.15.15}$$

易知 J 是连续 Fréchet 可导的, 且它在 u 处的导数为

$$\langle J'(u),v\rangle=A(u,v)-a_2\int_0^{\omega}\int_0^1u_x^2v_xdxdt,\quad\forall v\in H^S_{0,\omega}(\Omega),\tag{2.15.16}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示对偶积.

为了寻找满足式 (2.15.14) 的弱解, 下面将寻找泛函 $J(u)$ 的临界点.

引理 2.15.8 式 (2.15.15) 定义的泛函满足 Palais-Smale 条件.

证明 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $H^S_{0,\omega}(\Omega)$ 泛函 J 的 Palais-Smale 序列, 则

$$\lim_{n\to\infty}J'(u_n)=0,$$

因而对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N_0(\varepsilon)$ 时,

$$\left|\left\langle J'(u_n),\frac{v}{\|v\|_A}\right\rangle\right|<\varepsilon,\quad\forall v\in H^s_{0,\omega}(\Omega)\tag{2.15.17}$$

成立.

由式 (2.15.16) 和式 (2.15.17) 得

$$\left|A(u_n,v)-a_2\int_0^\omega\int_0^1(u_n)_x^2v_xdxdt\right|\leqslant\varepsilon\|v\|_A. \tag{2.15.18}$$

在式 (2.15.18) 中, 令 $v=u_n$, $\varepsilon=1$, 则

$$a_2\int_0^\omega\int_0^1(u_n)_x^3dxdt\leqslant A(u_n,u_n)+\|u_n\|_A,\quad n>N_0(1). \tag{2.15.19}$$

注意到 $|J(u_n)|\leqslant M$, 由式 (2.15.19) 及式 (2.15.11), 得到

$$\begin{aligned}M\geqslant J(u_n)&=\frac{1}{2}A(u_n,u_n)-\frac{1}{3}a_2\int_0^\omega\int_0^1(u_n)_x^3dxdt\\&\geqslant\frac{1}{2}A(u_n,u_n)-\frac{1}{3}A(u_n,u_n)-\frac{1}{3}\|u_n\|_A\\&=\frac{1}{6}A(u_n,u_n)-\frac{1}{3}\|u_n\|_A\\&\geqslant\frac{1}{6}K_0\|u_n\|_A^2-\frac{1}{3}\|u_n\|_A,\end{aligned}$$

即

$$K_0\|u_n\|_A^2-2\|u_n\|_A-6M\leqslant 0. \tag{2.15.20}$$

这表明 $\|u_n\|_A$ 有界. 从而 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $H_{0,\omega}^S(\Omega)$ 中的有界序列. 由式 (2.15.18) 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 当 $n,m>N_0(\varepsilon)$ 时,

$$\begin{aligned}A(u_n-u_m,u_n-u_m)&\leqslant|A(u_n,u_n-u_m)|+|A(n_m,u_n-u_m)|\\&\leqslant 2\varepsilon\|u_n-u_m\|_A+\left|a_2\int_0^\omega\int_0^1(u_n)_x^2((u_n)_x-(u_m)_x)dxdt\right|\\&\quad+\left|a_2\int_0^\omega\int_0^1(u_m)_x^2((u_n)_x-(u_m)_x)dxdt\right|.\end{aligned} \tag{2.15.21}$$

注意到 $u_n,u_m\in H_{0,\omega}^S(\Omega)$, 利用引理 2.15.3, 有

$$(u_n)_x,(u_m)_x\in L^3(\Omega). \tag{2.15.22}$$

利用式 (2.15.22) 以及引理 2.15.5, 得到

$$(u_n)_x^2\in L^{\frac{3}{2}}(\Omega),\quad (u_m)_x^2\in L^{\frac{3}{2}}(\Omega). \tag{2.15.23}$$

由式 (2.15.21), 利用 Hölder 不等式以及式 (2.15.23), 得

$$\begin{aligned}A(u_n-u_m,u_n-u_m)\leqslant&\,2\varepsilon\|u_n-u_m\|_A+|a_2|(\|(u_n)_x^2\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\\&+\|(u_m)_x^2\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)})\|(u_n)_x-(u_m)_x\|_{L^3(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.15.24}$$

由于 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $H_{0,\omega}^S(\Omega)$ 中有界, 利用引理 2.15.3 知道, $\{(u_n)_x\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^3(\Omega)$ 中也是有界的. 因而由引理 2.15.5 知道, $\{(u_n)_x\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ 中有界. 这样, 存在常数 $K>0$, 使得

$$\|u_n-u_m\|_A \leqslant K, \quad \|(u_n)_x^2\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}+\|(u_m)_x^2\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leqslant K. \tag{2.15.25}$$

由式 (2.15.24) 和式 (2.15.25) 得

$$A(u_n-u_m,u_n-u_m) \leqslant 2\varepsilon K+|a_2|K\|(u_n)_x-(u_m)_x\|_{L^3(\Omega)}. \tag{2.15.26}$$

利用式 (2.15.21), 由式 (2.15.22) 得

$$K_0\|u_n-u_m\|_A^2 \leqslant 2\varepsilon K+|a_2|K\|(u_n)_x-(u_m)_x\|_{L^3(\Omega)}. \tag{2.15.27}$$

此外, 由引理 2.15.3 知道, $\{(u_n)_x\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^3(\Omega)$ 中包含有收敛子序列, 仍然记为 $\{(u_n)_x\}_{n=1}^{\infty}$. 因而在式 (2.15.27) 的右端先令 $n,m\to\infty$, 再令 $\varepsilon\to 0$, 取极限, 知道 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $H_{0,\omega}^S(\Omega)$ 中存在着 Cauchy 子序列. □

引理 2.15.9 由式 (2.15.15) 定义的泛函 $J(u)$ 在 $H_{0,\omega}^S(\Omega)$ 中存在非平凡临界点.

证明 根据引理 2.15.8, 只需证明 $J(u)$ 满足引理 2.15.7 的条件 (1)–(3). 显然 $J(0)=0$. 易知对 $\forall\varepsilon>0$, $\left|\frac{1}{3}a_2u_x^3\right| \leqslant \varepsilon|u_x|^2+\left|\frac{1}{3}a_2\right||u_x^3|$ 总成立. 因而

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}A(u,u)-\frac{1}{3}a_2\int_0^{\omega}\int_0^1 u_x^3dxdt \\ &\geqslant \frac{1}{2}A(u,u)-\varepsilon\int_0^{\omega}\int_0^1 u_x^2dxdt-\frac{1}{3}|a_2|\int_0^{\omega}\int_0^1|u_x^3|dxdt \\ &= \frac{1}{2}A(u,u)-\varepsilon\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{1}{3}|a_2|\|u_x\|_{L^3(\Omega)}^3. \end{aligned} \tag{2.15.28}$$

由引理 2.15.3 知, 存在常数 $K_1>0$, 使得

$$\|u_x\|_{L^3(\Omega)}^3 \leqslant K_1\|u\|_A^3. \tag{2.15.29}$$

利用 Hölder 不等式以及式 (2.15.29), 得

$$\|u_x\|^2 \leqslant \omega^{\frac{1}{3}}\|u_x\|_{L^3(\Omega)}^2 \leqslant \omega^{\frac{1}{3}}K_1^{\frac{2}{3}}\|u\|_A^2. \tag{2.15.30}$$

由式 (2.15.18)–(2.15.30), 存在常数 $K_1,K_2>0$, 使得

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}K_0\|u\|_A^2-\varepsilon K_2\|u\|_A^2-\frac{1}{3}|a_2|K_1\|u\|_A^3. \tag{2.15.31}$$

在式 (2.5.31) 中取 $\varepsilon = \dfrac{K_0}{4K_2} > 0$, 得

$$J(u) \geqslant \frac{1}{4}K_0\|u\|_A^2 - \frac{1}{3}|a_2||K_1|\|u\|_A^3 = \frac{1}{12}\|u\|_A^2(3K_0 - 4|a_2|K_1\|u\|_A). \tag{2.15.32}$$

取 $\gamma = \dfrac{3K_0}{8|a_2|K_1} > 0$, 则当 $\|u\|_A = \gamma$ 时, 由式 (2.15.32) 得

$$J(u) \geqslant \frac{1}{8}K_0\left(\frac{3K_0}{8|a_2|K_1}\right)^2 = \delta > 0.$$

因而 $J(u)$ 满足引理 2.15.7 的 (2).

根据 [58], 可以选择 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 满足

$$a_2\int_0^\omega\int_0^1 \varphi_x^3 dxdt = M_1 > 0. \tag{2.15.33}$$

对 $\forall l > 0$, 利用式 (2.15.10) 以及式 (2.15.33), 有

$$\begin{aligned} J(l\varphi) &= \frac{1}{2}A(l\varphi, l\varphi) - \frac{1}{3}a_2\int_0^\omega\int_0^1 l^3\varphi_x^3 dxdt = \frac{1}{2}A(l\varphi, l\varphi) - \frac{1}{3}l^3M_1 \\ &\leqslant \frac{1}{2}C_0l^2\|\varphi\|_A^2 - \frac{1}{3}l^3M_1 = \frac{1}{2}C_0l^2\left(\|\varphi\|_A^2 - \frac{2M_1l}{3C_0}\right). \end{aligned} \tag{2.15.34}$$

在式 (2.15.34) 中可取 l 充分大, 使得 $\|l\varphi\|_A > \gamma$, 且 $J(l\varphi) \leqslant 0 < \delta$. 因而 $J(u)$ 满足引理 2.15.7 中的 (3). 所以根据引理 2.15.7, 泛函 $J(u)$ 在 $H_{0,\omega}^S(\Omega)$ 中存在非平凡临界点. □

由引理 2.15.9 可知以下定理成立.

定理 2.15.1 如果 $\mu > 1$, 则问题 (2.5.1)–(2.5.3) 存在具有任意周期 $\omega > 0$ 的时间周期弱解.

2.15.4 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [158]. 与本节有关的文献见 [39], [58], [60], [65], [155]–[157], [159], [160].

第 3 章　非线性高阶双曲型方程的 Cauchy 问题

3.1　广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题

3.1.1　引言

2.1 节证明了一维广义 IMBq 方程初边值问题整体解的存在性与不存在性. 本节研究下列广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u = \Delta f(u), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \tag{3.1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.1.2}$$

其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, $f(s)$ 是给定的非线性函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初值函数. 在一定假设条件下, 我们证明 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解, 还给出 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 不存在整体解的充分条件.

3.1.2　Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 局部解的存在性与唯一性

现在, 我们将 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 应用二阶偏微分方程的基本解化为一积分方程. 利用压缩映射原理证明这个积分方程存在唯一局部广义解, 即 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 有唯一局部广义解.

设 $u(x,t) \in C^2([0,T]; W^{2,p} \cap L^\infty)$ 是 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解. 方程 (3.1.1) 可以改写为

$$[u_{tt} + u + f(u)] - \Delta[u_{tt} + u + f(u)] = u + f(u). \tag{3.1.3}$$

为了方便起见, 假定 $f(0) = 0$. 否则可以用 $f(u) - f(0)$ 代替 $f(u)$. 因此, 由引理 1.8.12 知, 如果 $f \in C^2(\mathbb{R})$, 则有 $f(u) \in W^{2,p}$.

由式 (3.1.3) 和二阶偏微分方程的基本解 $G(x)$, 得到

$$u_{tt} + u + f(u) = G * [u + f(u)]. \tag{3.1.4}$$

由式 (3.1.2) 和式 (3.1.4) 知, Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 与积分方程

$$u(x,t) = u_0(x)\cos t + u_1(x)\sin t - \int_0^t \sin(t-\tau) f(u(x,\tau))d\tau$$

$$+\int_0^t \sin(t-\tau)G*[u+f(u)](x,\tau)d\tau \tag{3.1.5}$$

等价.

定义 3.1.1 对于任意的 $T>0$, 如果 $u_0,u_1\in W^{2,p}\cap L^\infty$ 和 $u(x,t)\in C([0,T];W^{2,p}\cap L^\infty)$ 满足积分方程 (3.1.5), 其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为积分方程 (3.1.5) 的连续解, 或 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解. 如果 $T<\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的局部广义解. 如果 $T=\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的整体广义解.

下面应用压缩映射原理证明积分方程 (3.1.5) 存在唯一局部广义解. 为此, 定义函数空间

$$X(T)=C((0,T];W^{2,p}\cap L^\infty),$$

并赋予范数

$$\|u\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_{2,p}+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_\infty,\quad \forall u\in X(T).$$

易知 $X(t)$ 是一 Banach 空间.

首先定义一算子 $S:\ X(T)\mapsto X(T)$ 如下

$$Sv(x,t)=u_0(x)\cos t+u_1(x)\sin t-\int_0^t \sin(t-\tau)f(v(x,\tau))d\tau$$
$$+\int_0^t \sin(t-\tau)G*[v+f(v)](x,\tau)d\tau. \tag{3.1.6}$$

由引理 1.8.12 易知, 如果 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 则 S 是有定义的.

对于任意的初值 $u_0,u_1\in W^{2,p}\cap L^\infty$, 令 $M=\|u_0\|_{2,p}+\|u_1\|_{2,p}+\|u_0\|_\infty+\|u_1\|_\infty$. 定义集合

$$K(M,T)=\{v\mid v\in X(T),\|v\|_{X(T)}\leqslant M+1\}.$$

显然, 对于每一对 $M,T>0$, $K(M,T)$ 是 $X(T)$ 一不空有界闭凸子集. 我们的目的是证明 S 在 $K(M,T)$ 中有唯一不动点.

引理 3.1.1 设 $u_0,u_1\in W^{2,p}\cap L^\infty$ 和 $f(s)\in C^3(\mathbb{R})$, 则 S 映 $K(M,T)$ 到 $K(M,T)$ 和如果 T 相对于 M 适当小, $S:\ K(M,T)\mapsto K(M,T)$ 是严格压缩的.

证明 令 $v(x,t)\in K(M,T)$. 定义 $\overline{f}(\eta):[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$ 如下

$$\overline{f}(\eta)=\max_{|s|\leqslant\eta}\{|f'(s)|,|f''(s)|,|f'''(s)|\},\quad \forall\eta\geqslant 0.$$

注意到 $\overline{f}$ 在 $[0,\infty)$ 上连续且非减. 从引理 1.8.12 知

$$\|f(v)\|_{2,p}\leqslant\|f'(v)\|_\infty\|v\|_p+\|f'(v)\|_\infty\|Dv\|_p$$

$$+ C_0(\|f'(v)\|_\infty \|Dv\|_p + \|f''(v)\|_\infty \|v\|_\infty \|D^2 v\|_p)$$
$$\leqslant 2C_0 \overline{f}(M+1)(M+1)\|v\|_{2,p}. \tag{3.1.7}$$

利用 Young 不等式和引理 1.8.4 得

$$\|G*(v+f(v))\|_\infty \leqslant \|v+f(v)\|_\infty, \quad \|G*(v+f(v))\|_{2,p} \leqslant \|v+f(v)\|_{2,p}.$$

由式 (3.1.6) 和 Minkowski 积分不等式推出

$$\|Sv\|_\infty \leqslant \|u_0\|_\infty + \|u_1\|_\infty + \int_0^t \|v(\cdot,\tau)\|_\infty d\tau + 2\int_0^t \|f(v(\cdot,\tau))\|_\infty d\tau, \tag{3.1.8}$$

$$\|Sv\|_{2,p} \leqslant \|u_0\|_{2,p} + \|u_1\|_{2,p} + \int_0^t \|v(\cdot,\tau)\|_{2,p} d\tau + 2\int_0^t \|f(v(\cdot,\tau))\|_{2,p} d\tau. \tag{3.1.9}$$

因此, 由式 (3.1.6)–(3.1.9) 和引理 1.8.12 有

$$\|Sv\|_{X(T)} \leqslant M + (M+1)[1 + 4C_0(M+1)\overline{f}(M+1)]T.$$

如果 T 满足

$$T \leqslant \frac{1}{(M+1)[1+4C_0(M+1)\overline{f}(M+1)]}, \tag{3.1.10}$$

则 $\|Sv\|_{X(T)} \leqslant M+1$. 所以, 如果式 (3.1.10) 成立, 那么 S 映 $K(M,T)$ 到 $K(M,T)$.

现在证明算子 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 和给定 $v_1, v_2 \in K(M,T)$, 有

$$\begin{aligned} Sv_1 - Sv_2 = &- \int_0^t \sin(t-\tau)[f(v_1(x,\tau)) - f(v_2(x,\tau))]d\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^t \sin(t-\tau) G*[v_1 - v_2 + f(v_1) - f(v_2)](x,\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

利用中值定理得

$$\begin{aligned} &f(v_1) - f(v_2) = f'(v_2 + \theta_1(v_1 - v_2))(v_1 - v_2), \\ &D(f(v_1) - f(v_2)) = f''(v_2 + \theta_2(v_1 - v_2))(v_1 - v_2)Dv_1 + f'(v_2)(Dv_1 - Dv_2), \\ &D^2(f(v_1) - f(v_2)) = f'''(v_2 + \theta_3(v_1 - v_2))(v_1 - v_2)|Dv_1|^2 \\ &\qquad + f''(v_2)(Dv_1 - Dv_2)(Dv_1 + Dv_2) \\ &\qquad + f''(v_2 + \theta_4(v_1 - v_2))(v_1 - v_2)D^2 v_1 + f'(v_2)(D^2 v_1 - D^2 v_2), \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1,2,3,4)$. 因此, 利用 Hölder 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 插值定理, 可知

$$\|f(v_1) - f(v_2)\|_\infty \leqslant \overline{f}(M+1)\|v_1 - v_2\|_\infty, \tag{3.1.12}$$

$$\|f(v_1)-f(v_2)\|_p \leqslant \overline{f}(M+1)\|v_1-v_2\|_p, \tag{3.1.13}$$

$$\|D(f(v_1)-f(v_2))\|_p \leqslant \overline{f}(M+1)(M+1)\|v_1-v_2)\|_\infty+\overline{f}(M+1)\|D(v_1-v_2)\|_p, \tag{3.1.14}$$

$$\begin{aligned}
&\|D^2(f(v_1)-f(v_2))\|_p \\
\leqslant &\overline{f}(M+1)\|v_1-v_2\|_\infty\|D^2v_1\|_{2p}^2 \\
&+\overline{f}(M+1)\|D(v_1-v_2)\|_{2p}\|D(v_1+v_2)\|_{2p} \\
&+\overline{f}(M+1)\|v_1-v_2\|_\infty\|D^2v_1\|_p+\overline{f}(M+1)\|D^2(v_1-v_2)\|_p \\
\leqslant &C^2\overline{f}(M+1)\|v_1-v_2\|_\infty\|v_1\|_\infty\|D^2v_1\|_p+C^2\overline{f}(M+1)\|v_1 \\
&-v_2\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|D^2(v_1-v_2)\|_p^{\frac{1}{2}}\|v_1+v_2\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|D^2(v_1+v_2)\|_p^{\frac{1}{2}} \\
&+\overline{f}(M+1)(M+1)\|v_1-v_2\|_\infty+\overline{f}(M+1)\|D^2(v_1-v_2)\|_p \\
\leqslant &3C^2\overline{f}(M+1)(M+1)^2\|v_1-v_2\|_\infty+2C^2\overline{f}(M+1)\|D^2(v_1-v_2)\|_p,
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

其中 C 是 Gagliardo-Nirenberg 插值定理中的常数. 由式 (3.1.11)–(3.1.15), 利用 Minkowski 积分不等式, 引理 1.8.3 和 Young 不等式得

$$\begin{aligned}
\|Sv_1-Sv_2\|_{X(T)} \leqslant &\int_0^t\|v_1-v_2\|_\infty d\tau+\int_0^t\|v_1-v_2\|_{2,p}d\tau \\
&+2\int_0^t\|f(v_1)-f(v_2)\|_\infty d\tau+\int_0^t\|f(v_1)-f(v_2)\|_{2,p}d\tau \\
\leqslant &[1+C_1(M+1)^2\overline{f}(M+1)]T\|v_1-v_2\|_{X(T)},
\end{aligned}$$

其中 C_1 是一常数, 如果 T 满足

$$T \leqslant \frac{1}{2[1+C_1(M+1)^2\overline{f}(M+1)]} \tag{3.1.16}$$

和式 (3.1.10), 则 $\|Sv_1-Sv_2\|_{X(T)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_1-v_2\|_{X(T)}$. □

定理 3.1.1 设引理 3.1.1 的条件成立, 则 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 存在唯一局部广义解 $u(x,t)\in C([0,T_0);W^{2,p}\cap L^\infty)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 若

$$\sup_{t\in[0,T_0)}(\|u(\cdot,t)\|_{2,p}+\|u_t(\cdot,t)\|_{2,p}+\|u(\cdot,t)\|_\infty+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty)<\infty, \tag{3.1.17}$$

则 $T_0=\infty$.

证明 由引理 3.1.1 和压缩映射原理知, 对于适当选择的 $T>0$, S 有唯一的不动点 $u(x,t)\in K(M,T)$, 它是 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解. 易知对于每一个 $T'>0$, 积分方程 (3.1.5) 最多有一解属于 $X(T')$.

事实上, 令 $u_1(x,t), u_2(x,t) \in X(T')$ 是积分方程 (3.1.5) 的两个解, 则

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = -\int_0^t \sin(t-\tau)[f(u_1(x,\tau)) - f(u_2(x,\tau))]d\tau \\ + \int_0^t \sin(t-\tau)G*[u_1 - u_2 + f(u_1) - f(u_2)](x,\tau)d\tau. \quad (3.1.18)$$

根据空间 $X(T')$ 的定义, 有

$$\|u_1\|_\infty \leqslant C_1(T'), \quad \|u_2\| \leqslant C_1(T'),$$

其中 $C_1(T')$ 是一依赖于 T' 的常数. 因此, 由式 (3.1.18), 引理 1.8.12, Minkowski 积分不等式和引理 1.8.3 可知

$$\|u_1 - u_2\|_{2,p} \leqslant C_2(T') \int_0^t \|u_1 - u_2\|_{2,p} d\tau, \quad (3.1.19)$$

其中 $C_2(T')$ 是一依赖于 $C_1(T')$ 的常数. 由式 (3.1.19) 和 Gronwall 不等式推出 $\|u_1 - u_2\|_{2,p} = 0$, 即积分方程 (3.1.5) 最多有一解属于 $X(T')$.

现在, 令 $[0, T_0)$ 是解 $u \in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 余下只需指出, 如果式 (3.1.17) 成立, 则 $T_0 = \infty$.

设式 (3.1.17) 成立, 且 $T_0 < \infty$. 对于任意的 $T' \in [0, T_0)$, 考虑积分方程

$$v(x,t) = u(x,T')\cos t + u_t(x,T')\sin t - \int_0^t \sin(t-\tau)f(v(x,\tau))d\tau \\ + \int_0^t \sin(t-\tau)G*[v + f(v)](x,\tau)d\tau. \quad (3.1.20)$$

根据式 (3.1.17), $\|u(\cdot,T')\|_{2,p} + \|u_t(\cdot,T')\|_{2,p} + \|u(\cdot,T')\|_\infty + \|u_t(\cdot,T')\|_\infty$ 关于 $T' \in [0, T_0)$ 是一致有界的, 这就允许我们选择 $T^* \in (0, T_0)$, 使得对于每一个 $T' \in [0, T_0)$, 积分方程 (3.1.20) 有唯一解 $v \in X(T^*)$. 存在如此的 T^* 是由引理 3.1.1 和压缩映射原理得来的. 特别地, 式 (3.1.10) 和式 (3.1.16) 显示出 T^* 的选择与 $T' \in (0, T_0)$ 无关. 置 $T' = T_0 - \dfrac{T^*}{2}$, 令 $v(x,t)$ 表示对应于积分方程 (3.1.20) 的解和定义 $\tilde{u}(x,t)$ 如下

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \in [0, T'], \\ v(x, t-T'), & t \in \left[T', T_0 + \dfrac{T^*}{2}\right]. \end{cases} \quad (3.1.21)$$

根据构造可知, $\tilde{u}(x,t)$ 是积分方程 (3.1.5) 在 $\left[0, T_0 + \dfrac{T^*}{2}\right]$ 上的解, 又根据局部解的唯一性, $\tilde{u}(x,t)$ 是 $u(x,t)$ 的延拓. 这与 $[0, T_0)$ 是积分方程 (3.1.5) 的解存在的最大时间区间矛盾. 因此, 如果式 (3.1.17) 成立, 则 $T_0 = \infty$. □

注 3.1.1 如果 $u \in C([0,T_0);W^{2,p}\cap L^\infty)$ 是 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解, 由积分方程 (3.1.5) 和引理 1.8.12 知, $u \in C^2([0,T_0);W^{2,p}\cap L^\infty)$ 和方程 (3.1.4) 成立.

3.1.3 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 整体解的存在性与唯一性

在这一子节中, 证明 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解. 为此, 对于 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的局部广义解作一系列的估计.

引理 3.1.2 设 $f(u)\in C(\mathbb{R})$, $F(u)=\int_0^u f(s)ds$, $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1\in L^2$, $u_0,u_1\in L^2$, 且 $F(u_0)\in L^1$, 则 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解 $u(x,t)$ 有等式

$$E(t)=\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|u_t\|^2+\|u\|^2+2\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx=E(0), \tag{3.1.22}$$

其中 $(-\Delta)^{-\alpha}u(x)=\mathscr{F}^{-1}[|x|^{-2\alpha}\mathscr{F}u(x)]$.

证明 应用方程 (3.1.1), 直接计算得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t)&=2((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{tt},(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t)+2(u_{tt},u_t)+2(u,u_t)+2(f(u),u_t)\\&=2((-\Delta)^{-1}u_{tt},u_t)+2(u_{tt},u_t)+2(u,u_t)+2(f(u),u_t)\\&=2((-\Delta)^{-1}u_{tt}+u_{tt}+u+f(u),u_t)=0,\end{aligned}$$

上式对 t 积分知式 (3.1.22) 成立. □

引理 3.1.3 设引理 3.1.2 的条件成立, $F(u)\geqslant 0$, 且 $u_0,u_1\in L^\infty$. 若存在 ρ 满足

$$\begin{aligned}&1\leqslant\rho\leqslant\infty, && \text{当}N=1\text{时},\\&1<\rho\leqslant\infty, && \text{当}N=2\text{时},\\&\frac{N}{2}<\rho\leqslant\infty, && \text{当}N\geqslant 3\text{时},\end{aligned}\tag{3.1.23}$$

使得

$$|f(u)|\leqslant AF(u)^{\frac{1}{\rho}}|u|+B, \tag{3.1.24}$$

其中 A 和 B 是正常数, 则 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解有估计

$$\|u_t\|_\infty^2+\|u\|_\infty^2\leqslant M_1(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.1.25}$$

其中 $M_1(T)$ 是依赖于 T 的常数.

证明 方程 (3.1.4) 两端同乘以 u_t, 可见

$$\frac{d}{dt}[u_t^2+u^2+2F(u)]=2(G*u)u_t+2(G*f(u))u_t. \tag{3.1.26}$$

利用不等式 (3.1.24) 和 Young 不等式, 得

$$\begin{aligned}|G * f(u)| &\leqslant AG * (F(u)^{\frac{1}{\rho}}|u|) + B \\ &\leqslant A\|G\|_q \|F(u)^{\frac{1}{\rho}} u\|_\rho + B \\ &\leqslant A\|G\|_q \|u\|_\infty \|F(u)\|_1^{\frac{1}{\rho}} + B,\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

其中 $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{q} = 1$. 利用式 (3.1.23), 引理 1.8.3 和引理 3.1.2, 由式 (3.1.27) 有

$$\begin{aligned}&|G * f(u)| \leqslant C_1(T)\|u\|_\infty + B, \\ &|G * u| \leqslant \|u\|_\infty.\end{aligned}$$

这里和以后 $C_i(T)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 是依赖于 T 的常数. 将上面的不等式代入式 (3.1.26) 知

$$\frac{d}{dt}[u_t^2 + u^2 + 2F(u)] \leqslant C_2(T)\|u\|_\infty \|u_t\|_\infty + B\|u_t\|_\infty. \tag{3.1.28}$$

式 (3.1.28) 对 t 积分, 并利用 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}&\|u_t\|_\infty^2 + \|u\|_\infty^2 + 2\|F(u)\|_\infty \\ \leqslant &\|u_1\|_\infty^2 + \|u_0\|_\infty^2 + 2\|F(u_0)\|_\infty + C_3(T) \\ &+ C_4(T)\int_0^t [\|u_\tau(\tau)\|_\infty^2 + \|u(\tau)\|_\infty^2] d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

利用 Gronwall 不等式, 由式 (3.1.29) 可知式 (3.1.25) 成立. □

注 3.1.2　满足式 (3.1.24) 的函数 $f(u)$ 是存在的. 例如, 取 $f(u) = u^{2k+1}$ 和 $\rho = 1 + \dfrac{1}{k}$, 则如果对于 $N = 1, 2$, $0 \leqslant k < \infty$, 对于 $N = 3$, $0 \leqslant k < 2$, $f(u)$ 满足不等式 (3.1.24). 显然, 当 $k = 1$, $\rho = 2$ 和 $1 \leqslant N \leqslant 3$ 时, 方程

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} = \Delta(u^3)$$

的非线性项 u^3 满足式 (3.1.24).

引理 3.1.4　设引理 3.1.3 的条件成立, $f \in C^3(\mathbb{R})$ 和 $u_0, u_1 \in W^{2,p}$, 则 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解 $u(x,t)$ 有估计

$$\|u\|_{2,p} \leqslant M_2(T), \quad 0 \leqslant t < T, \tag{3.1.30}$$

$$\|u_t\|_{2,p} \leqslant M_3(T), \quad 0 \leqslant t < T, \tag{3.1.31}$$

其中 $M_2(T)$ 和 $M_3(T)$ 是依赖于 T 的常数.

证明 由积分方程 (3.1.5), 引理 3.1.3, 引理 1.8.12, Minkowski 积分不等式和引理 1.8.3, 利用 Young 不等式有

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,p} &\leqslant \|u_0\|_{2,p} + \|u_1\|_{2,p} + \int_0^t \|f(u)\|_{2,p} d\tau + \int_0^t \|G * [u + f(u)]\|_{2,p} d\tau \\ &\leqslant \|u_0\|_{2,p} + \|u_1\|_{2,p} + \int_0^t \|u\|_{2,p} d\tau + 2\int_0^t \|f(u)\|_{2,p} d\tau \\ &\leqslant \|u_0\|_{2,p} + \|u_1\|_{2,p} + C_5(T)\int_0^t \|u(\tau)\|_{2,p} d\tau.\end{aligned}$$

应用 Gronwall 不等式可得式 (3.1.30).

方程 (3.1.4) 对 t 积分, 有

$$u_t = u_1(x) - \int_0^t (u + f(u)) d\tau + \int_0^t G * (u + f(u)) d\tau.$$

利用式 (3.1.30), 引理 3.1.3, Minkowski 积分不等式和引理 1.8.3, 由上式可得

$$\|u_t\|_{2,p} \leqslant \|u_1\|_{2,p} + 2\int_0^t (\|u\|_{2,p} + \|f(u)\|_{2,p}) d\tau \leqslant M_3(T),$$

即式 (3.1.31) 成立. □

定理 3.1.2 设 $u_0(x), u_1(x) \in W^{2,p} \cap L^2 \cap L^\infty$, $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_1 \in L^2$, $F(u_0) \in L^1$, 且 $f \in C^3(\mathbb{R})$ 满足条件 (3.1.23), (3.1.24), 则 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 有唯一整体广义解 $u(x,t) \in C^3([0,\infty); W^{2,p} \cap L^2 \cap L^\infty)$ 和 $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_t \in L^2$.

证明 根据定理 3.1.1, 注 3.1.1 和引理 3.1.2–引理 3.1.4 知, Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 有唯一整体广义解 $u \in C^2([0,\infty); W^{2,p} \cap L^2 \cap L^\infty)$ 和 $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_t \in L^2$.

方程 (3.1.4) 对 t 求导, 有

$$u_{ttt} = -u_t - f'(u) u_t + G * [u_t + f'(u) u_t]. \tag{3.1.32}$$

由引理 1.8.12 和引理 1.8.3 可知 $u_{ttt} \in C([0,\infty); W^{2,p} \cap L^2 \cap L^\infty)$. 所以 $u(x,t) \in C^3([0,\infty); W^{2,p} \cap L^2 \cap L^\infty)$.

为了证明 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 整体古典解的存在性, 我们首先研究 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的整体广义解的正则性.

引理 3.1.5 设定理 3.1.2 的条件成立, $u_0(x), u_1(x) \in W^{k+2,p}$ 和 $f \in C^{k+m+3}(\mathbb{R})$, 其中 $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ 是任意整数, 则 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解 $u(x,t)$ 属于 $C^{m+3}([0,T]; W^{k+2,p} \cap L^2 \cap L^\infty)$ $(\forall T > 0)$.

证明 此引理应用归纳法证明. 当 $m = 0$ 时, 利用引理 1.8.12, Minkowski 积分不等式, 引理 1.8.3, 定理 3.1.2 和 Young 不等式得

$$\|u\|_{k+2,p} \leqslant \|u_0\|_{k+2,p} + \|u_1\|_{k+2,p} + \int_0^t \|u\|_{k+2,p} d\tau + 2\int_0^t \|f(u)\|_{k+2,p} d\tau$$

$$\leqslant \|u_0\|_{k+2,p} + \|u_1\|_{k+2,p} + C_6(T)\int_0^t \|u\|_{k+2,p} d\tau.$$

Gronwall 不等式给出

$$\|u\|_{k+2,p} \leqslant M_4(T), \tag{3.1.33}$$

其中 $M_4(T)$ 是不依赖于 T 的常数. 因此 $u \in C([0,T];W^{k+2,p})$. 利用证明定理 3.2.2 的同样方法, 可得 $u \in C^3([0,T];W^{k+2,p}\cap L^2\cap L^\infty)$.

现在假定当 $0 \leqslant m < s$ 时, 有

$$u \in C^{m+3}([0,T];W^{k+2,p}\cap L^2\cap L^\infty).$$

式 (3.1.32) 对 t 求导 s 次, 利用归纳法假定和引理 1.8.3 知

$$u \in C^{s+3}([0,T];W^{k+2,p}\cap L^2\cap L^\infty). \qquad \square$$

由 Sobolev 嵌入定理和引理 3.1.5 推出如下定理.

定理 3.1.3 设引理 3.1.5 的条件成立, 且 $m=0$, $k>\dfrac{N}{p}$, 则 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 存在唯一整体古典解 $u(x,t) \in C^3([0,\infty);W^{k+2,p}\cap L^2\cap L^\infty)$, 即 $u(x,t) \in C^3([0,\infty);C^2(\mathbb{R}^N)\cap L^2\cap L^\infty)$.

3.1.4 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 整体解的不存在性

下面考虑 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 整体解的不存在性.

定理 3.1.4 设存在一常数 $\alpha > 0$, 使得

$$f(u)u \leqslant 2(2\alpha+1)F(u) + 2\alpha u^2, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{3.1.34}$$

且 $u_0(x)$, $u_1(x)$ 选得使它们满足下列条件:

(1) $u_0, u_1 \in L^2$, $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_0, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1 \in L^2$ 和 $F(u_0) \in L^1$;

(2) $E(0) = \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1\|^2 + \|u_1\|^2 + \|u_0\|^2 + 2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u_0)dx < 0$,

则 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解 $u(x,t)$ 在有限时刻发生爆破.

证明 设 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 解存在的最大时间区间是无穷的. 令

$$\phi(t) = \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\|^2 + \|u\|^2 + \beta_0(t+t_0)^2, \tag{3.1.35}$$

其中 β_0 和 t_0 是待定的非负常数, 于是

$$\dot\phi(t) = 2((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u) + 2(u_t,u) + 2\beta_0(t+t_0).$$

应用 Hölder 不等式, 有

$$\dot\phi(t)^2 \leqslant 4\phi(t)[\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0]. \tag{3.1.36}$$

根据方程 (3.1.1) 和等式 (3.1.22) 得

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}(t) =& 2((-\Delta)^{-1}u_{tt}, u) + \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + 2(u_{tt}, u) + 2\|u_t\|^2 + 2\beta_0 \\ =& 4(1+\alpha)\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + 4(1+\alpha)\|u_t\|^2 + 2\beta_0 - (2+4\alpha)E(0) \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^N}[2(1+2\alpha)F(u) + 2\alpha u^2 - uf(u)]dx. \end{aligned} \tag{3.1.37}$$

由式 (3.1.34)-(3.1.37) 推出

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t) - (1+\alpha)\dot{\phi}(t)^2 \geqslant -2(2\alpha+1)(E(0)+\beta_0)\phi(t). \tag{3.1.38}$$

因为根据 (2) $E(0) < 0$, 取 $\beta_0 = -E(0) > 0$, 得 $\phi(t)\ddot{\phi}(t) - (1+\alpha)\dot{\phi}(t)^2 \geqslant 0$. 如果 t_0 充分大, 还有 $\dot{\phi}(0) > 0$. 由引理 1.8.7 知, 存在 $T_1 \leqslant T_0 = \dfrac{\phi(0)}{\alpha\dot{\phi}(0)} < \infty$, 使得 $\lim_{t\to t_1^-}\phi(t) = \infty$. 因此, 这与 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 解存在的最大时间区间为无穷的事实矛盾. □

定理 3.1.5 设不等式 (3.1.34) 成立, 且 $u_0(x)$, $u_1(x)$ 选得使它们满足下列条件:

(1) $u_0, u_1 \in L^2$, $(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_0, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1 \in L^2$, $F(u_0) \in L^1$;

(2) $E(0) \geqslant 0$, $((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_0) + (u_1, u_0) > \sqrt{E(0)[\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_0\|^2 + \|u_0\|^2]}$,

则 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 的广义解 $u(x,t)$ 在有限时刻发生爆破.

证明 设 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 解存在的最大时间区间是无穷的. 令

$$\phi(t) = \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\|^2 + \|u\|^2. \tag{3.1.39}$$

类似定理 3.1.4 的证明, 可得

$$\phi(t)\ddot{\phi} - (1+\alpha)\dot{\phi}(t)^2 \geqslant -2(2\alpha+1)E(0)\phi(t), \tag{3.1.40}$$

若 $E(0) = 0$, 则有

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t) - (\alpha+1)\dot{\phi}(t)^2 \geqslant 0.$$

由假定 (2) 知 $\dot{\phi}(0) > 0$. 由引理 1.8.7 知, 存在 $T_1 \leqslant T_0 = \dfrac{\phi(0)}{\alpha\dot{\phi}(0)} < \infty$, 使得 $\lim_{t\to T_1^-}\phi(t) = \infty$.

若 $E(0) > 0$, 定义 $J(t) = \phi^{-\alpha}(t)$, 则

$$\begin{aligned}&\dot{J}(t) = -\alpha\phi^{-\alpha-1}(t)\dot{\phi}(t), \\ &\ddot{J}(t) = -\alpha\phi^{-\alpha-2}(t)\left[\phi(t)\ddot{\phi}(t) - (1+\alpha)(\dot{\phi}(t))^2\right] \leqslant 2\alpha(2\alpha+1)E(0)\phi^{-\alpha-1}(t). \end{aligned} \tag{3.1.41}$$

根据假定 (2), 有 $\dot{J}(0)<0$. 令

$$t^*=\sup\{t\mid \dot{J}(\tau)<0,\ \tau\in[0,t)\}. \tag{3.1.42}$$

因为 $\dot{J}(t)$ 的连续性, t^* 是正的. 式 (3.1.41) 两端乘以 $2\dot{J}(t)$ 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\dot{J}(t)^2]\geqslant&-4\alpha^2(2\alpha+1)E(0)\phi^{-2\alpha-2}(t)\dot{\phi}(t)\\ =&4\alpha^2E(0)\frac{d}{dt}[\phi^{-2\alpha-1}(t)],\quad \forall t\in[0,t^*).\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

在 $[0,t)$ 上对式 (3.1.43) 积分, 有

$$\dot{J}(t)^2\geqslant 4\alpha^2E(0)\phi^{-2\alpha-1}(t)+\dot{J}(0)^2-4\alpha^2E(0)\phi^{-2\alpha-1}(0).$$

由假定 (2) 知

$$\dot{J}(0)^2-4\alpha^2E(0)\phi^{-2\alpha-1}(0)>0.$$

所以根据 $\dot{J}(t)$ 的连续性, 对于 $0\leqslant t<t^*$, 可见

$$\dot{J}(t)\leqslant-\left[\dot{J}(0)^2-4\alpha^2E(0)\phi^{-2\alpha-1}(0)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.44}$$

由 t^* 的定义推出对于所有的 $t\geqslant 0$, 式 (3.1.44) 成立, 因此

$$J(t)\leqslant J(0)-\left[\dot{J}(0)^2-4\alpha^2E(0)\phi^{-2\alpha-1}(0)\right]^{\frac{1}{2}}t,\quad \forall t>0.$$

所以对于某一个 T_1 和 $0<T_1\leqslant T_0=\dfrac{J(0)}{[\dot{J}(0)^2-4\alpha^2E(0)\phi^{-2\alpha-1}(0)]^{\frac{1}{2}}}$, $J(T_1)=0$. 于是在 T_1, $\phi(t)$ 变为无穷.

因此, 在条件 (1) 和 (2) 下, $\phi(t)$ 在 T_1 总变为无穷大, 这与 Cauchy 问题 (3.1.1), (3.1.2) 解存在的最大时间区间为无穷的事实矛盾. □

注 3.1.3　(i) 设 $f(u)=au^k$, 其中 $k>1$ 是一奇整数和 $a<0$, $N=1$, 则显然可验证 (u_0,u_1) 由

$$u_0=\lambda\frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2}\quad 和\quad u_1=\lambda\frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2}$$

给定, 对于适当大的 $\lambda>0$, 它们满足定理 3.1.4 或定理 3.1.5 的条件.

(ii) 设 $f(u)=au^k$, 其中 $k>1$ 是一偶整数和 $a\neq 0$, $N=1$. 如果 (u_0,u_1) 由

$$u_0=\lambda\frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2}\quad 和\quad u_1=\lambda\frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2}$$

给定, 其中 $a\lambda<0$, 则对于适当大的 $|\lambda|>0$, 它们满足定理 3.1.4 或定理 3.1.5 的条件.

3.1.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [161]. 与本节内容有关的文献见 [32], [33], [35], [36], [38], [39], [43], [53], [58], [60], [69], [162]–[170].

3.2 一类 N 维非线性波动方程的 Cauchy 问题

3.2.1 引言

在文献 [171] 中作者用解析的方法和数值的方法研究了模拟立体的离散系统在Padé近似和它们的有效性基础上得到的连续模型. 连续模型具有下列形式

$$v_{tt} - \alpha v_{xxtt} - v_{xx} = g(v) + F(v), \tag{3.2.1}$$

其中 $F(v) = -\alpha[g''(v)v_x^2 + g'(v)v_{xx}]$, 而 $g(s)$ 是给定的非线性函数, $\alpha = \dfrac{h^2}{12}$ 是晶格的间距. 事实上, 他们研究的一般模型是

$$v_{n,tt} = \Delta_2 v_n + F(v_n), \tag{3.2.2}$$

其中 n 表示晶格的位置和$\Delta_2 v_n = \dfrac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{h^2}$. 这个情况对应一个分量的 (离散的) 非线性 Klein-Gorden 方程组. 利用 Padé 方法他们得到最一般的形式 (3.2.1). 在 [171] 中作者利用数值方法解方程 (3.2.1), 并与原始离散问题 (3.2.2) 比较了结果. 但是在 [171] 中对于方程 (3.2.1) 的定解问题没有作任何讨论.

本节研究下列非线性波动方程的 Cauchy 问题

$$v_{tt} - \alpha\Delta v_{tt} - \Delta v = g(v) - \alpha\Delta g(v), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{3.2.3}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.2.4}$$

其中 $v(x,t)$ 是未知函数, $\alpha > 0$ 是常数, $g(s)$ 是给定的非线性函数, $v_0(x)$ 和 $v_1(x)$ 是给定的初值函数.

显然, 当 $N = 1$ 时, 方程 (3.2.3) 变成方程 (3.2.1).

下面将证明 Cauchy 问题(3.2.3), (3.2.4) 在 $C^2([0,\infty); H^s)$ 中存在唯一整体广义解 v, 其中 $s > \dfrac{N}{2}$ 和当$s > 2 + \dfrac{N}{2}$ 时, Cauchy 问题 (3.2.3), (3.2.4) 在 $C^2([0,\infty); H^s)$ 中存在唯一整体古典解 v, 即 $v \in C^2([0,\infty); C_B^2(\mathbb{R}^N))$. 当 $m \geqslant 0$ 时, 将证明Cauchy 问题 (3.2.3), (3.2.4) 在 $C^3([0,\infty); W^{m,p} \cap L^\infty)$ 中有唯一整体广义解 v, 当 $m > 2 + \dfrac{N}{p}$ 时, 将证明 Cauchy 问题 (3.2.3), (3.2.4) 在 $C^3([0,\infty); W^{m,p} \cap L^\infty)$ 中有唯一整体古典解 v, 即 $v \in C^3([0,\infty); C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty)$.

3.2.2 Cauchy 问题 (3.2.3), (3.2.4) 在 $C^2([0,\infty);H^s)$ 中的整体解

为了讨论方便起见, 作尺度变换

$$v(x,t)=u\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x,t\right), \tag{3.2.5}$$

Cauchy 问题 (3.2.3), (3.2.4) 变为下列 Cauchy 问题

$$u_{tt}-\Delta u_{tt}-\frac{1}{\alpha}\Delta u=g(u)-\Delta g(u),\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0, \tag{3.2.6}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{3.2.7}$$

其中 $u_0(x)=v_0(\sqrt{\alpha}x)$ 和 $u_1(x)=v_1(\sqrt{\alpha}x)$. 这里只研究 Cauchy 问题 (3.2.6), (3.2.7) 整体广义解和整体古典解的存在性和唯一性, 因为 Cauchy 问题 (3.2.6), (3.2.7) 通过尺度变换 (3.2.5) 可以得到 Cauchy 问题 (3.2.3), (3.2.4) 的结果.

1. Cauchy 问题 (3.2.6), (3.2.7) 的局部广义解的存在性和唯一性

现在通过二阶偏微分方程的基本解 $G(x)$(见引理 1.8.3) 将问题 (3.2.6), (3.2.7) 化为一积分方程.

为了应用压缩映射原理证明问题 (3.2.6), (3.2.7) 局部解的存在性和唯一性, 将方程 (3.2.6) 写为

$$\left[u_{tt}+\frac{1}{\alpha}u-g(u)\right]-\Delta\left[u_{tt}+\frac{1}{\alpha}u-g(u)\right]=\frac{1}{\alpha}u. \tag{3.2.8}$$

方程 (3.2.8) 可以形式地改写为

$$u_{tt}+\frac{1}{\alpha}u-g(u)=(I-\Delta)^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}u\right)=G*\left(\frac{1}{\alpha}u\right). \tag{3.2.9}$$

式 (3.2.9) 对 t 积分两次, 并注意到初值条件 (3.2.7), Cauchy 问题 (3.2.6), (3.2.7) 形式地变为积分方程

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\,u_0(x)+u_1(x)t-\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)g(u(x,\tau))d\tau+\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t-\tau)[G*u](x,\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

定义 3.2.1　对于任意的 $T>0$, 若 $s>\dfrac{N}{2}, u_0,u_1\in H^s$ 和 $u\in C([0,T];H^s)$ 满足积分方程 (3.2.10), 则 $u(x,t)$ 称为积分方程 (3.2.10) 的连续解或问题 (3.2.6), (3.2.7) 的广义解. 若 $T<\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为问题 (3.2.6), (3.2.7) 的局部广义解. 若 $T=\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为问题 (3.2.6), (3.2.7) 的整体广义解.

现在, 我们假定 $g(0)=0$, 否则可以用 $g(u)-g(0)$ 替代 $g(u)$. 对于 $s>\dfrac{N}{2}$ 和 $u_0,u_1\in H^s$, 我们考虑 Banach 空间

$$X(T)=\{u|u\in C([0,T];H^s)\},$$

并赋予范数

$$\|u\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{H^s},\quad \forall u\in X(T).$$

由 Sobolev 嵌入定理知

$$u\in C([0,T];L^\infty),\quad \forall u\in X(T)$$

和 $\|u\|_\infty\leqslant C_3\|u\|_{H^s}$.

定义映射 S 如下

$$\begin{aligned}Sv(x,t)=&u_0(x)+u_1(x)t-\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t-\tau)v(x,\tau)d\tau+\int_0^t(t-\tau)g(v(x,\tau))d\tau\\&+\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t-\tau)[G*v](x,\tau)d\tau,\quad \forall v\in X(T).\end{aligned}\tag{3.2.11}$$

显然, 若 $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, 则 $S:X(T)\mapsto X(T)$.

下面对于任意初值 $u_0,u_1\in H^s$, 令 $\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^s}=M$, 定义

$$Q(M,T)=\{u|u\in X(T),\|u\|_{X(T)}\leqslant M+1\}.$$

显然, 对于每一对 $M,T>0$, $Q(M,T)$ 是 $X(T)$ 的一不空有界闭凸子集. 我们的目的是证明 S 在 $Q(M,T)$ 中有唯一不动点.

引理 3.2.1 设$s>\dfrac{N}{2},u_0,u_1\in H^s,g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $g(0)=0$, 则 S 映 $Q(M,T)$ 到 $Q(M,T)$ 和若 T 相对于 M 适当小, $S:Q(M,T)\mapsto Q(M,T)$ 是严格压缩的.

证明 首先证明对于足够小的 T, S 映 $Q(M,T)$ 到自身. 令 $v\in Q(M,T)$ 给定. 由引理 1.8.13 得到

$$\|g(v(\cdot,t))\|_{H^s}\leqslant C_1(C_3M+C_3)\|v(\cdot,t)\|_{H^s},\tag{3.2.12}$$

其中 $C_1(C_3M+C_3)$ 是 C_1 依赖于 C_3M+C_3 的常数, 且 C_1 出现在引理 1.8.13 中.

因此由 (3.2.11), (3.2.12), 引理 1.8.3, 引理 1.8.13 和 Minkowski 积分不等式推出

$$\|Sv(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\|u_0\|_{H^s}+T\|u_1\|_{H^s}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_{H^s}+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|g(v(\cdot,t))\|_{H^s}\right.$$

$$+\frac{1}{\alpha}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|G*v\|_{H^s}\Big]T^2$$
$$\leqslant M+MT+\frac{1}{2}(M+1)\left[\frac{2}{\alpha}+C_1(C_3M+C_3)\right]T^2. \tag{3.2.13}$$

若 T 满足

$$T\leqslant\min\left\{1,\frac{1}{M+\frac{1}{2}(M+1)\left[\frac{2}{\alpha}+C_1(C_3M+C_3)\right]}\right\}, \tag{3.2.14}$$

则 $\|Sv\|_{X(T)}\leqslant M+1$, 即 $S:Q(M,T)\mapsto Q(M,T)$.

现在证明 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 和 $v_1,v_2\in Q(M,T)$ 给定, 则有

$$\begin{aligned}Sv_1(x,t)-Sv_2(x,t)=&-\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t-\tau)[v_1(x,\tau)-v_2(x,\tau)]d\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)[g(v_1(x,\tau))-g(v_2(x,\tau))]d\tau\\&+\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t-\tau)[G*(v_1-v_2)](x,\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

利用 Minkowski 积分不等式, 得

$$\begin{aligned}\|Sv_1(\cdot,t)-Sv_2(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant&\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t-\tau)\|v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)\|g(v_1(\cdot,\tau))-g(v_2(\cdot,\tau))\|_{H^s}d\tau\\&+\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t-\tau)\|G*(v_1-v_2)(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau.\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

由引理 1.8.14 断定

$$\|g(v_1(\cdot,t))-g(v_2(\cdot,t))\|_{H^s}\leqslant C_2(C_3M+C_3)\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{H^s}. \tag{3.2.17}$$

引理 1.8.3 给出

$$\|G*(v_1-v_2)(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{H^s}. \tag{3.2.18}$$

将式 (3.2.17) 和式 (3.2.18) 代入式 (3.2.16), 可知

$$\begin{aligned}&\|Sv_1-Sv_2\|_{X(T)}\\&\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\alpha}+C_2(C_3M+C_3)\right]T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{H^s}.\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

若 T 满足

$$T \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{M+\frac{1}{2}(M+1)\left[\frac{2}{\alpha}+C_1(C_3M+C_3)\right]}, \frac{1}{\frac{2}{\alpha}+C_2(C_3M+C_3)}\right\}, \tag{3.2.20}$$

则 $\|Sv_1 - Sv_2\|_{X(T)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{X(T)}$. 这意味着 S 映 $Q(M,T)$ 到 $Q(M,T)$, 且 S 是严格压缩的. □

定理 3.2.1 设 $s > \frac{N}{2}, u_0, u_1 \in H^s, g \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ 和 $g(0) = 0$. 于是问题 (3.2.6), (3.2.7) 存在唯一局部广义解 $u \in C^2([0, T_0); H^s)$, 其中 $[0, T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 若

$$\lim_{t\to T_0} \sup(\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}) < \infty, \tag{3.2.21}$$

则 $T_0 = \infty$.

证明 由引理 3.2.1 和压缩映射原理推出, 对适当选取的 $T > 0$, S 有唯一不动点 $u \in Q(M,T)$, 显然它是积分方程 (3.2.10) 的一个解. 对于每一 $T' > 0$, 积分方程 (3.2.10) 最多有一解属于 $X(T')$. 事实上, 令 $u_1, u_2 \in X(T')$ 是积分方程 (3.2.10) 的两个解, 则

$$\begin{aligned} u_1(x,t) - u_2(x,t) = &-\frac{1}{\alpha}\int_0^t (t-\tau)[u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]d\tau \\ &+ \int_0^t (t-\tau)[g(u_1(x,\tau)) - g(u_2(x,\tau))]d\tau \\ &+ \frac{1}{\alpha}\int_0^t (t-\tau)[G*(u_1-u_2)](x,\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

应用引理 3.2.1 的方法, 由式 (3.2.22) 可得

$$\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant K\int_0^t \|u_1(\cdot,\tau) - u_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau,$$

其中常数 K 是依赖于 $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_1(\cdot,t)\|_\infty$ 和 $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_2(\cdot,t)\|_\infty$ 的常数. Gronwall 不等式给出 $\|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\|_{H^s} = 0$, 即积分方程 (3.2.10) 最多有一解属于 $X(T')$.

令 $[0, T_0)$ 是解 $u \in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 余下证明如果式 (3.2.21) 成立, 则 $T_0 = \infty$.

设式 (3.2.21) 成立, 且 $T_0 < \infty$. 对于任意 $T' \in [0, T_0)$, 考虑积分方程

$$v(x,t) = u(x,T') + u_t(x,T')t - \frac{1}{\alpha}\int_0^t (t-\tau)v(x,\tau)d\tau$$

$$+\int_0^t (t-\tau)g(v(x,\tau))d\tau+\frac{1}{\alpha}\int_0^t (t-\tau)[G*v](x,\tau)d\tau. \qquad (3.2.23)$$

根据式 (3.2.23), $\|u(\cdot,T')\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,T')\|_{H^s}$ 关于 $T'\in[0,T_0)$ 是一致有界的, 这就允许我们选择 $T^*\in(0,T_0)$, 使得对于每一 $T'\in[0,T_0)$, 积分方程 (3.2.23) 有唯一解 $v\in X(T^*)$. 如此 T^* 的存在性是由引理 3.2.1 和压缩映射原理得到的. 特别地, 式 (3.2.20) 揭示 T^* 的选择不依赖于 $T'\in[0,T_0)$. 置 $T'=T_0-\dfrac{T^*}{2}$, 令 $v(x,t)$ 表示积分方程 (3.2.23) 对应的解, 由

$$\bar{u}(x,t)=\begin{cases} u(x,t), & t\in[0,T'],\\ v(x,t-T'), & t\in\left[T',T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]\end{cases} \qquad (3.2.24)$$

定义 $\bar{u}(x,t)$. 根据构造, $\bar{u}(x,t)$ 是积分方程 (3.2.10) 在 $\left[0,T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]$ 上的解, 且根据局部解的唯一性, $\bar{u}(x,t)$ 是 $u(x,t)$ 的延拓. 这与 $[0,T_0)$ 是最大时间区间矛盾. 因此, 式 (3.2.21) 成立, 则 $T_0=\infty$. 式 (3.2.10) 对 t 求导, 得 $u\in C^2([0,T_0);H^s)$. □

3.2.3 问题 (3.2.6), (3.2.7) 整体古典解的存在性和唯一性

定理 3.2.2 设下列条件成立:

(1) $s>\dfrac{N}{2}, u_0,u_1\in H^s$;

(2) $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), g(0)=0,\ \tilde{G}(z)=\displaystyle\int_0^z g(y)dy\leqslant 0$ 和 $\tilde{G}(u_0)\in L^\infty$ 或 $g'(z)\leqslant A_0$, $\forall z\in\mathbb{R}$, 其中 A_0 是一常数,

则 Cauchy 问题 (3.2.6), (3.2.7) 存在唯一整体广义解 $u\in C^2([0,\infty);H^s)$.

证明 根据定理 3.2.1 仅需证明条件 (3.2.21) 成立. 式 (3.2.9) 两端乘以 $u_t(x,t)$, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{u_t^2(x,t)+\frac{1}{\alpha}u^2(x,t)-2\tilde{G}(u(x,t))\right\}=G*\left(\frac{1}{\alpha}u\right)(x,t)u_t(x,t). \qquad (3.2.25)$$

利用 Young 不等式导出

$$2G*\left(\frac{1}{\alpha}u\right)(x,t)u_t(x,t)\leqslant\frac{1}{\alpha}(\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2). \qquad (3.2.26)$$

将式 (3.2.26) 代入式 (3.2.25) 可知

$$\frac{d}{dt}\left\{u_t^2(x,t)+\frac{1}{\alpha}u^2(x,t)-2\tilde{G}(u(x,t))\right\}\leqslant\frac{1}{\alpha}(\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2). \qquad (3.2.27)$$

若 $\tilde{G}(u)\leqslant 0$, 式 (3.2.27) 对 t 积分, 有

$$\frac{1}{\alpha}\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2+2\|\tilde{G}(u(\cdot,t))\|_\infty$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\|u_0\|_\infty^2 + \|u_1\|_\infty^2 + 2\|\tilde{G}(u_0)\|_\infty \\ + \frac{1}{\alpha}\int_0^t (\|u(\cdot,\tau)\|_\infty^2 + \|u_t(\cdot,\tau)\|_\infty^2)d\tau. \tag{3.2.28}$$

Gronwall 不等式给出

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2 \leqslant C_4(T), \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.2.29}$$

其中 $C_4(T)$ 是依赖 T 的常数.

若 $g'(z) \leqslant A_0, \forall z \in \mathbb{R}$, 我们可以假定 $A_0 > 0$. 否则由 $g'(z) \leqslant A_0 \leqslant 0$ 能够得到 $\tilde{G}(z) \leqslant 0$. 令 $H(z) = A_0 z - g(z)$. 因此, $H(0) = 0, H'(z) \geqslant 0$. 于是

$$\int_0^u H(z)dz = \frac{1}{2}A_0 u^2 - \tilde{G}(u) \equiv \tilde{H}(u).$$

式 (3.2.27) 两端同加 $2A_0 u u_t$, 有

$$\frac{d}{dt}\left\{u_t^2(x,t) + \frac{1}{\alpha}u^2(x,t) + 2\tilde{H}(u(x,t))\right\} \\ \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} + A_0^2\right)\|u(\cdot,t)\|_\infty^2 + \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2. \tag{3.2.30}$$

式 (3.2.30) 对 t 积分并利用 Gronwall 不等式, 立得

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2 \leqslant C_4(T), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.31}$$

利用 Minkowski 积分不等式, 式 (3.2.29), (3.2.31), 引理 1.8.3 和 1.8.13, 由方程 (3.2.10) 推得

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s}T + \frac{T}{\alpha}\int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau \\ + T\int_0^t \|g(u(\cdot,\tau))\|_{H^s}d\tau + \frac{T}{\alpha}\int_0^t \|G*u(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau \\ \leqslant \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s}T + C_5(T)\int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau. \tag{3.2.32}$$

Gronwall 不等式给出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant C_6(T), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.33}$$

积分方程 (3.2.10) 对 t 求导, 有

$$u_t(x,t) = u_1(x) - \frac{1}{\alpha}\int_0^t u(x,\tau)d\tau + \int_0^t g(u(x,\tau))d\tau + \frac{1}{\alpha}\int_0^t G*u(x,\tau)d\tau. \tag{3.2.34}$$

利用式 (3.2.33), 由式 (3.2.34) 导出

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant C_7(T), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.35}$$

联合式 (3.2.33) 和式 (3.2.35), 我们断定式 (3.2.21) 成立. □

推论 3.2.1　在定理 3.2.2 的条件下, 若 $s > 2 + \frac{N}{2}$, 则 Cauchy 问题 (3.2.6), (3.2.7) 有唯一整体古典解 $u \in C^2([0,\infty); C_B^2(\mathbb{R}^N))$, 其中 $C_B^2(\mathbb{R}^N)$ 由所有 $C^2(\mathbb{R}^N)$ 中在 $\mathbb{R}^N$ 上有界的函数构成.

3.2.4　与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [172]. 与本节有关的文献见 [25], [30], [32], [53], [160], [161], [164], [168], [169], [173]–[175].

3.3　具阻尼广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题

3.3.1　引言

本节讨论下列具阻尼广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + \nu_2 u_{xxt} = f(u)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{3.3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3.2}$$

其中 $u(x,t)$ 是未知函数, $\nu_2 < 0$ 是一阻尼常数, $f(s)$ 是给定的非线性函数, 而 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初值函数.

在文献 [176] 中作者在有流体动力学阻尼和外力作用的情况下研究了单原子链的晶格孤立子的动力学. 在拟连续极限下由离散系统导出一具阻尼和外力的 IMBq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} - f(u)_{xx} = \nu_2 u_{x^2 t}. \tag{3.3.3}$$

关于方程 (3.3.3) 对应的 u_{xxt} 的系数 $\nu_2 > 0$ 是流体动力学阻尼 (见 [176]).

显然, 方程 (3.3.3) 与 IMBq 方程有紧密关系.

我们首先证明 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 存在唯一整体广义解 $u \in C^3([0,\infty); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)(m \geqslant 2)$ 和 $\Lambda^{-1}u_t \in C([0,\infty); L^2)$, 然后将证明 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 有唯一整体古典解 $u \in C^3([0,\infty); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2) \left(m > 2 + \frac{1}{p}\right)$. 最后将应用凸性引理研究 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 解的爆破. 我们还将研究 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 存在唯一整体广义解 $u \in C^2([0,\infty); H^s) \left(s > \frac{1}{2}\right)$, 然后证明 Cauchy

问题 (3.3.1), (3.3.2) 有唯一整体古典解 $u \in C^2([0,\infty); H^s)$ $\left(s > \dfrac{5}{2}\right)$, 最后讨论解的爆破.

3.3.2 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 在 $u \in C^3([0,\infty); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)$ 中整体解的存在唯一性和解的爆破

1. Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 局部广义解的存在唯一性

我们应用压缩映射原理证明局部广义解的存在唯一性. 利用二阶常微分方程的基本解将 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 化为一积分方程.

设 $u \in C^2([0,T]; W^{2,p} \cap L^\infty \cap L^2)$ 是 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解. 方程 (3.3.1) 可以改写为

$$(u_{tt} + u - \nu_2 u_t + f(u)) - (u_{tt} + u - \nu_2 u_t + f(u))_{xx} = u - \nu_2 u_t + f(u) \qquad (3.3.4)$$

或

$$u_{tt} = (I - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^2 (u - \nu_2 u_t + f(u)). \qquad (3.3.5)$$

由式 (3.3.4) 得

$$u_{tt} + u - \nu_2 u_t + f(u) = (I - \partial_x^2)^{-1} [u - \nu_2 u_t + f(u)] = G * [u - \nu_2 u_t + f(u)], \quad (3.3.6)$$

其中 $G(x)$ 是常微分方程

$$y(x) - \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 0$$

的基本解. 显然, 应用引理 1.8.3 可以算出此基本解为 $G(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$. 下面给出另一证法. 事实上, 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 考虑方程

$$G - G_{xx} = \delta,$$

其中 $\delta(x)$ 是 Dirac 函数. 对上述方程作 Fourier 变换, 有

$$\widehat{G} - (-i\xi)^2 \widehat{G} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

于是

$$\widehat{G}(\xi) = \frac{1}{(1+\xi^2)\sqrt{2\pi}}.$$

再考虑

$$\Phi(x) = e^{-|x|}.$$

下面求 $\widehat{\Phi}(\xi)$.

$$
\begin{aligned}
K(\xi)=\widehat{\Phi}(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}(\cos(x\xi)-i\sin(x\xi))dx\\
&=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos(x\xi)dx=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\cos(x\xi)de^{-x}\\
&=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x}\cos(x\xi)|_0^{\infty}-\frac{2\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-x}\sin(x\xi)dx\\
&=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}-\frac{2\xi^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos(x\xi)dx.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(1+\xi^2)\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos(x\xi)dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}.
$$

于是

$$
\widehat{\Phi}(\xi)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\xi^2)}=2\widehat{G}(\xi).
$$

所以

$$
\widehat{G}(\xi)=\frac{1}{2}\widehat{\Phi}(\xi).
$$

因而

$$
G(x)=\frac{1}{2}\Phi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.
$$

解 Cauchy 问题 (3.3.6), (3.3.2), 并进行分部积分有

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=&u_0(x)(\cos t-\nu_2\sin t)+u_1(x)\sin t\\
&+\sin tG*[\nu_2u_0](x)+\nu_2\int_0^t\cos(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\\
&-\int_0^t\sin(t-\tau)f(u(t,\tau))d\tau-\int_0^t\cos(t-\tau)G*[\nu_2u](x,\tau)d\tau\\
&+\int_0^t\sin(t-\tau)G*[u+f(u)](x,\tau)d\tau.
\end{aligned}\tag{3.3.7}
$$

定义 3.3.1 对于任意的 $T>0$, 若 $u_0,u_1\in W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2$ 和 $u\in C([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)(m\geqslant 0)$ 满足积分方程 (3.3.7), 其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为积分方程 (3.3.7) 的连续解或 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解. 若 $T<\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的局部广义解. 若 $T=\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的整体广义解.

现在应用压缩映射原理证明积分方程 (3.3.7) 存在唯一局部连续解. 为此, 定义函数空间 $X(T)=C([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)(m\geqslant 0)$, 并赋予范数

$$
\|u\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{m,p}+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_\infty+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|.
$$

易证 $X(T)$ 是 Banach 空间.

定义映射 $S: X(T) \mapsto X(T)$ 为

$$
\begin{aligned}
Sv(x,t) = & u_0(x)(\cos t - \nu_2 \sin t) + u_1(x)\sin t \\
& + \sin t G * [\nu_2 u_0](x) + \nu_2 \int_0^t \cos(t-\tau) v(x,\tau) d\tau \\
& - \int_0^t \sin(t-\tau) f(v(x,\tau)) d\tau - \int_0^t \cos(t-\tau) G * [\nu_2 v](x,\tau) d\tau \\
& + \int_0^t \sin(t-\tau) G * [v + f(v)](x,\tau) d\tau, \quad \forall v \in X(T).
\end{aligned} \tag{3.3.8}
$$

显然, 由引理 1.8.16 看出, 若 $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})(m \geqslant 0), g(0) = 0$, 则 S 有定义.

对任意初值 $u_0, u_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2$, 令

$$
a = (1+2|\nu_2|)(\|u_0\|_{m,p} + \|u_0\|_\infty + \|u_0\|) + \|u_1\|_{m,p} + \|u_1\|_\infty + \|u_1\|.
$$

定义集合

$$
Q(a,T) = \{v | v \in X(T), \|v\|_{X(T)} \leqslant a+1\}. \tag{3.3.9}
$$

显然, 对于每一对 $a, T > 0$, $Q(a,T)$ 是 $X(T)$ 的一不空有界闭凸子集. 我们的目的是指出 S 在 $Q(a,T)$ 中有唯一不动点.

引理 3.3.1 设 $u_0, u_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2$, $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})(m \geqslant 0)$, $f(0) = 0$, 若 T 相对于 a 适当小, 则映射 S: $Q(a,T) \mapsto Q(a,T)$ 是严格压缩的.

证明 令 $v \in Q(a,T)$. 应用 Minkowski 积分不等式, 引理 1.8.16 和 Young 不等式, 由式 (3.3.8) 有

$$
\begin{aligned}
\|Sv(\cdot,t)\|_{m,p} \leqslant & (1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{m,p} + \|u_1\|_{m,p} \\
& + (1+2|\nu_2| + 2K_3(a+1))T \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v(\cdot,t)\|_{m,p},
\end{aligned} \tag{3.3.10}
$$

其中 $K_3(a+1)$ 意指 K_3 是依赖于 $a+1$ 的常数, 且 K_3 是出现在引理 1.8.16 中,

$$
\begin{aligned}
\|Sv(\cdot,t)\|_\infty \leqslant & (1+2|\nu_2|)\|u_0\|_\infty + \|u_1\|_\infty \\
& + (1+2|\nu_2| + 2K_3(a+1))T \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v(\cdot,t)\|_\infty;
\end{aligned} \tag{3.3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\|Sv(\cdot,t)\| \leqslant & (1+2|\nu_2|)\|u_0\| + \|u_1\| \\
& + (1+2|\nu_2| + 2K_3(a+1))T \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v(\cdot,t)\|.
\end{aligned} \tag{3.3.12}
$$

因此, 由式 (3.3.10)—(3.3.12) 推出

$$
\|Sv\|_{X(T)} \leqslant a + (1+2|\nu_2| + 2K_3(a+1))T\|v\|_{X(T)}
$$

$$\leqslant a+(1+2|\nu_2|+2K_3(a+1))(a+1)T. \tag{3.3.13}$$

若 T 满足

$$T\leqslant[1+2|\nu_2|+2K_3(a+1)]^{-1}(a+1)^{-1}, \tag{3.3.14}$$

则 $\|Sv\|_{X(T)}\leqslant a+1$. 所以若式 (3.3.14) 成立, 则 S 映 $Q(a,T)$ 到 $Q(a,T)$.

进一步证明映射 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 和 $v_1,v_2\in Q(a,T)$ 给定, 有

$$\begin{aligned}Sv_1(x,t)-Sv_2(x,t)=&\nu_2\int_0^t\cos(t-\tau)[v_1(x,\tau)-v_2(x,\tau)]d\tau\\&-\int_0^t\sin(t-\tau)[f(v_1(x,\tau))-f(v_2(x,\tau))]d\tau\\&-\int_0^t\cos(t-\tau)G*[\nu_2(v_1-v_2)](x,\tau)d\tau\\&+\int_0^t\sin(t-\tau)G*[v_1-v_2+f(v_1)-f(v_2)](x,\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

由式 (3.3.15) 和 Minkowski 积分不等式推出

$$\begin{aligned}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sv_1(\cdot,t)-Sv_2(\cdot,t)\|_\infty\leqslant&(1+2|\nu_2|)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_\infty\\&+2T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(v_1(\cdot,t))-f(v_2(\cdot,t))\|_\infty.\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

应用 Minkowski 积分不等式和推论 1.8.1 看出

$$\begin{aligned}\|f(v_1(\cdot,t))-f(v_2(\cdot,t))\|_\infty=&\left\|\int_0^1(v_1-v_2)f'(v_2+\tau(v_1-v_2))d\tau\right\|_\infty\\\leqslant&\int_0^1\|(v_1-v_2)f'(v_2+\tau(v_1-v_2))\|_\infty d\tau\\\leqslant&2K_2\int_0^1\|(v_1-v_2)\|_\infty\|f'(v_2+\tau(v_1-v_2))\|_\infty d\tau\\\leqslant&2K_2\max_{|\eta|\leqslant a+1}|f'(\eta)|\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_\infty.\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

将式 (3.3.17) 代入式 (3.3.16) 得

$$\begin{aligned}&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sv_1(\cdot,t)-Sv_2(\cdot,t)\|_\infty\\\leqslant&\left(1+2|\nu_2|+4K_2\max_{|\eta|\leqslant a+1}|f'(\eta)|\right)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_\infty.\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

利用 Minkowski 积分不等式有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sv_1(\cdot,t)-Sv_2(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant(1+2|\nu_2|)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{m,p}$$

$$+ 2T \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|f(v_1(\cdot,t)) - f(v_2(\cdot,t))\|_{m,p}. \quad (3.3.19)$$

注意到 Minkowski 积分不等式, 推论 1.8.1 和引理 1.8.16, 发现

$$\begin{aligned}
&\|f(v_1(\cdot,t)) - f(v_2(\cdot,t))\|_{m,p} \\
=&\left\|\int_0^1 (v_1 - v_2)f'(v_2 + \tau(v_1 - v_2))d\tau\right\|_{m,p} \\
\leqslant&\int_0^1 \|(v_1 - v_2)f'(v_2 + \tau(v_1 - v_2))\|_{m,p}d\tau \\
\leqslant& K_2\int_0^1 [\|v_1 - v_2\|_{m,p}\|f'(v_2 + \tau(v_1 - v_2))\|_\infty \\
&+ \|v_1 - v_2\|_\infty\|f'(v_2 + \tau(v_1 - v_2))\|_{m,p}]d\tau \\
\leqslant& K_4(a+1)\int_0^1 [\|v_1 - v_2\|_{m,p}\|f'(v_2 + \tau(v_1 - v_2))\|_\infty \\
&+ \|v_1 - v_2\|_\infty\|v_2 + \tau(v_1 - v_2)\|_{m,p}]d\tau \\
\leqslant& C_1(a+1)[\|v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t)\|_{m,p} + \|v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t)\|_\infty]. \quad (3.3.20)
\end{aligned}$$

将式 (3.3.20) 代入式 (3.3.19), 有

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|Sv_1(\cdot,t) - Sv_2(\cdot,t)\|_{m,p} \\
\leqslant& [1 + 2|\nu_2| + 2C_1(a+1)]T \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t)\|_{m,p} \\
&+ 2C_1(a+1)T \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t)\|_\infty. \quad (3.3.21)
\end{aligned}$$

类似于式 (3.3.21) 可得

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|Sv_1(\cdot,t) - Sv_2(\cdot,t)\| \\
\leqslant& [1 + \nu_0 + 2|\nu_2| + 2C_1(a+1)]T \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t)\| \\
&+ 2C_1(a+1)T \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t)\|_\infty. \quad (3.3.22)
\end{aligned}$$

由式 (3.3.18), (3.3.21) 和式 (3.3.22) 推出

$$\begin{aligned}
\|Sv_1 - Sv_2\|_{X(T)} \leqslant& \left[1 + 2|\nu_2| + 4K_2 \max_{|\eta|\leqslant a+1} |f'(\eta)|\right. \\
&\left.+ 2C_1(a+1)\right]T\|v_1 - v_2\|_{X(T)}. \quad (3.3.23)
\end{aligned}$$

若 T 满足式 (3.3.14) 和

$$T \leqslant \frac{1}{2}\left[1 + 2|\nu_2| + 4K_2 \max_{|\eta|\leqslant a+1} |f'(\eta)| + 2C_1(a+1)\right]^{-1}, \quad (3.3.24)$$

则 $\|Sv_1 - Sv_2\|_{X(T)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{X(T)}$. □

定理 3.3.1　设 $u_0, u_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2$, $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})(m \geqslant 0)$, $f(0) = 0$, 则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 存在唯一局部广义解 $u \in C([0, T_0); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)$, 其中 $[0, T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 若

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T_0)} & (\|u(\cdot,t)\|_{m,p} + \|u(\cdot,t)\|_\infty + \|u_t(\cdot,t)\|_{m,p} + \|u_t(\cdot,t)\|_\infty \\ & + \|u(\cdot,t)\| + \|u_t(\cdot,t)\|) < \infty,\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

则 $T_0 = \infty$.

证明　由引理 3.3.1 和压缩映射原理知, 对于适当选择的 $T > 0$, S 有唯一的不动点 $u \in Q(a, T)$, u 显然是积分方程 (3.3.7) 的解. 易证对于每一个 $T' > 0$, 积分方程 (3.3.7) 至少有一解属于 $X(T')$.

现在, 令 $[0, T_0)$ 是解 $u \in Q(a, T)$ 存在的最大时间区间. 余下只需证明, 如果 (3.3.25) 成立, 则 $T_0 = \infty$.

假定式 (3.3.25) 成立且 $T_0 < \infty$. 对于任意 $T' \in [0, T_0)$, 考虑积分方程

$$\begin{aligned}v(x,t) = & u(x,T')(\cos t - \nu_2 \sin t) + u_t(x,T')\sin t + \sin t G * [\nu_2 u](x,T') \\ & + \nu_2 \int_0^t \cos(t-\tau) v(x,\tau) d\tau - \int_0^t \sin(t-\tau) f(v(x,\tau)) d\tau \\ & - \int_0^t \cos(t-\tau) G * [\nu_2 v](x,\tau) d\tau \\ & + \int_0^t \sin(t-\tau) G * [v + f(v)](x,\tau) d\tau.\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

根据式 (3.3.25), $\|u(\cdot,T')\|_{m,p} + \|u(\cdot,T')\|_\infty$, $\|u_t(\cdot,T')\|_{m,p} + \|u_t(\cdot,T')\|_\infty$ 和 $\|u(\cdot,T')\| + \|u_t(\cdot,T')\|$ 在 $T' \in [0, T_0)$ 处是一致有界的, 这就允许我们选择 $T^* \in (0, T_0)$, 使得对于每一个 T^*, 积分方程 (3.3.26) 有唯一解 $v \in X(T^*)$. 这样的 T^* 的存在性是由引理 3.3.1 和压缩映射原理得来的. 特别地, 式 (3.3.14) 和式 (3.3.24) 显示出 T^* 的选择与 $T' \in (0, T_0)$ 无关. 置 $T' = T_0 - \frac{T^*}{2}$, 令 $v(x,t)$ 表示对应于积分方程 (3.3.26) 的解和定义 $\tilde{u}(x,t)$ 如下

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \in [0, T'], \\ v(x, t - T'), & t \in \left[T', T_0 + \frac{T^*}{2}\right]. \end{cases} \tag{3.3.27}$$

根据构造可知, $\tilde{u}(x,t)$ 是积分方程 (3.3.7) 在 $\left[0, T_0 + \frac{T^*}{2}\right]$ 上的解, 又根据局部解的唯一性, $\tilde{u}(x,t)$ 是 $u(x,t)$ 的延拓. 这与 $[0, T_0)$ 是积分方程 (3.3.7) 解存在的最大时间区间矛盾. 因此, 若式 (3.3.25) 成立, 则 $T_0 = \infty$. □

注 3.3.1 若 $u \in C([0,T_0); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)(m \geqslant 0)$ 是 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解, 由积分方程 (3.3.7) 和引理 1.8.16 推出 $u \in C^2([0,T_0);\ W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)$ 和方程 (3.3.6) 成立.

2. Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) **整体广义解和整体古典解的存在唯一性**

引理 3.3.2 设 $u_0, u_1 \in L^2$, $f \in C(\mathbb{R})$, $F(u) = \int_0^u f(y)dy$, $F(u_0) \in L^1$ 和 $\Lambda^{-1}u_1 \in L^2$, 则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解 $u \in C^2([0,T_0); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)(m \geqslant 0)$ 有下面的能量等式

$$
\begin{aligned}
E(t) = &\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u(\cdot,t)\|^2 + \|u_t(\cdot,t)\|^2 + 2\int_{-\infty}^{\infty} F(u(x,t))dx \\
&- 2\nu_2 \int_0^t \|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2 d\tau = E(0).
\end{aligned}
\tag{3.3.28}
$$

证明 由注 3.3.1 得, 对于 $T < T_0, u, u_t, u_{tt} \in C([0,T_0); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)$. 式 (3.3.5) 对 t 积分, 有

$$
u_t(x,t) = u_1(x) + \int_0^t (I - \partial_x^2)^{-1}\partial_x^2(u(x,\tau) - \nu_2 u_\tau(x,\tau) + f(u(x,\tau)))d\tau.
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\| &\leqslant \|\Lambda^{-1}u_1\| + \int_0^t \|\Lambda^{-1}(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x^2(u(\cdot,\tau) - \nu_2 u_\tau(\cdot,\tau) + f(u(\cdot,\tau)))\| d\tau \\
&\leqslant \|\Lambda^{-1}u_1\| + \int_0^t \left\| \frac{|\xi|}{1+|\xi|^2}[\hat{u} + |\nu_2|\hat{u}_\tau + \widehat{f(u)}] \right\| d\tau \\
&\leqslant \|\Lambda^{-1}u_1\| + \int_0^t [\|u\| + |\nu_2|\|u_\tau\| + \|f(u)\|] d\tau \\
&\leqslant \|\Lambda^{-1}u_1\| + \int_0^t [(1+C_2)\|u\| + |\nu_2|\|u_\tau\|] d\tau,
\end{aligned}
\tag{3.3.29}
$$

其中 C_2 是依赖于 $\|u\|_\infty$ 的常数. 因此 $\Lambda^{-1}u_t \in C([0,T]; L^2)$.

由式 (3.3.5) 得

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda^{-2}u_{tt}\| &= \||\xi|^{-2}\hat{u}_{tt}\| = \||\xi|^{-2}[(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x^2(u - \nu_2 u_t + f(u))]^{\widehat{}}\| \\
&= \left\| \frac{-1}{1+|\xi|^2}(\hat{u} - \nu_2 \hat{u}_t + \widehat{f(u)}) \right\| \\
&\leqslant C_3\|u\| + |\nu_2|\|u_t\|,
\end{aligned}
$$

从而 $\Lambda^{-2}u_{tt} \in C([0,T]; L^2)$, 其中 C_3 是依赖于 $\|u\|_\infty$ 的常数. 方程 (3.3.1) 两端取 Λ^{-2} 变换, 可见

$$
\Lambda^{-2}u_{tt} + u + u_{tt} - \nu_2 u_t + f(u) = 0. \tag{3.3.30}
$$

式 (3.3.30) 与 u_t 作内积得

$$(\Lambda^{-2}u_{tt}+u+u_{tt}-\nu_2 u_t+f(u),u_t)=0, \tag{3.3.31}$$

由式 (3.3.31) 推出

$$\frac{d}{dt}\left(\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+\|u\|^2+\|u_t\|^2+2\int_{-\infty}^{\infty}F(u)dx-2\nu_2\int_0^t\|u_\tau\|^2d\tau\right)=0.$$

所以有

$$E(t)=E(0).$$

□

定理 3.3.2　设下列条件成立:

(1) $u_0,u_1\in W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2(m\geqslant 0)$ 和 $\Lambda^{-1}u_1\in L^2$;

(2) $f\in C^{m+1}(\mathbb{R})$, $f(0)=0, f'(0)=0$, $F(u)\geqslant 0, F(u_0)\in L^1$, 且存在 $\gamma(1\leqslant\gamma\leqslant\infty)$, 使得

$$|f(u)|\leqslant AF(u)^{\frac{1}{\gamma}}|u|+B, \tag{3.3.32}$$

其中 A 和 B 是正常数,

则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 存在唯一整体广义解 $u\in C^3([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$ 和 $\Lambda^{-1}u_t\in C([0,\infty);L^2)$.

证明　根据定理 3.3.1 只需证明式 (3.3.25) 成立. 方程 (3.3.6) 两端同乘以 $u_t(x,t)$ 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t^2(x,t)+u^2(x,t)+2F(u(x,t)))-\nu_2u_t^2(x,t)\\&=G*[u-\nu_2u_t+f(u)](x,t)u_t(x,t).\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

应用 Young 不等式, 式 (3.3.32) 和 Hölder 不等式有

$$G*u(x,t)u_t(x,t)\leqslant\frac{1}{2}(\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2), \tag{3.3.34}$$

$$-G*\nu_2u_t(x,t)u_t(x,t)\leqslant|\nu_2|\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2, \tag{3.3.35}$$

$$\begin{aligned}G*f(u)(x,t)u_t(x,t)\leqslant&AG*(F(u)^{\frac{1}{\gamma}}|u|)(x,t)|u_t(x,t)|+B|u_t(x,t)|\\\leqslant&C_4+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2\\&+A\|G\|_q\|u(\cdot,t)\|_\infty\|u_t(\cdot,t)\|_\infty\|F(u(\cdot,t))\|_1^{\frac{1}{\gamma}},\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

其中 $\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{q}=1$. 利用式 (3.3.28) 和 $G\in L^q$, 由式 (3.3.36) 可知

$$G*f(u)(x,t)u_t(x,t)\leqslant C_4+C_5(\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2). \tag{3.3.37}$$

将式 (3.3.34), (3.3.35) 和式 (3.3.37) 代入式 (3.3.33) 得

$$\frac{d}{dt}(u_t^2(x,t)+u^2(x,t)+2F(u(x,t)))-2\nu_2u_t^2(x,t)$$
$$\leqslant 2C_4+C_6(\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2). \tag{3.3.38}$$

式 (3.3.38) 对 t 积分, 并应用 Cauchy 不等式, 推出

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2+2\|F(u(\cdot,t))\|_\infty-2\nu_2\int_0^t u_\tau^2(x,\tau)d\tau$$
$$\leqslant \|u_0\|_\infty^2+\|u_1\|_\infty^2+2\|F(u_0)\|_\infty+C_7(T)$$
$$+C_6\int_0^t[\|u(\cdot,\tau)\|_\infty^2+\|u_\tau(\cdot,\tau)\|_\infty^2]d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.3.39}$$

这里和下面 $C_i(T)(i=7,8,\cdots)$ 是依赖于 T 的常数. Gronwall 不等式给出

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2+2\|F(u(\cdot,t))\|_\infty^2-2\nu_2\int_0^t u_t^2(x,\tau)d\tau$$
$$\leqslant C_8(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.3.40}$$

应用 Minkowski 积分不等式, 引理 1.8.16 和式 (3.3.40), 从式 (3.3.7) 有

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant&(1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{m,p}+\|u_1\|_{m,p}\\&+(1+2|\nu_2|)\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{m,p}d\tau+2\int_0^t\|f(u(\cdot,\tau))\|_{m,p}d\tau\\\leqslant&(1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{m,p}+\|u_1\|_{m,p}\\&+[1+2|\nu_2|+2K_3(\sqrt{C_8(T)})]\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{m,p}d\tau.\end{aligned} \tag{3.3.41}$$

Gronwall 导出

$$\|u(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant C_9(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.3.42}$$

类似于式 (3.3.42) 有

$$\|u(\cdot,t)\|\leqslant C_{10}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.3.43}$$

式 (3.3.7) 对 t 求导, 可知

$$\begin{aligned}u_t(x,t)=&u_0(x)(-\sin t-\nu_2\cos t)+u_1(x)\cos t+\cos tG*[\nu_2u_0](x)\\&+\nu_2u(x,t)-\nu_2\int_0^t\sin(t-\tau)u(x,\tau)d\tau-\int_0^t\cos(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau\\&-G*[\nu_2u](x,t)+\int_0^t\sin(t-\tau)G*[\nu_2u](x,\tau)d\tau\end{aligned}$$

$$+\int_0^t \cos(t-\tau)G*[u+f(u)](x,\tau)d\tau. \tag{3.3.44}$$

应用 Minkowski 积分不等式, 引理 2.6.16 和式 (3.3.40), 由式 (3.3.44) 断言

$$\begin{aligned}\|u_t(\cdot,t)\|_{m,p} &\leqslant (1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{m,p}+\|u_1\|_{m,p}+2|\nu_2|\|u(\cdot,t)\|_{m,p}\\&\quad+(1+2|\nu_2|+2K_3(\sqrt{C_8(T)}))\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{m,p}d\tau\\&\leqslant C_{11}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned} \tag{3.3.45}$$

类似可得

$$\|u_t(\cdot,t)\|\leqslant C_{12}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.3.46}$$

由式 (3.3.40), (3.3.42), (3.3.43), (3.3.45) 和式 (3.3.46) 知式 (3.3.25) 成立.

显然, 由式 (3.3.28) 有 $\Lambda^{-1}u_t\in C([0,\infty);L^2)$.

式 (3.3.6) 对 t 求导, 得

$$u_{ttt}+u_t-\nu_2u_{tt}+\partial_tf(u)=G*\partial_t\big[u-\nu_2u_t+f(u)\big], \tag{3.3.47}$$

利用引理 1.8.16 和基本解的性质, 可得 $u_{ttt}\in C([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. □

为了证明 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 存在整体古典解, 我们将研究 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 整体广义解的正则性.

引理 3.3.3 设定理 3.3.2 的条件成立, $f\in C^{k+m+1}(\mathbb{R})$, 其中 $k\geqslant 0$ 和 $m\geqslant 2$ 是任意整数, 则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解 $u(x,t)$ 属于 $C^{k+3+l}([0,T];W^{m-l,p}\cap L^\infty\cap L^2)(\forall T>0), 0\leqslant l\leqslant m$.

证明 首先证明 $u\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. 应用归纳法. 当 $k=0$ 时, 由定理 3.3.2 知, $u\in C^3([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. 假定

$$u\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2),\quad 0\leqslant k<s. \tag{3.3.48}$$

当 $k=s$ 时, 式 (3.3.47) 对 t 求导 s 次, 有

$$\begin{aligned}u_{t^{s+3}}=&-u_{t^{s+1}}+\nu_2u_{t^{s+2}}-\partial_{t^{s+1}}f(u)+G*\partial_{t^{s+1}}\big[u-\nu_2u_t+f(u)\big]\\=&-u_{t^{s+1}}+\nu_2u_{t^{s+2}}-\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\frac{(s+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_{s+1}!}\Big(\frac{\partial_tu}{1!}\Big)^{i_1}\times\cdots\\&\times\Big(\frac{\partial_{t^{s+1}}u}{(s+1)!}\Big)^{i_{s+1}}f^{(i_1+\cdots+i_{s+1})}(u)+G*u_{t^{s+1}}-\nu_2G*u_{t^{s+2}}\\&+G*\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\frac{(s+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_{s+1}!}\Big(\frac{\partial_tu}{1!}\Big)^{i_1}\times\cdots\end{aligned}$$

$$\times\left(\frac{\partial_{t^{s+1}}u}{(s+1)!}\right)^{i_{s+1}} f^{(i_1+\cdots+i_{s+1})}(u), \tag{3.3.49}$$

其中 $i_1+i_2+\cdots+i_{s+1}=\rho, i_1+2i_2+\cdots+(s+1)i_{s+1}=s+1, i_j(j=1,\cdots,s+1)$ 是非负整数. 应用推论 1.8.1, 引理 1.8.16 和式 (3.3.48), 由式 (3.3.49) 推出 $u\in C^{s+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$.

从上面的证明知, $u\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$, $\forall k\geqslant 0, m\geqslant 2$. 下面证明对 $0\leqslant l\leqslant m$,

$$u\in C^{k+3+l}([0,T];W^{m-l,p}\cap L^\infty\cap L^2). \tag{3.3.50}$$

式 (3.3.47) 对 t 求导 $k+1$ 次, 可知

$$\begin{aligned}
u_{t^{k+4}}=&-u_{t^{k+2}}+\nu_2u_{t^{k+3}}-\partial_{t^{k+2}}f(u)+G*\partial_{t^{k+2}}\big[u-\nu_2u_t+f(u)\big]\\
=&-u_{t^{k+2}}+\nu_2u_{t^{k+3}}\\
&-\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\frac{(k+2)!}{i_1!i_2!\cdots i_{k+2}!}\left(\frac{\partial_t u}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial_{t^{k+2}}u}{(k+2)!}\right)^{i_{k+2}}f^{(i_1+\cdots+i_{k+2})}(u)\\
&+G*u_{t^{k+2}}-\nu_2G*u_{t^{k+3}}+G*\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\frac{(k+2)!}{i_1!i_2!\cdots i_{k+2}!}\left(\frac{\partial_t u}{1!}\right)^{i_1}\times\cdots\\
&\times\left(\frac{\partial_{t^{k+2}}u}{(k+2)!}\right)^{i_{k+2}}f^{(i_1+\cdots+i_{k+2})}(u),
\end{aligned}\tag{3.3.51}$$

其中 $i_1+i_2+\cdots+i_{k+2}=\rho$, $i_1+2i_2+\cdots+(k+2)i_{k+2}=k+2$, $i_j(j=1,\cdots,k+2)$ 是非负整数. 应用推论 1.8.1, 引理 2.6.16, 式 (3.3.51) 和 $u\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$, 可得 $u\in C^{k+4}([0,T];W^{m-1,p}\cap L^\infty\cap L^2)$.

式 (3.3.51) 对 t 求导, 得 $u\in C^{k+5}([0,T];W^{m-2,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. 此过程重复 $m-2$ 次, 可知式 (3.3.50) 成立. □

定理 3.3.3 设引理 3.3.3 的条件成立和 $k=0, l=0, m>2+\dfrac{1}{p}$, 则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 有唯一整体古典解 $u\in C^3([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$, 即 $u\in C^3([0,\infty);C^2(\mathbb{R})\cap L^\infty\cap L^2)$.

3. Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 解的爆破

现在我们应用引理 1.8.7(凸性引理) 讨论 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的解的爆破.

定理 3.3.4 设 $u_0,u_1\in L^2$, $F(u_0)\in L^1$, $\Lambda^{-1}u_0,\Lambda^{-1}u_1\in L^2$, 且存在常数 $\gamma>0$, 使得

$$f(s)s\leqslant 2\gamma s^2+[(2+4\gamma)+|\nu_2|]F(s),\quad \forall s\in\mathbb{R}, \tag{3.3.52}$$

则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解 $u(x,t) \in C^2([0,T_0); W^{m,p}\cap L^\infty \cap L^2)(m \geqslant 0)$ 或者 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破, 如果满足下列条件之一:

(1) $E(0) < 0$;

(2) $E(0) = 0, (\Lambda^{-1}u_1, \Lambda^{-1}u_0) + (u_1, u_0) > 0$;

(3) $E(0) > 0$,

$$(\Lambda^{-1}u_1,\ \Lambda^{-1}u_0) + (u_1, u_0) \geqslant \left\{ \frac{[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)}{2(2\gamma+1)} (\|\Lambda^{-1}u_0\|^2 + \|u_0\|^2) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

证明　假定 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 解存在的最大时间是无限的. 令

$$H(t) = \|\Lambda^{-1}u\|^2 + \|u\|^2 + \beta_0(t+t_0)^2, \tag{3.3.53}$$

其中 β_0 和 t_0 是待定的非负常数. 应用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\dot{H}(t) &= 2(\Lambda^{-1}u_t, \Lambda^{-1}u) + 2(u_t, u) + 2\beta_0(t+t_0)\\ &\leqslant 2\{\|\Lambda^{-1}u_t\|\|\Lambda^{-1}u\| + \|u_t\|\|u\| + \beta_0(t+t_0)\}\\ &\leqslant 2H(t)^{\frac{1}{2}}[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.3.54}$$

由式 (3.3.54) 推得

$$\dot{H}(t)^2 \leqslant 4H(t)[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0]. \tag{3.3.55}$$

从式 (3.3.53) 可知

$$\ddot{H}(t) = 2[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0 + (\Lambda^{-2}u_{tt} + u_{tt}, u)]. \tag{3.3.56}$$

应用式 (3.3.55), (3.3.30), (3.3.28), (3.3.56) 和式 (3.3.52) 得

$$\begin{aligned}&H(t)\ddot{H}(t) - (1+\gamma)\dot{H}(t)^2\\ \geqslant& H(t)\{2[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0 + (\Lambda^{-2}u_{tt} + u_{tt}, u)]\\ &- 4(1+\gamma)(\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0)\}\\ =& -H(t)\{(2+4\gamma)(\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0) + 2(u - \nu_2 u_t + f(u), u)\}\\ =& -H(t)\Bigg\{(2+4\gamma)(E(0)+\beta_0) + 2(u - \nu_2 u_t + f(u), u)\\ &- (2+4\gamma)\left(\|u\|^2 + 2\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx - 2\nu_2\int_0^t \|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2 d\tau\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant -H(t)(2+4\gamma)(E(0)+\beta_0)-H(t)|\nu_2|\big(\|u_t\|^2+\|u\|^2\big)\\
&\quad +2H(t)\int_{-\infty}^{\infty}\big[-f(u)u+2\gamma u^2+(2+4\gamma)F(u)\big]dx\\
&\geqslant -H(t)(2+4\gamma)(E(0)+\beta_0)-H(t)|\nu_2|E(0)\\
&\quad +2H(t)|\nu_2|\left(\int_{-\infty}^{\infty}F(u)dx+|\nu_2|\int_0^t\|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2d\tau\right)\\
&\quad +2H(t)\int_{-\infty}^{\infty}\big[-f(u)u+2\gamma u^2+(2+4\gamma)F(u)\big]dx\\
&\geqslant -H(t)\big[(2+4\gamma+|\nu_2|)E(0)+(2+4\gamma)\beta_0\big]\\
&\quad +2H(t)\int_{-\infty}^{\infty}\big\{-f(u)u+2\gamma u^2+[2+4\gamma+|\nu_2|]F(u)\big\}dx\\
&\geqslant -H(t)\big[(2+4\gamma+|\nu_2|)E(0)+(2+4\gamma)\beta_0\big]. \qquad (3.3.57)
\end{aligned}
$$

若 $E(0)<0$, 取 $\beta_0=\dfrac{-(2+4\gamma+|\nu_2|)E(0)}{4\gamma+2}$, 则由式 (3.3.57) 知

$$
H(t)\ddot{H}(t)-(1+\gamma)\dot{H}(t)^2\geqslant 0.
$$

因为 $H(0)>0$ 和 $\dot{H}(0)>0$, 若 t_0 充分大, 按照引理 1.8.7(凸性引理), 存在 $t_1\leqslant t_2=\dfrac{H(0)}{\gamma\dot{H}(0)}$, 使得 $\lim_{t\to t_1^-}H(t)=\infty$.

若 $E(0)=0$, 取 $\beta_0=0$, 则式 (3.3.57) 变为

$$
H(t)\ddot{H}(t)-(1+\gamma)\dot{H}(t)^2\geqslant 0.
$$

类似于 $E(0)<0$ 的情况, 存在 $t_1\leqslant t_2=\dfrac{H(0)}{\gamma\dot{H}(0)}$, 使得 $\lim_{t\to t_1^-}H(t)=\infty$.

若 $E(0)>0$, 取 $\beta_0=0$, 则式 (3.3.57) 变成

$$
H(t)\ddot{H}(t)-(1+\gamma)\dot{H}(t)^2\geqslant -H(t)[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0). \qquad (3.3.58)
$$

定义

$$
J(t)=H^{-\gamma}(t),
$$

则

$$
\begin{aligned}
\dot{J}(t)&=-\gamma H^{-\gamma-1}(t)\dot{H}(t),\\
\ddot{J}(t)&=\gamma(1+\gamma)H^{-\gamma-2}(t)\dot{H}(t)^2-\gamma H^{-\gamma-1}(t)\ddot{H}(t)\\
&=-\gamma H^{-\gamma-2}(t)[H(t)\ddot{H}(t)-(1+\gamma)\dot{H}(t)^2]\\
&\leqslant \gamma[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)H^{-\gamma-1}(t). \qquad (3.3.59)
\end{aligned}
$$

根据假定 (3) 发现 $\dot{J}(0) < 0$. 令

$$t^* = \sup\left\{\tau | \dot{J}(\tau) < 0, \tau \in [0,t)\right\}.$$

由于 $\dot{J}(t)$ 的连续性, t^* 是正的. 式 (3.3.59) 乘以 $2\dot{J}(t)$ 给出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\dot{J}(t)^2] &\geqslant -2\gamma^2[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)H^{-2\gamma-2}(t)\dot{H}(t)\\ &= \frac{2\gamma^2[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)}{2\gamma+1}\frac{d}{dt}[H^{-2\gamma-1}(t)], \quad \forall t \in [0,t^*).\end{aligned} \tag{3.3.60}$$

式 (3.3.60) 在 $[0,t)$ 上积分得

$$\dot{J}(t)^2 \geqslant \dot{J}(0)^2 + \frac{2\gamma^2[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)}{2\gamma+1}[H^{-2\gamma-1}(t) - H^{-2\gamma-1}(0)].$$

由假定 (3) 知

$$\dot{J}(0)^2 - \frac{2\gamma^2[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)}{2\gamma+1}H^{-2\gamma-1}(0) > 0.$$

所以按照 $\dot{J}(t)$ 的连续性, 对于 $0 \leqslant t < t^*$, 推出

$$\dot{J}(t) \leqslant -\left\{\dot{J}(0)^2 - \frac{2\gamma^2[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)}{2\gamma+1}H^{-2\gamma-1}(0)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.61}$$

根据 t^* 的定义知, 式 (3.3.61) 对于所有的 $t \geqslant 0$ 成立. 从而

$$J(t) \leqslant J(0) - \left\{\dot{J}(0)^2 - \frac{2\gamma^2[2+4\gamma+|\nu_2|]}{2\gamma+1}E(0)H^{-2\gamma-1}(0)\right\}^{\frac{1}{2}} t, \quad \forall t > 0.$$

所以对于某个 $t_1, J(t_1) = 0$ 和

$$0 < t_1 \leqslant T_2 = \frac{J(0)}{\left\{\dot{J}(0)^2 - \frac{2\gamma^2[2+4\gamma+|\nu_2|]}{2\gamma+1}E(0)H^{-2\gamma-1}(0)\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

因而当 $t \to t_1^-$ 时, $H(t) \to \infty$. 因此, 在假定 (1) 或 (2) 或 (3) 的条件下 $H(t)$ 在 t_1 处总变为无穷. 这与解存在的最大时间是无限的事实矛盾. □

3.3.3　Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 在 $u \in C^3([0,\infty); H^s)$ 中整体解的存在唯一性以及解的爆破

1. Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 局部广义解的存在唯一性

现在, 我们应用二阶常微分方程的基本解化 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 为一积分方程, 且利用压缩映射原理证明此积分方程存在唯一局部广义解, 即证明 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 有唯一局部广义解.

设 $u \in C^2([0,T];H^s)(s \geqslant 2)$ 是 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解. 由式 (3.3.6) 和式 (3.3.2) 知, Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 等价于下列积分方程

$$\begin{aligned}
u(x,t) = &u_0(x) + \{u_1(x) - \nu_2 u_0(x) + G*[\nu_2 u_0](x)\}t - \int_0^t (t-\tau)u(x,\tau)d\tau \\
&+ \nu_2 \int_0^t u(x,\tau)d\tau - \int_0^t (t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau + \int_0^t (t-\tau)[G*u](x,\tau)d\tau \\
&- \int_0^t G*[\nu_2 u](x,\tau)d\tau + \int_0^t (t-\tau)[G*f(u)](x,\tau)d\tau. \qquad (3.3.62)
\end{aligned}$$

定义 3.3.2 对于任意的 $T>0$, 若 $s>\dfrac{1}{2}, u_0, u_1 \in H^s$ 和 $u(x,t) \in C([0,T];H^s)$ 满足积分方程 (3.3.62), 则 $u(x,t)$ 称为积分方程 (3.3.62) 或 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解. 若 $T<\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的局部广义解. 若 $T=\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的整体广义解.

以下假定 $f(0)=0$. 对于 $s>\dfrac{1}{2}$ 和 $u_0, u_1 \in H^s$, 考虑 Banach 空间

$$Y(T) = \{u | u \in C([0,T];H^s)\},$$

并赋予范数

$$\|u\|_{Y(T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(\cdot,t)\|_{H^s}, \quad \forall u \in Y(T).$$

由 Sobolev 嵌入定理有

$$u \in C([0,T];L^\infty), \quad \forall u \in Y(T)$$

和 $\|u\|_\infty \leqslant C_{13}\|u\|_{H^s}$.

定义映射 S 如下

$$\begin{aligned}
Sw(x,t) = &u_0(x) + \{u_1(x) - \nu_2 u_0(x) + G*[\nu_2 u_0](x)\}t \\
&- \int_0^t (t-\tau)w(x,\tau)d\tau + \nu_2\int_0^t w(x,\tau)d\tau - \int_0^t (t-\tau)f(w(x,\tau))d\tau \\
&+ \int_0^t (t-\tau)[G*w](x,\tau)d\tau - \int_0^t G*[\nu_2 w](x,\tau)d\tau \\
&+ \int_0^t (t-\tau)[G*f(w)](x,\tau)d\tau, \quad \forall w \in Y(T). \qquad (3.3.63)
\end{aligned}$$

显然, 若 $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, 则 $S: Y(T) \mapsto Y(T)$.

现在, 对于任意初值 $u_0, u_1 \in H^s$, 令 $(1+2|\nu_2|)\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s} = b$, 定义

$$Z(b,T) = \{u | u \in Y(T), \|u\|_{Y(T)} \leqslant b+1\}.$$

显然, 对于每一对 $b,T>0$, $Z(b,T)$ 是 $Y(T)$ 的一不空有界闭凸子集. 我们的目的是指出 S 在 $Z(b,T)$ 中有唯一不动点.

引理 3.3.4　设 $s>\dfrac{1}{2}, u_0,u_1\in H^s, f(u)\in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), f(0)=0$, 则 S 映 $Z(b,T)$ 到 $Z(b,T)$ 和若 T 相对于 b 适当小, $S:Z(b,T)\mapsto Z(b,T)$ 是严格压缩的.

证明　首先证明对充分小的 T, S 映 $Z(b,T)$ 到自身. 令 $w\in Z(b,T)$ 给定. 由引理 1.8.3 推出

$$\|f(w(\cdot,t))\|_{H^s}\leqslant K_4(C_{13}b+C_{13})\|w(\cdot,t)\|_{H^s}, \tag{3.3.64}$$

其中 $K_4(C_{13}b+C_{13})$ 指出 K_4 是依赖于 $C_{13}b+C_{13}$ 的常数, 且 K_4 出现在引理 1.8.3 中. 直接计算得

$$\begin{aligned}\|G*w(\cdot,t)\|_{H^s}&=\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s\left|\left((I-\partial_x^2)^{-1}w\right)^{\widehat{}}(\xi)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\xi|^2)^2}|\hat{w}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\|w(\cdot,t)\|_{H^{s-2}}.\end{aligned} \tag{3.3.65}$$

应用 Minkowski 积分不等式, 引理 1.8.3, 式 (3.3.64) 和式 (3.3.65), 由式 (3.3.63) 有

$$\begin{aligned}\|Sw(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant&\|u_0\|_{H^s}+\left[\|u_1\|_{H^s}+2|\nu_2|\|u_0\|_{H^s}\right]T\\&+\int_0^t(t-\tau)\|w(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau+|\nu_2|\int_0^t\|w(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)\|f(w(\cdot,\tau))\|_{H^s}d\tau+\int_0^t(t-\tau)\|G*w(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\\&+|\nu_2|\int_0^t\|G*w(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau+\int_0^t(t-\tau)\|G*f(w)(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\\\leqslant&\, b+bT+2|\nu_2|(b+1)T+[1+K_4(C_{13}b+C_{13})](b+1)T^2.\end{aligned} \tag{3.3.66}$$

若 T 满足

$$T\leqslant\min\left\{1,\frac{1}{b+[1+2|\nu_2|+K_4(C_{13}b+C_{13})](b+1)}\right\}, \tag{3.3.67}$$

则 $\|Sw\|_{Y(T)}\leqslant b+1$, 即 S 映 $Z(b,T)$ 到 $Z(b,T)$.

现在, 证明映射 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 和 $w_1,w_2\in Z(b,T)$ 给定, 则由式 (3.3.63) 得

$$Sw_1(x,t)-Sw_2(x,t)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^t (t-\tau)[w_1(x,\tau)-w_2(x,\tau)]d\tau \\
&\quad + \nu_2\int_0^t [w_1(x,\tau)-w_2(x,\tau)]d\tau - \int_0^t (t-\tau)[f(w_1(x,\tau))-f(w_2(x,\tau))]d\tau \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)[G*(w_1-w_2)](x,\tau)d\tau - \int_0^t G*[\nu_2(w_1-w_2)](x,\tau)d\tau \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)[G*(f(w_1)-f(w_2))](x,\tau)d\tau. \qquad (3.3.68)
\end{aligned}
$$

应用 Minkowski 积分不等式有

$$
\begin{aligned}
&\|Sw_1(\cdot,t)-Sw_2(\cdot,t)\|_{H^s} \\
&\leqslant \int_0^t (t-\tau)\|w_1(\cdot,\tau)-w_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau + |\nu_2|\int_0^t \|w_1(\cdot,\tau)-w_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)\|f(w_1(\cdot,\tau))-f(w_2(\cdot,\tau))\|_{H^s}d\tau \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)\|G*(w_1-w_2)(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau \\
&\quad + |\nu_2|\int_0^t \|G*(w_1-w_2)(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)\|G*(f(w_1)-f(w_2))(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau. \qquad (3.3.69)
\end{aligned}
$$

由引理 1.8.14 推出

$$
\|f(w_1(\cdot,\tau))-f(w_2(\cdot,\tau))\|_{H^s} \leqslant K_5(C_{13}b+C_{13})\|w_1(\cdot,\tau)-w_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}. \qquad (3.3.70)
$$

类似于式 (2.6.64) 的证明和应用引理 1.8.14 得

$$
\begin{aligned}
\|G*(f(w_1)-f(w_2))(\cdot,\tau)\|_{H^s} &\leqslant \|f(w_1(\cdot,\tau))-f(w_2(\cdot,\tau))\|_{H^s} \\
&\leqslant K_5(C_{13}b+C_{13})\|w_1(\cdot,\tau)-w_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}. \qquad (3.3.71)
\end{aligned}
$$

将式 (3.3.70) 和式 (3.3.71) 代入式 (3.3.69) 知

$$
\begin{aligned}
\|Sw_1-Sw_2\|_{Y(T)} &\leqslant 2|\nu_2|T\|w_1-w_2\|_{Y(T)} \\
&\quad + [1+K_5(C_{13}b+C_{13})]T^2\|w_1-w_2\|_{Y(T)}. \qquad (3.3.72)
\end{aligned}
$$

若 T 满足

$$
T \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{b+[1+2|\nu_2|+K_4(C_{13}b+C_{13})](b+1)},\right.
$$

$$\left.\frac{1}{2[1+2|\nu_2|+K_5(C_{13}b+C_{13})]}\right\}, \tag{3.3.73}$$

则

$$\|Sw_1 - Sw_2\|_{Y(T)} \leqslant \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_{Y(T)},$$

即 S 映 $Z(b,T)$ 到 $Z(b,T)$, 且 S 是严格压缩的. □

应用压缩映射原理和证明定理 3.3.1 的方法可以证明下列定理.

定理 3.3.5 设 $s > \frac{1}{2}, u_0, u_1 \in H^s, f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), f(0) = 0$, 则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 存在唯一局部广义解 $u \in C^2([0,T_0);H^s)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 若

$$\lim_{t\to T_0^-}\sup(\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}) < \infty, \tag{3.3.74}$$

则 $T_0 = \infty$.

注 3.3.2 若 $u(x,t) \in C([0,T_0),H^s)\left(s > \frac{1}{2}\right)$ 是 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解, 从式 (3.3.62) 和引理 1.8.3 推出 $u(x,t) \in C^2([0,T_0);H^s)$ 和方程 (3.3.6) 成立.

2. Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 整体解的存在性与唯一性

定理 3.3.6 设下列条件成立:

(1) $s \geqslant \frac{1}{2}$, u_0, $u_1 \in H^s$ 和 $\Lambda^{-1}u_1 \in L^2$;

(2) $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), f(0) = 0, F(u) \geqslant 0$, $F(u_0) \in L^1$ 和存在 ρ 满足 $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, 使得

$$|f(u)| \leqslant AF(u)^{\frac{1}{\rho}}|u| + B,$$

其中 A 和 B 是正常数,

则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 存在唯一的整体广义解 $u \in C^2([0,\infty);H^s)$.

证明 根据定理 3.3.5 只需证明式 (3.3.74) 成立. 应用证明定理 3.3.2 的同样方法, 可得

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_\infty^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2 + 2\|F(u(\cdot,t))\|_\infty^2 - 2\nu_2\int_0^t u_\tau^2(x,\tau)d\tau\\&\leqslant C_{14}(T), \quad \forall t \in [0,T].\end{aligned} \tag{3.3.75}$$

利用 Minkowski 积分不等式和引理 1.8.3, 由式 (3.3.62) 推出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant \|u_0\|_{H^s} + (1+2|\nu_2|)(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s})T$$

$$+\left\{2|\nu_2|+[2+2K_4(C_{13}b+C_{13})]T\right\}\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau. \quad (3.3.76)$$

Gronwall 不等式给出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant C_{15}(T),\quad \forall t\in[0,T]. \quad (3.3.77)$$

积分方程 (3.3.62) 对 t 求导, 发现

$$\begin{aligned}u_t(x,t)=&u_1(x)-\nu_2u_0(x)+G*[\nu_2u_1](x)-\int_0^t u(x,\tau)d\tau\\&+\nu_2u(x,t)-\int_0^t f(u(x,\tau))d\tau+\int_0^t G*u(x,\tau)d\tau\\&-G*[\nu_2u](x,t)+\int_0^t G*f(u)(x,\tau)d\tau.\end{aligned} \quad (3.3.78)$$

注意到式 (3.3.77), 由式 (3.3.78) 得

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant C_{16}(T),\quad \forall t\in[0,T]. \quad (3.3.79)$$

由式 (3.3.77) 和式 (3.3.79) 知, 式 (3.3.74) 成立. □

注 3.3.3 在定理 3.3.6 的条件下, 若 $s>\frac{5}{2}$, 则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 有唯一整体古典解 $u\in C^2([0,\infty);C_B^2(\mathbb{R}))$.

3. Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 解的爆破

采用定理 3.3.4 中的方法可证如下定理.

定理 3.3.7 设 $u_0,u_1\in L^2$, $F(u_0)\in L^1$, $\Lambda^{-1}u_0,\Lambda^{-1}u_1\in L^2$, 且存在一常数 $\gamma>0$, 使得

$$f(y)y\leqslant 2\gamma y^2+[(2+4\gamma)+|\nu_2|]F(y),\quad \forall y\in\mathbb{R},$$

则 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的广义解 $u(x,t)\in C^2([0,T_0);H^s)\left(s>\frac{1}{2}\right)$ 或 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破, 若下列条件之一成立:

(1) $E(0)<0$;

(2) $E(0)=0, (\Lambda^{-1}u_1,\Lambda^{-1}u_0)+(u_1,u_0)>0$;

(3) $E(0)>0$,

$$(\Lambda^{-1}u_1,\Lambda^{-1}u_0)+(u_1,u_0)\geqslant\left\{\frac{[2+4\gamma+|\nu_2|]E(0)}{2(2\gamma+1)}(\|\Lambda^{-1}u_0\|^2+\|u_0\|^2)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

3.3.4 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [177]. 与本节内容有关的文献见 [25], [30], [32], [33], [35], [43], [100], [160], [161], [164], [168], [175], [178]. [361].

3.4 六阶 Boussinesq 型方程的 Cauchy 问题

3.4.1 引言

本节讨论下面一类六阶 Boussinesq 型方程的 Cauchy 问题

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{xxtt} + av_{x^4} + v_{x^4tt} = g(v)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.4.1}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.4.2}$$

其中 $v(x,t)$ 是未知函数, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ 是常数, $g(s)$ 是给定的非线性函数, $v_0(x)$ 和 $v_1(x)$ 是给定的初值函数.

文献 [179] 研究具有表面张力的水波问题时, 提出了下面的六阶非线性波动方程

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{xxtt} + av_{x^4} + v_{x^4tt} = (v^2)_{xx}, \tag{3.4.3}$$

其中 $v(x,t)$ 表示未知函数, $a \in \mathbb{R}$. 显然, 当 $a > 0$ 时, 方程 (3.4.3) 是方程 (3.4.1) 的特殊情形. 文献 [179] 的作者证明了可以用两个不耦合的 Kawahara 方程来描述方程 (3.4.3), 但是对于方程 (3.4.3) 的 Cauchy 问题没有任何讨论.

众所周知, 方程 (3.4.3) 和许多波动方程有着紧密联系. 例如, IMBq 方程等.

本节将证明 Cauchy 问题 (3.4.1), (3.4.2) 存在唯一整体解, 并且给出解爆破的充分条件. 为简单起见, 作尺度变换

$$v(x,t) = u(y,\tau) = u(x, \sqrt{a}t),$$

则方程 (3.4.1) 可以改写为

$$au_{\tau\tau} - u_{yy} - au_{yy\tau\tau} + au_{y^4} + au_{y^4\tau\tau} = g(u)_{yy}$$

或

$$u_{\tau\tau} - u_{yy} - u_{yy\tau\tau} + u_{y^4} + u_{y^4\tau\tau} = \frac{1}{a}[g(u) + (1-a)u]_{yy}.$$

不失一般性, 我们将讨论下面的 Cauchy 问题

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{x^4} + u_{x^4tt} = \phi(u)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{3.4.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.4.5}$$

其中 $u(x,t)$ 是未知函数, $\phi(s)$ 是给定的非线性函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是给定的初值函数.

3.4.2 Cauchy 问题 (3.4.4), (3.4.5) 的局部解

下面利用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (3.4.4), (3.4.5) 局部解的存在性和唯一性. 为此, 我们改写方程 (3.4.4) 为

$$u_{tt} + u = L\phi(u) + Pu, \tag{3.4.6}$$

其中算子 $L = (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)^{-1}\partial_x^2$ 和算子 $P = (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)^{-1}$.

定义 3.4.1 对任意的 $T > 0$, 如果函数 $u \in C^2([0,T]; H^s)$ $\left(s > \dfrac{1}{2}\right)$ 是 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 的弱解, 则称 $u(x,t)$ 为 Cauchy 问题 (3.4.4), (3.4.5) 的弱解. 如果 $T < \infty$, 则称 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.4.4), (3.4.5) 的局部弱解. 如果 $T = \infty$, 则称 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.4.4), (3.4.5) 的整体弱解.

为了利用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 局部解的存在性和唯一性, 我们需要下面的引理.

考虑下面线性方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt} + u = h(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{3.4.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.4.8}$$

引理 3.4.1 设 $s \in \mathbb{R}$. 假设 $u_0, u_1 \in H^s$ 和 $h \in L^1([0,T]; H^s)$, 则对于任意的 $T > 0$, Cauchy 问题 (3.4.7), (3.4.8) 存在唯一解 $u \in C^1([0,T]; H^s)$, 并且成立

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant 2\left(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s} + \int_0^t \|h(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\right). \tag{3.4.9}$$

证明 首先假设 $u_0, u_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ 和 $h \in C^\infty([0,T]; \mathscr{S}(\mathbb{R}))$. 对方程 (3.4.7) 和初始值 (3.4.8) 进行 Fourier 变换得

$$\begin{aligned} &\hat{u}_{tt}(\xi,t) + \hat{u}(\xi,t) = \hat{h}(\xi,t), \\ &\hat{u}(\xi,0) = \hat{u_0}(\xi), \quad \hat{u_t}(\xi,0) = \hat{u_1}(\xi), \end{aligned}$$

解上面的常微分方程的 Cauchy 问题, 有

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u_0}(\xi)\cos t + \hat{u_1}(\xi)\sin t + \int_0^t \sin(t-\tau)\hat{h}(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3.4.10}$$

注意到 $\cos t$, $\sin t$ 以及它们关于 t 的导数都是有界的光滑函数. 由于 Fourier 变换 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 到 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 是同构的, 因此由式 (3.4.10) 确定的解 $\hat{u}(x,t)$ 属于 $C^\infty([0,T]; \mathscr{S}(\mathbb{R}))$. 对 (3.4.10) 式进行 Fourier 逆变换, 得到

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \cos t e^{ix\xi}\hat{u_0}(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \sin t e^{ix\xi}\hat{u_1}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\sin(t-\tau)e^{ix\xi}\hat{h}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau, \tag{3.4.11}$$

其中 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\cos te^{ix\xi}\hat{u}_0(\xi)\mathrm{d}x$ 表示 $\cos t\hat{u}_0(\xi)$ 关于 ξ 的 Fourier 逆变换.

记

$$S(t)u_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\sin te^{ix\xi}\hat{u_1}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

则 (3.4.11) 式可以改写为

$$u(x,t)=\partial_tS(t)u_0(x)+S(t)u_1(x)+\int_0^tS(t-\tau)h(x,\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3.4.12}$$

对于式 (3.4.12) 右端的三项, 我们有下面的估计

$$\|\partial_tS(t)u_0(x)\|_{H^s}=\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_0(\xi)\cos t\|\leqslant\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_0(\xi)\|=\|u_0\|_{H^s}, \tag{3.4.13}$$

$$\|S(t)u_1\|_{H^s}=\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u_1}(\xi)\sin t\|\leqslant\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u_1}(\xi)\|=\|u_1\|_{H^s}, \tag{3.4.14}$$

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^tS(t-\tau)h(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right\|_{H^s}&=\left\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\int_0^t\sin(t-\tau)\hat{h}(\xi,\tau)d\tau\right\|\\&\leqslant\int_0^t\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{h}(\xi,\tau)\|\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t\|h(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

由式 (3.4.12)–(3.4.15) 推出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^s}+\int_0^t\|h(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau. \tag{3.4.16}$$

式 (3.4.12) 两端对 t 求导, 有

$$u_t(x,t)=\partial_{tt}S(t)u_0(x)+\partial_tS(t)u_1(x)+\int_0^t\partial_tS(t-\tau)h(x,\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{3.4.17}$$

其中

$$\partial_tS(t)u_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\cos te^{ix\xi}\hat{u}_1(\xi)d\xi;$$

$$\partial_{tt}S(t)u_0(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\sin te^{ix\xi}\hat{u}_0(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

下面的估计成立

$$\|\partial_{tt}S(t)u_0\|_{H^s}=\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}(-\hat{u}_0(\xi)\sin t)\|\leqslant\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_0(\xi)\|=\|u_0\|_{H^s}; \tag{3.4.18}$$

$$\|\partial_t S(t)u_1\|_{H^s} = \|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_1(\xi)\cos t)\| \leqslant \|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_1(\xi)\| = \|u_1\|_{H^s}; \tag{3.4.19}$$

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t \partial_t S(t-\tau)h(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right\|_{H^s} &= \left\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\int_0^t \cos(t-\tau)\hat{h}(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\right\| \\ &\leqslant \int_0^t \|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\cos(t-\tau)\hat{h}(\xi,\tau)\|\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \int_0^t \|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{h}(\xi,\tau)\|\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \|h(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

由式 (3.4.17)–(3.4.20) 推出

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s} + \int_0^t \|h(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau.$$

综合式 (3.4.16) 和上面的不等式, 有

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant 2\left(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s} + \int_0^t \|h(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\right).$$

因为 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 在 $H^s(\mathbb{R})$ 中稠密和 $C^\infty([0,T])$ 在 $L^1([0,T])$ 中稠密, 所以对于 $u_0, u_1 \in H^s, h \in L^1([0,T];H^s)$, 由式 (3.4.10) 给出的解 $u(x,t)$, 估计 (3.4.9) 仍成立.

解的存在性. 现在对于 $u_0, u_1 \in H^s$ 和 $h \in L^1([0,T];H^s)$, 证明 Cauchy 问题 (3.4.7), (3.4.8) 存在唯一解且有估计式 (3.4.9). 因为 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 在 $H^s(\mathbb{R})$ 中稠密和 $C^\infty([0,T])$ 在 $L^1([0,T])$ 中稠密, 于是选取 $\{u_0^j\}_{j=1}^\infty, \{u_1^j\}_{j=1}^\infty \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ 和 $\{h^j(x,t)\}_{j=1}^\infty \subset C^\infty([0,T];\mathscr{S}(\mathbb{R}))$, 使得当 $j\to\infty$ 时, 有

$$\|u_0^j - u_0\|_{H^s} \to 0, \quad \|u_1^j - u_1\|_{H^s} \to 0, \quad \|h^j - h\|_{L^1([0,T];H^s)} \to 0.$$

记 $u^j(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.4.7), (3.4.8) 关于初值函数 $u_0^j(x), u_1^j(x)$ 和右端项 $h^j(x,t)$ 的解. 定义函数空间

$$X(T) = C^1([0,T];H^s)$$

和其范数为

$$\|u\|_{X(T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}), \quad \forall u \in X(T),$$

则 $X(T)$ 是一 Banach 空间. 对于光滑解 $u^j(x,t)$, 有

$$\|u^j(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t^j(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant 2\left(\|u_0^j\|_{H^s} + \|u_1^j\|_{H^s} + \int_0^t \|h^j(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\right).$$

于是

$$\|u^j(\cdot,t)-u^k(\cdot,t)\|_{X(T)}\leqslant 2\left(\|u_0^j-u_0^k\|_{H^s}+\|u_1^j-u_1^k\|_{H^s}\right.$$
$$\left.+\int_0^t\|h^j(\cdot,\tau)-h^k(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\right).$$

因此 $\{u^j(x,t)\}_{j=1}^\infty$ 是 $X(T)$ 中的基本序列, 于是此序列在 $X(T)$ 中收敛于极限函数 $u(x,t)$. 所以 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.4.7), (3.4.8) 的解且 $u\in C^1([0,T];H^s)$.

下面证明解的唯一性. 假设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.4.7), (3.4.8) 的两个解. 记 $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. 因为 $u_1,u_2\in C^1([0,T];H^s)$, 由式 (3.4.9) 推出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant 0.$$

因此 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$. □

引理 3.4.2　设 $s\geqslant 0$, 算子L 在 H^s 上是有界的, 即

$$\|Lu\|_{H^s}\leqslant\|u\|_{H^s}.$$

证明　对于 $s\geqslant 0$ 和 $u\in H^s$, 我们有

$$\|Lu\|_{H^s}=\|(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}Lu\|=\left\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\frac{-\xi^2}{1+\xi^2+\xi^4}\hat{u}\right\|$$
$$\leqslant\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}\|=\|u\|_{H^s}.$$

□

类似地, 可以证明如下引理 3.4.3.

引理 3.4.3　算子 P 在 H^s 上有界, 即

$$\|Pu\|_{H^s}\leqslant\|u\|_{H^s}.$$

现在利用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 存在唯一局部解. 为此, 假设 $\phi(0)=0$. 对 $s>\dfrac{1}{2},u_0,u_1\in H^s$, 定义空间

$$X(T)=\{u|u\in C^1([0,T];H^s),u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x)\}$$

和其范数为

$$\|u\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}),\quad\forall u\in X(T).$$

显然, 对于任意的 $T>0,X(T)$ 是一 Banach 空间.

如果 $u \in X(T)$, 由 Sobolev 嵌入定理知 $u \in C^1([0,T];L^\infty)$ 且 $\|u\|_\infty \leqslant C_3\|u\|_{H^s}$. 令 $b = \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s}$, 且定义集合

$$Y(T) = \{u \in X(T) | \|u\|_{X(T)} \leqslant 3b\}.$$

显然对任意的 $b, T > 0, Y(T)$ 是 $X(T)$ 中的有界闭凸子集.

对任意的 $\omega(x,t) \in Y(T)$, 考虑线性方程

$$u_{tt} + u = L\phi(\omega) + P\omega. \tag{3.4.21}$$

利用引理 3.4.2, 引理 3.4.3 和引理 1.8.3, 得

$$\begin{aligned}\|L\phi(\omega) + P\omega\|_{H^s} &\leqslant \|L\phi(\omega)\|_{H^s} + \|P\omega\|_{H^s} \\ &\leqslant \|\phi(\omega)\|_{H^s} + \|\omega(\cdot,t)\|_{H^s} \\ &\leqslant (C_1(b)+1)\|\omega(\cdot,t)\|_{H^s},\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

其中 $C_1(b)$ 是依赖于 b 的常数, 故 $L\phi(\omega) + P\omega \in C([0,T];H^s)$.

由引理 3.4.1 知, 问题 (3.4.21), (3.4.5) 存在唯一解 $u \in X(T)$. 令 S 表示从 ω 到问题 (3.4.21), (3.4.5) 解的映射. 下面证明对于适当选择的 T, S 在 $Y(T)$ 中有唯一的不动点.

引理 3.4.4 设 $s > \dfrac{1}{2}, u_0, u_1 \in H^s, \phi \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ 和 $\phi(0) = 0$, 则当 T 相对于 b 足够小时, S 是从 $Y(T)$ 到自身的严格压缩映射.

证明 首先证明 S 映 $Y(T)$ 到自身. 设 $\omega \in Y(T)$, 令 $h(x,t) = L\phi(\omega) + P\omega$. 由式 (3.4.22) 推出 $h \in L^1([0,T];H^s)$. 由引理 3.4.1 推出问题 (3.4.21), (3.4.5) 存在唯一解 $u \in C^1([0,T];H^s)$ 且成立估计

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^s} &\leqslant 2\left(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s} + \int_0^t \|h(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\right) \\ &\leqslant 2(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s}) + 2(C_1(b)+1)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\omega(\cdot,t)\|_{H^s}T \\ &\leqslant 2(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s}) + 2(C_1(b)+1)\|\omega\|_{X(T)}T \\ &\leqslant 2b + 6b(C_1(b)+1)T.\end{aligned}$$

取

$$T \leqslant \frac{1}{6(C_1(b)+1)}, \tag{3.4.23}$$

则 $\|u\|_{X(T)} \leqslant 3b$. 因此 S 映 $Y(T)$ 到自身.

现在证明 S: $Y(T) \mapsto Y(T)$ 是严格压缩的. 设 $T > 0$ 和 $\omega_1, \omega_2 \in Y(T)$. 令 $u_1(x,t) = S\omega_1(x,t), u_2(x,t) = S\omega_2(x,t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ 和 $\omega(x,t) =$

$\omega_1(x,t)-\omega_2(x,t)$, 则 $u(x,t)$ 满足

$$u_{tt}+u=H(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T], \tag{3.4.24}$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.4.25}$$

其中 $H(x,t)=L(\phi(\omega_1)-\phi(\omega_2))+P\omega$.

利用引理 3.4.1 和引理 3.4.2, 引理 1.8.14, 式 (3.4.24)–(3.4.25), 得到

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}&\leqslant 2\int_0^t\|H(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\&=2\int_0^t\|L(\phi(\omega_1)-\phi(\omega_2))+P\omega\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\&\leqslant 2\left[C_2(b)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\omega(\cdot,t)\|_{H^s}+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\omega(\cdot,t)\|_{H^s}\right]T\\&\leqslant 2(C_2(b)+1)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\omega(\cdot,t)\|_{H^s}T.\end{aligned}$$

因此有

$$\|u\|_{X(T)}\leqslant 2(C_2(b)+1)T\|\omega\|_{X(T)}.$$

取 T 满足式 (3.4.23) 和

$$T\leqslant\frac{1}{4(C_2(b)+1)}, \tag{3.4.26}$$

则

$$\|u\|_{X(T)}\leqslant\frac{1}{2}\|\omega\|_{X(T)},$$

即 $S:Y(T)\mapsto Y(T)$ 是严格压缩映射. □

利用压缩映射原理和引理 3.4.4, 我们可以证明下面的定理.

定理 3.4.1　设 $s>\frac{1}{2}, u_0,u_1\in H^s,\phi\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ 和 $\phi(0)=0$, 则 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 存在唯一局部解 $u\in C^2([0,T^0);H^s)$, 其中 $[0,T^0)$ 是解存在的最大时间区间. 而且, 如果

$$\sup_{0\leqslant t<T^0}[\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}]<\infty, \tag{3.4.27}$$

则 $T^0=\infty$.

3.4.3　Cauchy 问题 (3.4.4), (3.4.5) 整体解的存在性和唯一性

对于 Cauchy 问题 (3.4.4), (3.4.5), 我们有下面的结果.

定理 3.4.2 设 $s>\frac{1}{2}, u_0, u_1 \in H^s, \phi \in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), \phi(0)=0$, 则 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 存在唯一解 $u \in C^2([0,T^0);H^s)$, 其中 $[0,T^0)$ 是最大时间区间, 如果

$$\sup_{t\in[0,T^0)} \|u(\cdot,t)\|_\infty \leqslant M_2, \tag{3.4.28}$$

其中 $M_2>0$ 是一常数, 则 $T^0=\infty$.

证明 从式 (3.4.6) 和 Hölder 不等式推出

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|u(\cdot,t)\|_{H^s}^2+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}^2\right)\\
=&\frac{d}{dt}\left(\|(1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u(\cdot,t)\|^2+\|(1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\|^2\right)\\
=&2\left((1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u(\cdot,t),(1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\right)\\
&+2\left((1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_{tt}(\cdot,t),(1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\right)\\
=&2\left((1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}(u_{tt}(\cdot,t)+u(\cdot,t)),(1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\right)\\
=&2\left((1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}(L\phi(u)+Pu),(1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\right)\\
\leqslant&2\|(1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}(L\phi(u)+Pu)\|\|(1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\|\\
=&2\|L\phi(u)+Pu\|_{H^s}\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{3.4.29}$$

利用引理 3.4.2, 引理 3.4.3 和引理 1.8.13 及条件 (2.7.28), 有

$$\begin{aligned}
\|L\phi(u)+Pu\|_{H^s}&\leqslant\|L\phi(u)\|_{H^s}+\|Pu\|_{H^s}\\
&\leqslant\|\phi(u)\|_{H^s}+\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\\
&\leqslant C_1(M_2)\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\\
&\leqslant(C_1(M_2)+1)\|u(\cdot,t)\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{3.4.30}$$

利用式 (3.4.29), (3.4.30) 和 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\|u(\cdot,t)\|_{H^s}^2+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}^2)&\leqslant 2(C_1(M_2)+1)\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}\\
&\leqslant(C_1(M_2)+1)(\|u(\cdot,t)\|_{H^s}^2+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}^2).
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式给出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}^2+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}^2\leqslant(\|u_0\|_{H^s}^2+\|u_1\|_{H^s}^2)e^{(C_1(M_2)+1)t},\quad \forall t\in(0,T^0).$$

由 Cauchy 不等式推得

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\sqrt{2}(\|u(\cdot,t)\|_{H^s}^2+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}^2)^{\frac{1}{2}},\quad \forall t\in(0,T^0).$$

由定理 3.4.1, 我们知道 $T^0 = \infty$. □

为了给出 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 整体解存在的条件, 需要下面的引理.

引理 3.4.5　设 $s \geqslant 2, u_0, u_1 \in H^s, \Lambda^{-1}u_1 \in L^2, \phi \in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), \phi(0) = 0, \Phi(v) = \int_0^v \phi(\tau)d\tau$ 和 $\Phi(u_0) \in L^1$, 则 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 的解 $u(x,t)$ 满足能量等式

$$\begin{aligned}E(t) = &\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u(\cdot,t)\|^2 + \|u_t(\cdot,t)\|^2 \\ &+ \|u_x(\cdot,t)\|^2 + \|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 + 2\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(u)\mathrm{d}x = E(0),\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

其中

$$E(0) = \|\Lambda^{-1}u_1\|^2 + \|u_0\|^2 + \|u_1\|^2 + \|u_{0x}\| + \|u_{1x}\| + 2\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(u_0)\mathrm{d}x.$$

证明　对 $T < T^0$, 从定理 3.4.1 推出 $u \in H^2, u_t \in H^1$ 和 $u_{tt} \in L^2$. 根据 Sobolev 嵌入定理, 得 $u \in L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$. 因为

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{-2}u_{tt}\| &= \||\xi|^{-2}\hat{u}_{tt}\| = \||\xi|^{-2}(-\hat{u} + \hat{L}\phi(u) + \hat{P}u)\| \\ &= \left\||\xi|^{-2}\left(-\hat{u} - \frac{|\xi|^2\hat{\phi}(u) - \hat{u}}{1+|\xi|^2+|\xi|^4}\right)\right\| \\ &= \left\|\frac{(1+|\xi|^2)\hat{u} - \hat{\phi}(u)}{1+|\xi|^2+|\xi|^4}\right\| \\ &\leqslant (1 + C_1(M_2))\|u(\cdot,t)\|,\end{aligned}$$

则 $\Lambda^{-2}u_{tt} \in L^2$. 对方程 (3.4.6) 作 Fourier 变换, 得

$$\hat{u}_{tt} + \hat{u} = \frac{-|\xi|^2\hat{\phi}(u) + \hat{u}}{1+|\xi|^2+|\xi|^4}. \tag{3.4.32}$$

方程 (3.4.32) 的两端乘以 $|\xi|^{-2}(1+|\xi|^2+|\xi|^4)\hat{u}_t$, 并在 $\mathbb{R}$ 上关于 ξ 积分, 可见

$$(|\xi|^{-2}(1+|\xi|^2+|\xi|^4)(\hat{u}_{tt}+\hat{u}) + \hat{\phi}(u) - |\xi|^2\hat{u}, \hat{u}_t) = 0. \tag{3.4.33}$$

对式 (3.4.33) 作 Fourier 逆变换, 有

$$(\Lambda^{-2}u_{tt} + u_{tt} - u_{xxtt} + u - u_{xx} + \phi(u), u_t) = 0,$$

即

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0.$$

因此, $E(t) = E(0)$. □

定理 3.4.3 设 $s \geqslant 2, u_0, u_1 \in H^s, \Lambda^{-1}u_1 \in L^2$; $\phi \in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), \phi(0)=0, \Phi(v)=\int_0^v \phi(\tau)\mathrm{d}\tau, \Phi(u_0) \in L^1$ 和 $\Phi(v) \geqslant 0$ 或 $\phi'(v)$ 是下有界的, 即存在一个常数 C_0, 使得 $\phi'(v) \geqslant C_0, \forall v \in \mathbb{R}$, 则 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 存在唯一的整体解 $u \in C^2([0,\infty); H^s)$.

证明 从定理 3.4.1 知 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 存在唯一解 $u \in C^2([0,T^0); H^s)$. 为了证明 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 存在唯一整体解, 仅需验证式 (3.4.28) 成立.

如果 $\Phi(v) \geqslant 0$, 由式 (3.4.31) 得

$$\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2+\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2+\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 \leqslant E(0). \quad (3.4.34)$$

如果 $\phi'(v)$ 下有界, 令 $\phi_0(u)=\phi(u)-k_0u$, 其中 $k_0 \leqslant \min\{C_0,0\}(\leqslant 0)$, 则 $\phi_0(0)=0, \phi_0'(u)=\phi'(u)-k_0 \geqslant C_0-k_0 \geqslant 0$. 因此 $\phi_0(u)$ 是单增函数, $\Phi_0(u)=\int_0^u \phi_0(s)ds \geqslant 0$. 注意到

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=\int_0^u \phi(\tau)\tau d\tau=\int_0^u [\phi_0(\tau)+k_0\tau]d\tau\\&=\int_0^u \phi_0(\tau)d\tau+\frac{k_0}{2}u^2(x,t)=\Phi_0(u)+\frac{k_0}{2}u^2(x,t).\end{aligned}$$

利用式 (3.4.31), 有

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2+\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2\\&+\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2+2\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0(u)dx+k_0\|u(\cdot,t)\|^2=E(0).\end{aligned}$$

从上面的不等式, 可知

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2+\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2+\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2\\&\leqslant E(0)-k_0\|u(\cdot,t)\|^2\\&=E(0)-k_0\int_0^t \frac{d}{d\tau}\|u(\cdot,\tau)\|^2d\tau-k_0\|u_0\|^2\\&=E(0)-k_0\|u_0\|^2-2k_0\int_0^t (u,u_\tau)d\tau\\&\leqslant E(0)-k_0\|u_0\|^2+\int_0^t (k_0^2\|u(\cdot,\tau)\|^2+\|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2)d\tau\\&\leqslant E(0)-k_0\|u_0\|^2+(k_0^2+1)\int_0^t (\|u(\cdot,\tau)\|^2+\|u_\tau(\cdot,\tau)\|^2)d\tau.\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式得到

$$\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2+\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2+\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2$$
$$\leqslant (E(0)-k_0\|u_0\|^2)e^{(k_0^2+1)t},\quad \forall t\in[0,T^0). \tag{3.4.35}$$

不等式 (3.4.34) 或 (3.4.35) 保证对任意的 $t\in[0,T^0)$, $\|u(\cdot,t)\|_{H^1}$ 是一致有界的. 利用 Sobolev 嵌入定理, 我们得到 $\|u(\cdot,t)\|_\infty<\infty, \forall t\in[0,T^0)$. 因此从定理 3.4.2, 我们知道 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 存在唯一整体解 $u\in C^2([0,\infty);H^s)$. □

注 3.4.1　在定理 3.4.3 的条件下, 如果 $s=4$, 则 Cauchy 问题 (3.4.4), (3.4.5) 存在唯一整体广义解. 如果 $s>\dfrac{9}{2}$, 则 Cauchy 问题 (3.4.4), (3.4.5) 存在唯一整体古典解.

3.4.4　解的爆破

下面利用凸性引理证明 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 解的爆破.

定理 3.4.4　设 $\phi\in C(\mathbb{R}), u_0,u_1\in H^1, \Lambda^{-1}u_1\in L^2, \Phi(s)=\int_0^s\phi(\tau)d\tau, \Phi(u_0)\in L^1$ 且存在常数 $\delta>0$, 使得

$$\phi(s)s\leqslant(4\delta+2)\Phi(s)+2\delta s^2,\quad\forall s\in\mathbb{R}, \tag{3.4.36}$$

则 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 的广义解或古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻发生爆破, 如果下列之一成立:

(1) $E(0)<0$;

(2) $E(0)=0, (\Lambda^{-1}u_0,\Lambda^{-1}u_1)+(u_0,u_1)+(u_{0x},u_{1x})>0$;

(3) $E(0)>0$,

$$(\Lambda^{-1}u_0,\Lambda^{-1}u_1)+(u_0,u_1)+(u_{0x},u_{1x})>2\sqrt{E(0)[\|\Lambda^{-1}u_0\|^2+\|u_0\|^2+\|u_{0x}\|^2]}.$$

证明　设 Cauchy 问题 (3.4.6), (3.4.5) 的广义解或古典解存在的时间为无穷. 令

$$H(t)=\|\Lambda^{-1}u(\cdot,t)\|^2+\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2+\delta_0(t+t_0)^2, \tag{3.4.37}$$

其中 δ_0 和 t_0 是待定的非负常数, 则

$$\dot{H}(t)=2(\Lambda^{-1}u,\Lambda^{-1}u_t)+2(u,u_t)+2(u_x,u_{xt})+2\delta_0(t+t_0).$$

利用 Hölder 不等式, 有

$$(\dot{H}(t))^2\leqslant 4[\|\Lambda^{-1}u(\cdot,t)\|^2+\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|+\delta_0(t+t_0)^2]$$

$$\times [\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 + \delta_0]$$
$$= 4H(t)[\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 + \delta_0]. \tag{3.4.38}$$

利用式 (3.4.4), (3.4.31) 和式 (3.4.36), 有

$$\begin{aligned}
\ddot{H}(t) &= 2\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + 2\|u_t(\cdot,t)\|^2 + 2\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 + 2\delta_0 \\
&\quad + 2(\Lambda^{-1}u, \Lambda^{-1}u_{tt}) + 2(u, u_{tt}) + 2(u_x, u_{xtt}) \\
&= 2\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + 2\|u_t(\cdot,t)\|^2 + 2\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 \\
&\quad + 2\delta_0 + 2(u, \Lambda^{-2}u_{tt} + u_{tt} - u_{xxtt}) \\
&= \|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + 2\|u_t(\cdot,t)\|^2 + 2\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 \\
&\quad + 2\delta_0 + 2(u, -u + u_{xx} - \phi(u)) \\
&= 2\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + 2\|u_t(\cdot,t)\|^2 + 2\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 \\
&\quad + 2\delta_0 - 2\|u(\cdot,t)\|^2 - 2\|u_x(\cdot,t)\|^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)u(x,t)dx \\
&= 4(1+\delta)[\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 + \delta_0] \\
&\quad - (4\delta+2)E(0) + 4\delta\|u(\cdot,t)\|^2 \\
&\quad + 4\delta\|u_x(\cdot,t)\|^2 + 2(4\delta+2)\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u)dx \\
&\quad - 2\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)u(x,t)dx - (4\delta+2)\delta_0 \\
&\geqslant 4(1+\delta)[\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u_t(\cdot,t)\|^2 + \|u_{xt}(\cdot,t)\|^2 + \delta_0] \\
&\quad - (4\delta+2)[E(0) + \delta_0].
\end{aligned} \tag{3.4.39}$$

从式 (3.4.37)–(3.4.39), 得到

$$\ddot{H}(t)H(t) - (\delta+1)\dot{H}(t)^2 \geqslant -(4\delta+2)[E(0)+\delta_0]H(t). \tag{3.4.40}$$

如果 $E(0) < 0$, 取 $\delta_0 = -E(0) > 0$, 则

$$\ddot{H}(t)H(t) - (\delta+1)(\dot{H}(t))^2 \geqslant 0.$$

取 t_0 足够大, 使得 $\dot{H}(0) > 0$. 由引理 1.8.7 知, $H(t)$ 在 T_1 时刻为无穷大, 其中 $T_1 \leqslant \tilde{T} = \dfrac{H(0)}{\delta \dot{H}(0)} < \infty$.

如果 $E(0) = 0$, 取 $\delta_0 = 0$, 则

$$\ddot{H}(t)H(t) - (\delta+1)(\dot{H}(t))^2 \geqslant 0.$$

由条件 (2) 知 $\dot{H}(0)>0$. 由引理 1.8.7 知, 当 $t\longrightarrow T_1$ 时, 有 $H(t)\longrightarrow\infty$, 其中 $T_1\leqslant\tilde{T}=\dfrac{H(0)}{\delta\dot{H}(0)}<\infty$.

如果 $E(0)>0$, 取 $\delta_0=0$, 则式 (3.4.40) 变为

$$\ddot{H}(t)H(t)-(\delta+1)(\dot{H}(t))^2\geqslant-(4\delta+2)E(0)H(t). \tag{3.4.41}$$

令

$$J(t)=H^{-\delta}(t),$$

则

$$\begin{aligned}\dot{J}(t)&=-\delta H^{-\delta-1}(t)\dot{H}(t),\\ \ddot{J}(t)&=\delta(\delta+1)H^{-\delta-2}(t)(\dot{H}(t))^2-\delta H^{-\delta-1}(t)\ddot{H}(t)\\ &=-\delta H^{-\delta-2}(t)[H(t)\ddot{H}(t)-(\delta+1)(\dot{H}(t))^2]\\ &\leqslant\delta(4\delta+2)E(0)H^{-\delta-1}(t).\end{aligned} \tag{3.4.42}$$

由条件 (3) 知 $\dot{J}(0)<0$. 令

$$t^*=\sup\{t|\dot{J}(\tau)<0,\tau\in[0,t)\}. \tag{3.4.43}$$

由 $\dot{J}(t)$ 的连续性知, t^* 是正的. 式 (3.4.42) 两端同乘以 $2\dot{J}(t)$, 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\dot{J}(t)^2]&\geqslant2\delta(4\delta+2)E(0)H^{-\delta-1}(t)\dot{J}(t)\\ &=-2\delta^2(4\delta+2)E(0)H^{-2\delta-2}(t)\dot{H}(t)\\ &=4\delta^2E(0)\frac{d}{dt}[H^{-2\delta-1}(t)],\quad\forall t\in(0,t^*).\end{aligned} \tag{3.4.44}$$

对 $0\leqslant t\leqslant t^*$, 在 $[0,t)$ 上对式 (3.4.44) 的两端积分, 得

$$(\dot{J}(t))^2\geqslant4\delta^2E(0)H^{-2\delta-1}(t)+\dot{J}(0)^2-4\delta^2E(0)H^{-2\delta-1}(0).$$

利用条件 (3), 可见

$$\dot{J}(0)^2-4\delta^2E(0)H^{-2\delta-1}(0)>0.$$

依 $\dot{J}(t)$ 的连续性, 得到

$$\dot{J}(t)\leqslant-[\dot{J}(0)^2-4\delta^2E(0)H^{-2\delta-1}(0)]^{\frac{1}{2}},\quad\forall t\in[0,t^*). \tag{3.4.45}$$

由 t^* 的定义知, 式 (3.4.45) 对所有的 $t\geqslant0$ 都成立. 在 $(0,t)$ 上对式 (3.4.45) 积分, 有

$$J(t)\leqslant J(0)-[\dot{J}(0)^2-4\delta^2E(0)H^{-2\delta-1}(0)]^{\frac{1}{2}}t,\quad\forall t>0.$$

因此存在 $T_1 \in (0, T_0]$, 使得 $J(T_1) = 0$, 其中 $T_0 = J(0)[\dot{J}(0)^2 - 4\delta^2 E(0) H^{-2\delta-1}(0)]^{-\frac{1}{2}}$. 故 $H(t)$ 在 T_1 时刻成为无穷大.

所以在条件 (1)–(3) 的任一情况下, 当 $t \longrightarrow T_1$ 时, $H(t) \longrightarrow \infty$. 这与解存在的最大时间为无穷矛盾, 因此解存在的最大时间是有限的. □

对于 Cauchy 问题 (3.4.3), (3.4.2), 我们有下面的结果.

定理 3.4.5 设 $v_0, v_1 \in H^1$ 和 $\Lambda^{-1} v_1 \in L^2$, 则 Cauchy 问题 (3.4.3), (3.4.2) 的广义解或古典解 $v(x, t)$ 在有限时刻发生爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E_1(0) < 0$;

(2) $E_1(0) = 0$, $\left(\Lambda^{-1} v_0, \frac{1}{\sqrt{a}} \Lambda^{-1} v_1\right) + \left(v_0, \frac{1}{\sqrt{a}} v_1\right) + \left(v_{0x}, \frac{1}{\sqrt{a}} v_{1x}\right) > 0$;

(3) $E_1(0) > 0$,

$$\begin{aligned}
&\left(\Lambda^{-1} v_0, \frac{1}{\sqrt{a}} \Lambda^{-1} v_1\right) + \left(v_0, \frac{1}{\sqrt{a}} v_1\right) + \left(v_{0x}, \frac{1}{\sqrt{a}} v_{1x}\right) \\
&> 2\sqrt{E_1(0)[\|\Lambda^{-1} v_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|v_{0x}\|^2]},
\end{aligned}$$

其中

$$E_1(0) = \frac{1}{a}\|\Lambda^{-1} v_1\|^2 + \frac{1}{a}\|v_0\|^2 + \frac{1}{a}\|v_1\|^2 + \|v_{0x}\|^2 + \frac{1}{a}\|v_{1x}\|^2 + \frac{2}{3a}\int_{-\infty}^{\infty} v_0^3(x) dx.$$

证明 作尺度变换

$$v(x, t) = u(y, \tau) = u(x, \sqrt{a} t),$$

则 Cauchy 问题 (3.4.3), (3.4.2) 可以改写为

$$\begin{aligned}
&u_{\tau\tau} - u_{yy} - u_{yy\tau\tau} + u_{y^4} + u_{y^4\tau\tau} = \frac{1}{a}[u^2 + (1-a)u]_{yy}, \\
&u(y, 0) = v_0(y), \quad u_\tau(y, 0) = \frac{1}{\sqrt{a}} v_1(y).
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \frac{1}{a}(s^2 + (1-a)s), \\
\Phi(s) &= \int_0^s \phi(\tau) d\tau = \frac{1}{3a} s^3 + \frac{1-a}{2a} s^2.
\end{aligned}$$

取 $\delta = \frac{1}{4}$, 则下面的不等式成立

$$\phi(s) s \leqslant (4\delta + 2)\Phi(s) + 2\delta s^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

利用定理 3.4.4 知, 定理 3.4.5 的结果成立. □

3.4.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [180]. 与本节有关的文献见 [30], [32], [35], [43], [44], [53], [54], [56], [60], [94], [101], [160], [161], [181]–[189].

3.5 广义立方双色散方程的 Cauchy 问题

3.5.1 引言

2.5 节研究了广义立方双色散方程的初边值问题. 本节讨论下列广义立方双色散方程的 Cauchy 问题

$$v_{tt} - v_{xx} - av_{xxtt} + bv_{xxxx} - dv_{xxt} = f(x)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{3.5.1}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.5.2}$$

其中 $a > 0, b > 0$ 和 d 均为常数, $v(x,t)$ 表示变量 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t > 0$ 的未知函数, $v_0(x)$ 和 $v_1(x)$ 是已知的初值函数, 而 $f(v)$ 是给定的 v 的非线性函数.

为了讨论方便起见, 作尺度变换

$$v(x,t) = u(y,t) = u\left(\frac{1}{\sqrt{a}}x, \frac{\sqrt{b}}{a}t\right), \tag{3.5.3}$$

则 Cauchy 问题 (3.5.1), (3.5.2) 变为

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxx} - \alpha u_{xxt} = g(u)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{3.5.4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.5.5}$$

其中 $\alpha = \dfrac{d}{\sqrt{b}}, \varphi(x) = v_0(\sqrt{\alpha}x), \psi(x) = v_1(\sqrt{\alpha}x)$ 和 $g(u) = \dfrac{a}{b}\left[f(u) + \left(1 - \dfrac{a}{b}\right)u\right]$.

下面只研究 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 整体解的存在性、唯一性和解的爆破, 因为 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 通过尺度变换可以得到 Cauchy 问题 (3.5.1), (3.5.2) 的同样结果.

3.5.2 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 局部解的存在性与唯一性

现在运用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 存在唯一局部广义解. 为此, 方程 (3.5.4) 可以改写为

$$u_{tt} - u_{xx} = L[g(u)] + \alpha L[u_t], \tag{3.5.6}$$

其中 $L = (1 - \partial_x^2)^{-1}\partial_x^2$. 下面要用到等式

$$Lf = \partial_x^2(G * f) - f,$$

其中$G(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ 是二阶常微分方程的基本解 (见 3.3.2 子节). 应用 Fourier 变换易证上面的等式.

为了利用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 局部解的存在性和唯一性, 我们需要下面的引理.

引理 3.5.1 令 $s\in\mathbb{R}$. 对于任意的 $T>0$, 设 $\varphi\in H^s$, $\psi\in H^{s-1}$ 和 $h\in L^1([0,T];H^{s-1})$, 则线性波动方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt}-u_{xx}=h(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{3.5.7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R} \tag{3.5.8}$$

存在唯一解 $u\in C([0,T];H^s)\cap C^1([0,T];H^{s-1})$ 和有估计

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}\\ \leqslant\ &2\sqrt{2}(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^{s-1}}+\int_0^t\|h(\cdot,\tau)\|_{H^{s-1}}d\tau\right),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

证明 首先假定 $u_0,u_1\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 和 $h\in C^\infty([0,T];\mathscr{S}(\mathbb{R}))$, 其中 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 是 Schwartz 空间. 对于方程 (3.5.7) 和初值 (3.5.8) 进行 Fourier 变换得

$$\begin{aligned}&\hat{u}_{tt}(\xi,t)+|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)=\hat{h}(\xi,t),\\ &\hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi),\quad \hat{u}_t(\xi,0)=\hat{\psi}(\xi).\end{aligned}$$

解上面常微分方程的 Cauchy 问题, 有

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{\varphi}(\xi)\cos(t|\xi|)+\frac{\sin(t\xi)}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)+\int_0^t\frac{\sin(t-\tau)|\xi|}{|\xi|}\hat{h}(\xi,t)d\tau. \tag{3.5.10}$$

注意到 $\cos(t|\xi|)$ 和 $\dfrac{\sin(t\xi)}{|\xi|}$ 是关于 ξ 的有界光滑函数, 关于 ξ 的导数也是有界的光滑函数. 而关于 t 的导数对 $|\xi|$ 至多是多项式增长. 由于 Fourier 变换是 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 到 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 的等距同构映射, 所以由式 (3.5.10) 确定的解 $\hat{u}\in C^\infty(\mathbb{R},\mathscr{S}(\mathbb{R}))$. 对式 (3.5.10) 作 Fourier 逆变换, 得

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\cos(t|\xi|)\hat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\\ &+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(t-\tau)|\xi|}{|\xi|}\hat{h}(\xi,\tau)e^{ix\xi}d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

若记

$$S(t)\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$$

则式 (3.5.11) 可写为

$$u(x,t) = \dot{S}(t)\varphi(x) + S(t)\psi(x) + \int_0^t S(t-\tau)h(x,\tau)d\tau. \tag{3.5.12}$$

下面对式 (3.5.12) 的右端进行估计.

对于 $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|\dot{S}(t)\psi\|_{H^s} &= \left[\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s/2}\cos(t|\xi|)^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_{H^s}.\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

对于 $s \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\|S(t)\psi\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \frac{\sin^2(t|\xi|)}{|\xi|^2} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi|<1} (1+|\xi|^2)^s \frac{\sin^2(t|\xi|)}{|\xi|^2} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi|\geqslant 1} (1+|\xi|^2)^s \frac{\sin^2(t|\xi|)}{|\xi|^2} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leqslant t^2 \int_{|\xi|<1} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geqslant 1} (1+|\xi|^2)^s \frac{1}{|\xi|^2} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2t^2 \int_{|\xi|<1} (1+|\xi|^2)^{s-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi + 2\int_{|\xi|\geqslant 1} (1+|\xi|^2)^{s-1} \frac{1}{|\xi|^2} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2(1+t^2) \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2(1+t^2)\|\psi\|_{H^{s-1}}^2,\end{aligned}$$

所以

$$\|S(t)\psi\|_{H^s} \leqslant \sqrt{2}(1+t)\|\psi\|_{H^{s-1}}. \tag{3.5.14}$$

由式 (3.5.12)–(3.5.14) 推出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant 2\sqrt{2}(1+t)\left(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi|_{H^{s-1}} + \int_0^t \|h(\cdot,\tau)\|_{H^{s-1}} d\tau\right). \tag{3.5.15}$$

式 (3.5.12) 对 t 求导得

$$u_t(x,t) = \ddot{S}(t)\varphi(x) + \dot{S}(t)\psi(x) + \int_0^t \dot{S}(t-\tau)h(x,\tau)d\tau,$$

其中

$$\ddot{S}(t)\varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}|\xi|\sin(|\xi|t)\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

我们有

$$\|\ddot{S}(t)\varphi\|_{H^{s-1}} = \left[\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}}||\xi|\sin(|\xi|t)|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{s-1}(1+|\xi|^2)|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_{H^s},$$

$$\|\dot{S}(t)\psi(x)\|_{H^{s-1}} = \left[\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}}\hat{\psi}(\xi)\cos(|\xi|t)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\psi\|_{H^{s-1}}.$$

因此

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}} \leqslant \|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \|h(\cdot,\tau)\|_{H^{s-1}} d\tau. \tag{3.5.16}$$

于是由式 (3.5.15) 和式 (3.5.16) 知

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \|h(\cdot,t)\|_{H^{s-1}} d\tau\right). \tag{3.5.17}$$

因为 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 在 $H^s(\mathbb{R})$ 中稠密且 $C^\infty([0,T];\mathscr{S}(\mathbb{R}))$ 在 $L^1((0,T);H^{s-1})$ 中稠密, 所以对于 $\varphi \in H^s, \psi \in H^{s-1}$ 和 $h \in L^1([0,T];H^{s-1})$ 的估计式 (3.5.17) 对由式 (3.5.10) 确定的 $u(x,t)$ 仍成立.

现在证明, 对于 $\varphi \in H^s, \psi \in H^{s-1}, h \in L^1([0,T];H^{s-1})$ Cauchy 问题 (3.5.7), (3.5.8) 存在唯一解 $u \in C((0,T);H^s) \cap C^1((0,T);H^{s-1})$ 且有估计式 (3.5.9).

解的存在性 因为 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 在 H^s 中稠密, $C^\infty([0,T];\mathscr{S}(\mathbb{R}))$ 在 $L^1([0,T];H^{s-1})$ 中稠密, $\forall \varphi \in H^s, \psi \in H^{s-1}, h \in L^1([0,T];H^{s-1})$, 选取序列 $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty, \{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ 和 $\{h_j\}_{j=1}^\infty \subset C^\infty([0,T];\mathscr{S}(\mathbb{R}))$, 使得当 $j \to \infty$ 时,

$$\|\varphi_j - \varphi\|_{H^s} \to 0, \|\psi_j - \psi\|_{H^{s-1}} \to 0, \|h_j - h\|_{L^1([0,T];H^{s-1})} \to 0.$$

令 $u_j(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.5.7), (3.5.8) 关于初值函数 $\varphi_j(x), \psi_j(x)$ 和右端项 $h_j(x,t)$ 的解. 记

$$X(T) = C([0,T];H^s) \cap C^1([0,T];H^{s-1}),$$

则 $X(T)$ 是关于范数

$$\|u\|_{X(T)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T}(\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}})$$

的一个 Banach 空间. 对于光滑函数 $u_j(x,t)$ 有

$$\|u_j(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_{jt}(\cdot,t)\|_{H^{s-1}} \leqslant C(T)\left(\|\varphi_j\|_{H^s} + \|\psi_j\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \|h_j(\cdot,t)\|_{H^{s-1}} d\tau\right).$$

于是可得

$$\begin{aligned}&\|u_j(\cdot,t)-u_{jt}(\cdot,t)\|_{X(T)}\\&\leqslant C(T)\left(\|\varphi_j-\varphi_k\|_{H^s}+\|\psi_j-\psi_k\|_{H^{s-1}}+\int_0^t\|h_j(\cdot,t)-h_k(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}d\tau\right).\end{aligned}$$

所以 $\{u_j(x,t)\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $X(T)$ 中的基本序列, 从而在 $X(T)$ 中收敛于极限函数$u(x,t)$. 因此 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.5.7), (3.5.8) 的解.

解的唯一性 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.5.7), (3.5.8) 的两个解. 令 $u(x,t)=u_2(x,t)-u_1(x,t)$, 则 $u(x,t)$ 满足

$$\begin{aligned}&u_{tt}-u_{xx}=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\\&u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

因为 $u_1,u_2\in C([0,T];H^s)\cap C^1([0,T];H^{s-1})$, 利用估计 (3.5.9) 推出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}\leqslant 0,$$

所以几乎处处成立 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$. □

引理 3.5.2 对于所有的 $s\geqslant 0$, 算子 L 在 H^s 上是有界的, 且

$$\|Lu\|_{H^s}\leqslant\|u\|_{H^s},\quad\forall u\in H^s.$$

证明 对于 $u\in H^s$ 和 $s\geqslant 0$, 可知

$$\|Lu\|_{H^s}^2=\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s\frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^2}|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\leqslant\|u\|_{H^s}^2.$$ □

下面假定 $g(0)=0$. 否则, 可以用 $g(u)-g(0)$ 代替 $g(u)$. 对于 $s>\dfrac{1}{2}$, $\varphi\in H^s$ 和 $\psi\in H^{s-1}$, 定义空间

$$X(T)=\left\{u\in C([0,T];H^s)\cap C^1([0,T];H^{s-1})\mid u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)\right\},$$

并赋予范数

$$\|u\|_{X(T)}=\max_{t\in[0,T]}\left(\|u(t)\|_{H^s}+\|u_t\|_{H^{s-1}}\right),\quad u\in X(T),$$

则 $X(T)$ 是 Banach 空间.

由 Sobolev 嵌入定理知, 如果 $u\in X(T)$, 则 $u\in C([0,T];L^\infty)$ 和 $\|u\|_\infty\leqslant C\|u\|_{H^s}$. 令 $a=\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^{s-1}}$ 和

$$Y(T)=\left\{u\in X(T)\mid\|u\|_{X(T)}\leqslant 4\sqrt{2}a\right\}.$$

显然, 对于 $T \geqslant 0$, $Y(T)$ 是 $X(T)$ 的一非空闭凸子集.

对于 $w \in Y(T)$, 考虑线性方程

$$u_{tt} - u_{xx} = L[g(w)] + \alpha L[w_t]. \tag{3.5.18}$$

利用引理 3.5.2 和引理 1.8.13 得

$$\begin{aligned}\|L[g(w)] + \alpha L[w_t]\|_{H^s} &\leqslant \|L[g(w)]\|_{H^s} + |\alpha|\|L[w_t]\|_{H^s} \\ &\leqslant \|g(w)\|_{H^s} + |\alpha|\|w_t\|_{H^s} \\ &\leqslant C_1(a)\|w\|_{H^s} + |\alpha|\|w_t\|_{H^s},\end{aligned}$$

其中 $C_1(a)$ 是依赖于 a 的常数, 所以 $L[g(w)] + \alpha L[w_t] \in C([0,T]; H^s)$.

由引理 3.5.1 知, Cauchy 问题 (3.5.18), (3.5.5) 存在唯一解 $u \in X(T)$. 令 S 表示从 w 到 Cauchy 问题 (3.5.18), (3.5.5) 唯一解的映射. 下面证明相对于 a 充分小的 T, S 在 $Y(T)$ 中有唯一不动点.

引理 3.5.3 设 $s > \dfrac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$ 和 $g \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$, 则对于适当选择的 T, S 是从 $Y(T)$ 到自身的压缩映射.

证明 首先证明对于足够小的 T, S 映 $Y(T)$ 到自身. 令 $w \in Y(T)$ 给定. 定义

$$h(x,t) = L[g(w)] + \alpha L[w_t].$$

利用引理 3.5.2 和引理 1.8.13 推出

$$\begin{aligned}\|h(\cdot,t)\|_{H^{s-1}} &\leqslant \|g(w(\cdot,t))\|_{H^s} + |\alpha|\|w_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}} \\ &\leqslant C_1(a)\|w(\cdot,t)\|_{H^s} + |\alpha|\|w_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}},\end{aligned}$$

其中 $C_1(a)$ 是依赖于 a 的常数. 从上面的不等式断定 $h(x,t) \in L^1([0,T]; H^{s-1})$. 由引理 3.5.1 知, Cauchy 问题 (3.5.18), (3.5.5) 的解 $u = Sw$ 属于 $C([0,T]; H^s) \cap C^1([0,T]; H^{s-1})$ 和

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}} &\leqslant 2\sqrt{2}(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}} + \int_0^t \|h(\cdot,\tau)\|_{H^{s-1}} d\tau\right) \\ &\leqslant 2\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}[1 + 4\sqrt{2}(C_1(a) + |\alpha|)(1+T)]aT.\end{aligned}$$

选择 T 充分小, 使得

$$[1 + 4\sqrt{2}(C_1(a) + |\alpha|)(1+T)]T \leqslant 1, \tag{3.5.19}$$

于是 $\|Sw\|_{X(T)} \leqslant 4\sqrt{2}a$. 所以 S 映 $Y(T)$ 到 $Y(T)$.

现在证明, 当 T 充分小时, S 是严格压缩的. 令 $w, \bar{w} \in Y(T)$, 则对于 w 和 $\bar{w}$, 分别存在对应于 Cauchy 问题 (3.5.18), (3.5.5) 的解 $u = Sw$ 和 $\bar{u} = S\bar{w}$. 置 $U = u - \bar{u}$, $W = w - \bar{w}$, 则 U 满足

$$U_{tt} - U_{xx} = H(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \tag{3.5.20}$$

$$U(x,0) = U_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.5.21}$$

其中 $H(x,t)$ 定义为

$$H(x,t) = L[g(w) - g(\bar{w})] + \alpha L[W_t]. \tag{3.5.22}$$

注意到 Cauchy 问题 (3.5.20), (3.5.21) 的 $H(x,t)$ 有引理 3.5.1 要求的光滑性. 应用引理 3.5.1, 引理 3.5.2 和引理 1.8.14, 由式 (3.5.9) 和式 (3.5.22) 推出

$$\begin{aligned}
&\|U(\cdot,t)\|_{H^s} + \|U_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}} \\
\leqslant & 2\sqrt{2}(1+T)\int_0^t [\|g(w(\cdot,\tau)) - g(\bar{w}(\cdot,\tau))\|_{H^s} + |\alpha|\|W_t(\cdot,\tau)\|_{H^{s-1}}]d\tau \\
\leqslant & 2\sqrt{2}(1+T)\left[C_2(a)\max_{t\in[0,T]}\|W(\cdot,t)\|_{H^s} + |\alpha|\max_{t\in[0,T]}\|W_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}\right]T,
\end{aligned}$$

于是

$$\|U(\cdot,t)\|_{X(T)} \leqslant 2\sqrt{2}(1+T)\,[C_2(a) + |\alpha|]\,T\|W\|_{X(T)}.$$

选 T 足够小, 使得式 (3.5.19) 成立和

$$(1+T)[C_2(a) + |\alpha|]T \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2}},$$

则 S 映 $Y(T)$ 到 $Y(T)$ 是严格压缩的. □

应用压缩映射原理和定理 3.3.1 的证明方法可证下面的定理.

定理 3.5.1 设 $s > \frac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$ 和 $g \in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), g(0) = 0$, 则 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 存在唯一局部解 $u \in C([0,T_0); H^s) \cap C^1([0,T_0); H^{s-1}) \cap C^2([0,T_0); H^{s-2})$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时如果

$$\lim_{t\to T_0^-}\sup_{t\in[0,T_0)}[\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}] < \infty, \tag{3.5.23}$$

则 $T_0 = \infty$.

3.5.3 整体解

下面证明 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 对于 $s \geqslant 1$ 在空间 $H^s \cap H^{s-1}$ 中存在唯一整体解.

现在将解的延拓条件 (3.5.23) 转变为下面的条件 (3.5.24).

定理 3.5.2 设 $s > \frac{1}{2}$, $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$, $g \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$. 又设 $[0, T_0)$ 是 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 对应解存在的最大时间区间, 则 $T_0 < \infty$ 的充要条件是

$$\sup_{t\in[0,T_0)} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} = \infty.$$

证明 鉴于定理 3.5.1 存在唯一局部解的是显然的. 让我们证明, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} = M < \infty, \tag{3.5.24}$$

则 $T_0 = \infty$. 利用方程 (3.5.4), 对 $t \in (0,T)$ 通过直接计算有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u(\cdot,t)\|_{H^s}^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}^2) \\
&= \left((I-\partial_x^2)^{\frac{s-1}{2}} u_{tt}, (I-\partial_x^2)^{\frac{s-1}{2}} u_t\right) + \left((I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}} u, (I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}} u_t\right) \\
&= \left((I-\partial_x^2)^{s-1} u_{tt} - (I-\partial_x^2)^{s-1} u_{xx} + (I-\partial_x^2)^{s-1} u, u_t\right) \\
&= \left((I-\partial_x^2)^{s-2}\partial_x^2[g(u)+\alpha u_t], u_t\right) + \left((I-\partial_x^2)^{s-1} u, u_t\right) \\
&= \left((I-\partial_x^2)^{\frac{s-1}{2}} L[g(u)+\alpha u_t], (I-\partial_x^2)^{\frac{s-1}{2}} u_t\right) + \left((I-\partial_x^2)^{\frac{s-1}{2}} u, (I-\partial_x^2)^{\frac{s-1}{2}} u_t\right) \\
&\leqslant \|L[g(u)+\alpha u_t]\|_{H^{s-1}}\|u_t\|_{H^{s-1}} + \|u\|_{H^{s-1}}\|u_t\|_{H^{s-1}}.
\end{aligned}$$

由引理 3.5.2, 引理 1.8.13 和式 (3.5.24) 得

$$\|L[g(u)+\alpha u_t]\|_{H^{s-1}} \leqslant C_1(M)\|u\|_{H^s} + |\alpha|\|u_t\|_{H^{s-1}}.$$

由 Cauchy 不等式推出

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(\cdot,t)\|_{H^s}^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}^2\right) \leqslant (C_1(M)^2+1)\|u\|_{H^s}^2 + 2(|\alpha|+1)\|u_t\|_{H^{s-1}}^2, \quad t \in (0,T).$$

利用 Gronwall 不等式有

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}^2 + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}^2 \leqslant C(T_0)(\|\varphi\|_{H^s}^2 + \|\psi\|_{H^{s-1}}^2).$$

于是可知

$$\sup_{t\in[0,T_0)} [\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}] < \infty.$$

上面的关系式表明, Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 的解不可能在有限时刻爆破, 则由定理 3.5.1 知, $T_0 = \infty$. □

为了寻找 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 在条件 $\varphi \in H^s$ 和 $\psi \in H^{s-1}$ 下整体解存在的条件, 我们将给出 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 解的一个能量恒等式.

引理 3.5.4　设 $s \geqslant 2, g(u) \in C(\mathbb{R})$, $G(u) = \int_0^u g(s)ds$, $\varphi \in H^1$, $\psi \in L^2$, $\Lambda^{-1}\psi \in L^2$ 和 $G(\varphi) \in L^1$, 则对于 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 的解, 有能量恒等式

$$E(t) = \|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|u_x\|^2 + 2\alpha\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau + 2\int_{-\infty}^{\infty} G(u)dx$$
$$= E(0). \tag{3.5.25}$$

证明　由定理 3.5.1 可知, $u \in C([0,T_0);H^2), u_t \in C^1([0,T_0);H^1), u_{tt} \in C([0,T_0);L^2)$. 由 Sobolev 嵌入定理得 $u \in ([0,T]\times\mathbb{R})$, 其中 $T < T_0$. 由方程 (3.5.6) 推出

$$\begin{aligned}\|u_{tt}\|_{L^2} &\leqslant \|u_{xx}\|_{L^2} + \|L(g(u))\|_{L^2} + |\alpha|\|L(u_t)\|_{L^2}\\ &\leqslant \|u_{xx}\|_{L^2} + \|g(u)\|_{L^2} + |\alpha|\|u_t\|_{L^2}\\ &\leqslant \|u_{xx}\|_{L^2} + C(\|u\|_{L^\infty})\|u\|_{L^2} + |\alpha|\|u_t\|_{L^2}.\end{aligned}$$

因此 $u_{tt} \in C([0,T_0);L^2)$. 由于

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{-2}u_{tt}\|_{L^2} &= \||\xi|^{-2}\widehat{u}_{tt}\|_{L^2} = \||\xi|^{-2}(\widehat{u}_{xx} + \widehat{Lg(u)} + \alpha\widehat{L(u_t)})\|_{L^2}\\ &= \left\|-\widehat{u} - \frac{\widehat{g(u)}}{1+|\xi|^2} - \alpha\frac{\widehat{u}_t}{1+|\xi|^2}\right\|_{L^2}\\ &\leqslant \|u\|_{L^2} + \|g(u)\|_{L^2} + |\alpha|\|u_t\|_{L^2},\end{aligned}$$

所以 $\Lambda^{-2}u_{tt} \in L^2$. 方程 (3.5.6) 作 Fourier 变换, 得

$$\widehat{u}_{tt} + |\xi|^2\widehat{u} + \frac{|\xi|^2\widehat{g(u)}}{1+|\xi|^2} + \alpha\frac{|\xi|^2\widehat{u}_t}{1+|\xi|^2} = 0.$$

上式两端乘以 $\dfrac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}$, 并与 $\widehat{u}_t$ 作内积, 有

$$(|\xi|^{-2}(1+|\xi|^2)\widehat{u}_{tt} + (1+|\xi|^2)\widehat{u} + \widehat{g(u)} + \alpha\widehat{u}_t, \widehat{u}_t) = 0.$$

上式作 Fourier 逆变换得

$$(\Lambda^{-2}u_{tt} + u_{tt} + u - u_{xx} + \alpha u_t + g(u), u_t) = 0.$$

展开上式可知

$$(\Lambda^{-1}u_{tt}, \Lambda^{-1}u_t) + (u_{tt}, u_t) + (u, u_t) + (u_x, u_{xt}) + (g(u), u_t) + \alpha(u_t, u_t) = 0.$$

于是

$$\frac{d}{dt}\left(\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|u_x\|^2 + 2\int_{-\infty}^{\infty} G(u)dx + 2\alpha\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau\right) = 0.$$

上式在 $[0,t]$ 上对 t 积分, 得

$$E(t)=E(0).$$ □

定理 3.5.3 设 $s\geqslant 2$, $\varphi\in H^s$, $\psi\in H^{s-1}$, $\Lambda^{-1}\psi\in L^2$, $G(\varphi)\in L^1$, $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $g(0)=0$ 和 $G(u)\geqslant 0$ 或 $g'(u)$ 下有界, 即存在常数 A_0, 使得对所有的 $s\in\mathbb{R}$, $g'(s)\geqslant A_0$, 则 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 存在唯一整体解 $u\in C([0,\infty);H^s)\cap C^1([0,\infty);H^{s-1})\cap C^2([0,\infty),H^{s-2})$.

证明 根据定理 3.5.2, 只需证明 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 的解 $u(x,t)$ 满足式 (3.5.24). 令 $u\in C([0,T);H^s)\cap C^1([0,T);H^{s-1})\cap C^2[0,T)$ 是 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 定义在解存在的最大时间区间 $[0,T)(0<T<T_0)$ 上的解.

如果 $G(u)\geqslant 0$, 则从式 (3.5.25) 推出

$$\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2\leqslant E(0)+2|\alpha|\int_0^t\|u_\tau\|^2d\tau.$$

由上式和 Gronwall 不等式得

$$\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2\leqslant E(0)e^{2|\alpha|T},\quad \forall t\in[0,T). \tag{3.5.26}$$

如果 $g'(u)$ 下有界, 令 $g_0(u)=g(u)-k_0u$, 其中 $k_0=\min\{A_0,0\}(\leqslant 0)$, 则 $g_0(0)=0$, $g_0'(u)=g'(u)-k_0\geqslant 0$ 和 $g_0(u)$ 是单增函数. 于是

$$G(u)=\int_0^u g(s)ds=\int_0^u[g_0(s)+k_0s]\,ds=G_0(u)+\frac{k_0}{2}u^2,$$

其中 $G_0(u)=\int_0^u g_0(s)ds\geqslant 0$, 则有

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+\|u_t\|^2+\|u\|^2+\|u_x\|^2+2\int_{-\infty}^{\infty}G_0(u(x,t))dx\\&=E(0)-2\alpha\int_0^t\|u_\tau(\tau)\|^2d\tau-k_0\|u\|^2\\&=E(0)-2\alpha\int_0^t\|u_\tau(\tau)\|^2d\tau-k_0\|\varphi\|^2-2k_0\int_0^t(u,u_\tau)d\tau\\&\leqslant E(0)-k_0\|\varphi\|^2+\int_0^t[(2|\alpha|+1)\|u_\tau(\tau)\|^2+k_0^2\|u(\tau)\|^2]d\tau.\end{aligned}$$

由上式和 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+\|u_t\|^2+\|u\|^2+\|u_x\|^2+2\int_{-\infty}^{\infty}G_0(u(x,t))dx\\&\leqslant(E(0)-k_0\|\varphi\|^2)\exp[(2|\alpha|+1+k_0^2)T],\quad \forall t\in(0,T).\end{aligned} \tag{3.5.27}$$

从不等式 (3.5.26), (3.5.27) 和 Sobolev 嵌入定理知

$$\sup_{t\in[0,T_0)} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} < \infty.$$

所以, 由定理 3.5.2 推得 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 有唯一整体解

$$u \in C([0,\infty); H^s) \cap C^1([0,\infty); H^{s-1}) \cap C^2([0,T]; H^{s-2}).$$

□

注 3.5.1　如果 $s \geqslant \dfrac{9}{2}$, 则由 Sobolev 嵌入定理断言

$$u \in C([0,\infty); C^4(\mathbb{R})) \cap C^1([0,\infty); C^3(\mathbb{R})) \cap C^2([0,\infty); C^2(\mathbb{R})).$$

所以, 当 $s \geqslant \dfrac{9}{2}$ 时, Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 存在唯一整体古典解.

例 3.5.1　作为一个例子, 利用定理 3.5.3 考虑 Cauchy 问题

$$v_{tt} - v_{xx} = \frac{1}{4}(cv^3 + 6v^2 + av_{tt} - bv_{xx} + dv_t)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{2.5.5}$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.5.28}$$

作尺度变换 $v(x,t) = u(y,\tau) = u\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}}x, \dfrac{2\sqrt{b}}{a}t\right)$, 方程 (2.5.5) 变为

$$u_{\tau\tau} - u_{yy} - u_{yy\tau\tau} + u_{yyyy} - \frac{d}{2\sqrt{b}}u_{yy\tau} = \frac{a}{4b}\left(cu^3 + 6u^2 + 4u - \frac{4b}{a}u\right)_{yy}.$$

令 $g(u) = \dfrac{a}{4b}\left(cu^3 + 6u^2 + 4u - \dfrac{4b}{a}u\right)$, 则如果 $c > 0$,

$$\begin{aligned} g'(u) &= \frac{a}{4b}\left(3cu^2 + 12u + 4 - \frac{4b}{a}\right) \\ &= \frac{a}{4b}\left(\sqrt{3c}u + \frac{6}{\sqrt{3c}}\right)^2 - \frac{3a}{bc} + \frac{a}{b} - 1 \\ &\geqslant -\frac{3a}{bc} + \frac{a}{b} - 1. \end{aligned}$$

从而由定理 3.5.3 得到如下定理.

定理 3.5.4　设 $s \geqslant 2$, $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$, $\Lambda^{-1}\psi \in L^2$ 和常数 $c > 0$, 则 Cauchy 问题 (2.5.5), (3.5.28) 有唯一整体解

$$v \in C([0,\infty); H^s) \cap C^1([0,\infty); H^{s-1}) \cap C^2([0,\infty); H^{s-2}).$$

3.5.4 解的爆破

下面利用凸性方法讨论 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 解的爆破.

定理 3.5.5 设 $\alpha \geqslant 0$, $g(u) \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in H^1$, $\psi \in L^2$, $\Lambda^{-1}\psi \in L^2$, $G(u) = \int_0^u g(\tau)d\tau$, $G(\varphi) \in L^1$ 和存在常数 $\beta > 0, \varepsilon > 0$, 使得

$$2sg(s) \leqslant 2(4\beta + 2 + \varepsilon\alpha)G(s) + (4\beta - \varepsilon^{-1}\alpha)s^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.5.29}$$

则 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 的广义解或古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E(0) < 0$;

(2) $E(0) = 0$ 和 $(\Lambda^{-1}\varphi, \Lambda^{-1}\psi) + (\varphi, \psi) > 0$;

(3) $E(0) > 0$ 和 $(\Lambda^{-1}\varphi, \Lambda^{-1}\psi) + (\varphi, \psi) > \sqrt{\dfrac{4\beta + 2 + \alpha\varepsilon}{4\beta + 2} E(0)[\|\Lambda^{-1}\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2]}$.

证明 设 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 的解存在的最大时间为无限的. 令

$$H(t) = \|\Lambda^{-1}u\|^2 + \|u\|^2 + \beta_0(t + t_0)^2, \tag{3.5.30}$$

其中 β_0 和 t_0 是待定的非负常数, 则

$$\dot{H}(t) = 2(\Lambda^{-1}u, \Lambda^{-1}u_t) + 2(u, u_t) + 2\beta_0(t + t_0).$$

应用 Hölder 不等式, 有

$$\dot{H}(t)^2 \leqslant 4H(t)[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0]. \tag{3.5.31}$$

借助于方程 (3.5.4) 和等式 (3.5.25) 推出

$$\begin{aligned}
\ddot{H}(t) =& 2\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + 2\|u_t\|^2 + 2(\Lambda^{-1}u, \Lambda^{-1}u_{tt}) + 2(u, u_{tt}) + 2\beta_0 \\
=& 2\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + 2\|u_t\|^2 + 2\beta_0 + 2(u, \Lambda^{-2}u_{tt} + u_{tt}) \\
=& 2\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 + 2\|u_t\|^2 + 2\beta_0 - 2\|u\|^2 - 2\|u_x\|^2 - 2\alpha(u, u_t) - 2\int_{-\infty}^{\infty} ug(u)dx \\
=& 4(1+\beta)[\|\Lambda^{-1}\|u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \beta_0] - (2 + 4\beta)[E(0) + \beta_0] - 2\alpha(u, u_t) \\
& + 4\beta\|u\|^2 + 4\beta\|u_x\|^2 + 2\alpha(4\beta + 2)\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \\
& + 2\int_{-\infty}^{\infty} [(2 + 4\beta)G(u) - ug(u)]dx.
\end{aligned} \tag{3.5.32}$$

利用 Cauchy 不等式和式 (3.5.25), 知

$$\begin{aligned}
2\alpha(u, u_t) &\leqslant \varepsilon^{-1}\alpha\|u\|^2 + \varepsilon\alpha\|u_t\|^2 \\
&\leqslant \varepsilon^{-1}\alpha\|u\|^2 + \varepsilon\alpha E(0) - 2\varepsilon\alpha\int_{-\infty}^{\infty} G(u)dx.
\end{aligned} \tag{3.5.33}$$

由式 (3.5.29)–(3.5.33) 得

$$H(t)\ddot{H}(t)-(1+\beta)\dot{H}(t)^2\geqslant -[(4\beta+2+\varepsilon\alpha)E(0)+(4\beta+2)\beta_0]H(t). \tag{3.5.34}$$

如果 $E(0)<0$, 取 $\beta_0=-\dfrac{4\beta+2+\varepsilon\alpha}{4\beta+2}E(0)>0$, 则

$$H(t)\ddot{H}(t)-(\beta+1)\dot{H}(t)^2\geqslant 0.$$

若 t_0 充分大, 于是 $\dot{H}(0)>0$, 又 $H(0)>0$. 由引理 1.8.7 推出, 当

$$t\to T_1\leqslant T_0=\frac{H(0)}{\beta\dot{H}(0)}<\infty$$

时, $H(t)\to\infty$.

如果 $E(0)=0$, 取 $\beta_0=0$, 则

$$H(t)\ddot{H}(t)-(\beta+1)\dot{H}(t)^2\geqslant 0.$$

由假定 (2) 知 $\dot{H}(0)>0$. 由引理 1.8.7 推出, 当

$$t\to T_1\leqslant T_0=\frac{H(0)}{\beta\dot{H}(0)}<\infty$$

时, $H(t)\to\infty$.

如果 $E(0)>0$, 仍取 $\beta_0=0$, 式 (3.5.34) 变为

$$H(t)\ddot{H}-(1+\beta)\dot{H}(t)^2\geqslant -(4\beta+2+\varepsilon\alpha)E(0)H(t). \tag{3.5.35}$$

定义 $J(t)=H^{-\beta}(t)$, 于是

$$\begin{aligned}\dot{J}(t)&=-\beta H^{-\beta-1}(t)\dot{H}(t),\\ \ddot{J}(t)&=-\beta H^{-\beta-2}(t)\left[H(t)\ddot{H}(t)-(1+\beta)\dot{H}(t)^2\right]\\ &\leqslant\beta(4\beta+2+\varepsilon\alpha)E(0)H^{-\beta-1}(t).\end{aligned} \tag{3.5.36}$$

根据假定 (3) 知, $\dot{J}(0)<0$. 令

$$t^*=\sup\{t\mid \dot{J}(\tau)<0,\ \tau\in[0,t)\}. \tag{3.5.37}$$

由于 $\dot{J}(t)$ 的连续性知, t^* 是正数. 用 $2\dot{J}(t)$ 乘以式 (3.5.36) 两端, 得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\dot{J}(t)^2]&\geqslant -2\beta^2(4\beta+2+\varepsilon\alpha)E(0)H^{-2\beta-2}(t)\dot{H}(t)\\ &=2\beta^2\frac{4\beta+2+\varepsilon\alpha}{2\beta+1}E(0)\frac{d}{dt}[H^{-2\beta-1}(t)],\quad \forall t\in[0,t^*).\end{aligned} \tag{3.5.38}$$

式 (3.5.38) 在 $[0,t)$ $(0\leqslant t<t^*)$ 上对 t 积分可知

$$\dot{J}(t)^2\geqslant 2\beta^2\frac{4\beta+2+\varepsilon\alpha}{2\beta+1}E(0)H^{-2\beta-1}(t)+\dot{J}(0)^2 -2\beta^2\frac{4\beta+2+\varepsilon\alpha}{2\beta+1}E(0)H^{-2\beta-1}(0).$$

由假定 (3) 推出

$$\dot{J}(0)^2-2\beta^2\frac{4\beta+2+\varepsilon\alpha}{2\beta+1}E(0)H^{-2\beta-1}(0)>0.$$

因此, 由 $\dot{J}(t)$ 的连续性断言, 对于 $0\leqslant t<t^*$,

$$\dot{J}(t)\leqslant-\left[\dot{J}(0)^2-2\beta^2\frac{4\beta+2+\varepsilon\alpha}{2\beta+1}E(0)H^{-2\beta-1}(0)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5.39}$$

根据 t^* 的定义, 式 (3.5.39) 对于所有的 $t\geqslant 0$ 成立. 所以

$$J(t)\leqslant J(0)-\left[\dot{J}(0)^2-2\beta^2\frac{4\beta+2+\varepsilon\alpha}{2\beta+1}E(0)H^{-2\beta-1}(0)\right]^{\frac{1}{2}}t,\quad \forall t>0.$$

因此, 对于某个 T_1 和

$$0<T_1\leqslant T_0=J(0)\left[J'(0)^2-2\beta^2\frac{4\beta+2+\varepsilon\alpha}{2\beta+1}E(0)H^{-2\beta-1}(0)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$J(T_1)=0$. 于是 $H(t)=\dfrac{1}{J(t)^{\frac{1}{\beta}}}$ 在 T_1 变为无穷大.

至此, 在条件 (1) 或 (2) 或 (3) 下, $H(t)$ 总是在 T_1 变为无穷大. 这与解存在的最大是时间为无限的事实矛盾. 所以解存在的最大时间是有限的. □

定理 3.5.6 设$\alpha>0$, $g(u)\in C(\mathbb{R})$, $\varphi\in H^1$, $\psi\in L^2$, $\Lambda^{-1}\psi\in L^2$, $G(u)=\displaystyle\int_0^u g(\tau)d\tau$, $G(\varphi)\in L^1$ 和存在常数 $\beta>0$, $\varepsilon>0$, 使得 $4\beta\varepsilon<\alpha$ 和

$$sg(s)\leqslant(4\beta+2+\varepsilon\alpha)G(s),\quad \forall s\in\mathbb{R}, \tag{3.5.40}$$

则 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 的解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破, 如果下列条件成立:

(1) $E(0)\leqslant 0$;

(2) $(\Lambda^{-1}\varphi,\Lambda^{-1}\psi)+(\varphi,\psi)>\sqrt{\dfrac{\alpha-4\beta\varepsilon}{4\beta\varepsilon}}[\|\Lambda^{-1}\varphi\|^2+\|\varphi\|^2]$.

证明 设 Cauchy 问题 (3.5.4), (3.5.5) 的解存在的最大时间为无限的. 函数 $H(t)$ 的定义如下

$$H(t) = \|\Lambda^{-1}u\|^2 + \|u\|^2. \tag{3.5.41}$$

从式 (3.5.30)–(3.5.33) 和式 (3.5.40) 可得

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\beta)\dot{H}(t)^2 \geqslant -(4\beta + 2 + \varepsilon\alpha)E(0)H(t) - (\varepsilon^{-1}\alpha - 4\beta)H(t)^2. \tag{3.5.42}$$

注意到 $E(0) \leqslant 0$, 有

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\beta)\dot{H}(t)^2 \geqslant -(\varepsilon^{-1}\alpha - 4\beta)H(t)^2. \tag{3.5.43}$$

根据条件 (2), $\dot{H}(0) > \sqrt{\dfrac{\alpha - 4\beta\varepsilon}{\varepsilon\beta}}H(0)$. 由引理 1.8.7 知, 当

$$t \to T_1 \leqslant T_0 = \frac{1}{2\sqrt{\beta(\varepsilon^{-1}\alpha - 4\beta)}} \ln \frac{\sqrt{\beta}\dot{H}(0) + \sqrt{\varepsilon^{-1}\alpha - 4\beta}H(0)}{\sqrt{\beta}\dot{H}(0) - \sqrt{\varepsilon^{-1}\alpha - 4\beta}H(0)}$$

时, $H(t) \to \infty$. 这与解存在的最大时间是无限的事实矛盾. □

例 3.5.2 我们应用定理 3.5.5 和定理 3.5.6 到方程 (2.5.5) 和方程 (2.5.4). 首先, 把尺度变换

$$v(x,t) = u(y,\tau) = u\left(\frac{2}{\sqrt{a}}x, \frac{2\sqrt{b}}{a}t\right),$$

方程 (2.5.5) 和初值

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x) \tag{3.5.44}$$

改写为

$$u_{\tau\tau} - u_{yy} - u_{yy\tau\tau} + u_{yyyy} - \frac{d}{2\sqrt{b}}u_{yy\tau} = \frac{a}{4b}\left(cu^3 + 6u^2 + 4u - \frac{4b}{a}u\right)_{yy},$$

$$u(y,0) = \varphi\left(\frac{\sqrt{a}}{2}y\right), \quad u_\tau(y,0) = \frac{a}{2\sqrt{b}}\psi\left(\frac{\sqrt{a}}{2}y\right).$$

令 $g(u) = \dfrac{a}{4b}\left(cu^3 + 6u^2 + 4u - \dfrac{4b}{a}u\right)$, 则

$$G(u) = \int_0^u g(s)ds = \frac{a}{4b}\left(\frac{c}{4}u^4 + 2u^3 + 2u^2 - \frac{2b}{a}u^2\right).$$

假定 $\varphi \in H^1$, $\psi \in L^2$, $\Lambda^{-1}\psi \in L^2$, $a > 0$ 和 $b > 0$, 令

$$E_1(0) = \frac{2\sqrt{a}}{b}\left(\|\Lambda^{-1}\psi\|^2 + \frac{\sqrt{a}}{4}\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2 + \frac{b}{4}\|\varphi_x\|^2 + \frac{c}{8}\|\varphi\|_4^4 + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi^3(x)dx\right).$$

于是有下面的结果.

情况 1. 若 $c \leqslant 0$, $d = 0$, 取$\beta = \frac{1}{4}$, 则式 (3.5.29) 成立. 应用定理 3.5.5, 则 Cauchy 问题 (2.5.5), (3.5.44) 的解 $v(x,t)$ 在有限时刻爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E_1(0) < 0$;

(2) $E_1(0) = 0$ 和 $(\Lambda^{-1}\varphi, \Lambda^{-1}\psi) + \frac{a}{4}(\varphi, \psi) > 0$;

(3) $E_1(0) > 0$ 和 $(\Lambda^{-1}\varphi, \Lambda^{-1}\psi) + \frac{a}{4}(\varphi, \psi) > \sqrt{E_1(0)[\|\Lambda^{-1}\varphi\|^2 + \frac{a}{4}\|\varphi\|^2]}$.

情况 2. 若$c \leqslant 0$, $d > 0$, $d^2 b \leqslant a^2$ 和 $2b > a - \sqrt{a^2 - d^2 b}$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{d\sqrt{b}}(a - \sqrt{a^2 - d^2 b})$, $\beta = \frac{1}{8b}\left(2b - a + \sqrt{a^2 - d^2 b}\right)$, 则式 (3.5.29) 成立. 应用定理 3.5.5, 则 Cauchy 问题 (2.5.5), (3.5.44) 的解在有限时刻爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E_1(0) < 0$;

(2) $E_1(0) = 0$ 和 $(\Lambda^{-1}\varphi, \Lambda^{-1}\psi) + \frac{a}{4}(\varphi, \psi) > 0$;

(3) $E_1(0) > 0$ 和 $(\Lambda^{-1}\varphi, \Lambda^{-1}\psi) + \frac{a}{4}(\varphi, \psi) > \sqrt{\frac{3}{4\beta + 2}E_1(0)[\|\Lambda^{-1}\varphi\|^2 + \frac{a}{4}\|\varphi\|^2]}$.

情况 3. 若 $c \leqslant 0$, $d > 0$, $b < a$ 和$b < d^2$, 取$\varepsilon = \frac{\sqrt{b}}{d}$, $\beta = \frac{1}{8}$, 则 $4\beta\varepsilon < \frac{d}{2\sqrt{b}}$ 和式 (3.5.40) 成立. 应用定理 3.5.6, Cauchy 问题 (2.5.5), (3.5.44) 的解在有限时刻爆破, 如果下列条件成立:

(1) $E_1(0) < 0$;

(2) $(\Lambda^{-1}\varphi, \Lambda^{-1}\psi) + \frac{a}{4}(\varphi, \psi) > \frac{2}{a}\sqrt{d^2 - b}\,[\|\Lambda^{-1}\varphi\|^2 + \frac{a}{4}\|\varphi\|^2]$.

情况 4. 若 $c \leqslant 0$, $d > 0$, $b < a$ 和 $b \geqslant d^2$, 取 $\beta = \frac{3\sqrt{b} - \sqrt{b - d^2}}{8\sqrt{b}}$, 则 $4\beta\varepsilon < \frac{d}{2\sqrt{b}}$ 和式 (3.5.40) 成立. 应用定理 3.5.6, Cauchy 问题 (2.5.5), (3.5.44) 的解在有限时刻爆破, 如果下列条件满足:

(1) $E_1(0) < 0$;

(2) $(\Lambda^{-1}\varphi, \Lambda^{-1}\psi) + \frac{a}{4}(\varphi, \psi) > \frac{2\sqrt{b}}{a}\sqrt{\frac{\alpha - 4\beta\varepsilon}{4\beta\varepsilon}}\left[\|\Lambda^{-1}\varphi\|^2 + \frac{a}{4}\|\varphi\|^2\right]$.

3.5.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [190]. 与本节有关的文献见 [30], [42]–[44], [63], [64], [67]–[69], [71]–[73], [101], [168], [178], [191]–[194].

3.6 具有流体动力学阻尼项的广义 IMBq 方程 Cauchy 问题解的渐近性质

3.6.1 引言

3.3 节讨论了一维具阻尼广义 IMBq 方程 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2). 本节研究下列具流体动力学阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程 Cauchy 问题

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u - \nu \Delta u_t = \Delta f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{3.6.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.6.2}$$

其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, $f \in C^k(\mathbb{R})$, 对于 $0 \leqslant l \leqslant k \leqslant \alpha, \alpha > 1, |f^{(l)}(u)| \lesssim |u|^{\alpha - l}$, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是给定的初值函数.

我们首先证明 Cauchy 问题 (3.6.1), (3.6.2) 对应的线性化方程 Cauchy 问题解的衰减估计, 其次证明 Cauchy 问题 (3.6.1), (3.6.2) 整体解的存在性和 Cauchy 问题 (3.6.1), (3.6.2) 解的衰减估计.

3.6.2 线性化方程 Cauchy 问题解的衰减估计

下面研究线性化方程 Cauchy 问题

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} - \nu \Delta u_t = \Delta g(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{3.6.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.6.4}$$

解的衰减性质. 首先引入方程 (3.6.3) 的解算子. 方程 (3.6.3) 和初值条件 (3.6.4) 取 Fourier 变换, 于是化为具有参数 $\xi \in \mathbb{R}^N$ 的常微分方程的 Cauchy 问题

$$(1 + |\xi|^2)\hat{u}_{tt}(\xi,t) + \nu|\xi|^2 \hat{u}_t(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = -|\xi|^2 \hat{g}(\xi,t), \tag{3.6.5}$$

$$\hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \hat{u}_t(\xi,0) = \hat{u}_1(\xi). \tag{3.6.6}$$

方程 (3.6.5) 对应的特征方程是

$$(1 + |\xi|^2)\lambda^2 + \nu|\xi|^2 \lambda + |\xi|^2 = 0. \tag{3.6.7}$$

方程 (3.6.7) 的根由下列公式给出:

$$\lambda_{\pm}(\xi) = \frac{-\nu|\xi|^2 \pm |\xi|\sqrt{(\nu^2 - 4)|\xi|^2 - 4}}{2(1 + |\xi|^2)}.$$

根据 Duhamel 原理, Cauchy 问题 (3.6.3), (3.6.4) 的解有以下形式

$$u(t)=\tilde{\mathcal{G}}(t)u_0+\mathcal{G}(t)u_1+\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)(I-\Delta)^{-1}\Delta g(\tau)d\tau, \tag{3.6.8}$$

其中 Green 算子为

$$\mathcal{G}(t)=\mathscr{F}^{-1}L(\xi,t)\mathscr{F},$$
$$\tilde{\mathcal{G}}(t)=(\partial_t-\nu(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x^2)\mathcal{G}(t)=\mathscr{F}^{-1}L_1(\xi,t)\mathscr{F}$$

和

$$\begin{aligned}L(\xi,t)=&\frac{e^{\lambda_+(\xi)t}-e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\\=&e^{-\frac{\nu}{2}\frac{t|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}\frac{2(1+|\xi|^2)}{|\xi|\sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4}}\sinh\left(\frac{t|\xi|}{2(1+|\xi|^2)}\sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4}\right),\end{aligned}$$

$$L_1(\xi,t)=\partial_tL(\xi,t)=\frac{\lambda_+(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}-\lambda_-(\xi)e^{\lambda_+(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}.$$

为了证明下面的引理, 先证一个有用的引理.

引理 3.6.1 对于任意常数 $\delta>0,c>0$ 和 $k\geqslant 0$ 成立以下不等式:

$$\int_{|\xi|\leqslant\delta}|\xi|^ke^{-c|\xi|^2t}d\xi\lesssim(1+t)^{-\frac{k+N}{2}},\quad \forall t\geqslant 0, \tag{3.6.9}$$

$$\sup_{0\leqslant|\xi|\leqslant\delta}|\xi|^ke^{-c|\xi|^2t}\lesssim(1+t)^{-\frac{k}{2}},\quad \forall t\geqslant 0. \tag{3.6.10}$$

证明 先证明不等式 (3.6.9). 显然,

$$\int_{|\xi|\leqslant\delta}|\xi|^ke^{-c|\xi|^2t}d\xi\leqslant\int_{|\xi|\leqslant\delta}|\xi|^kd\xi=C_1, \tag{3.6.11}$$

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leqslant\delta}|\xi|^ke^{-c|\xi|^2t}d\xi&\leqslant\int_{|\xi|\leqslant\delta}(|\xi|\sqrt{t})^ke^{-c(|\xi|\sqrt{t})^2}d(\sqrt{t}\xi)t^{-\frac{k+N}{2}}\\&=\int_{|y|\leqslant\delta\sqrt{t}}|y|^ke^{-cy^2}dyt^{-\frac{k+N}{2}}\\&=C_2t^{-\frac{k+N}{2}}.\end{aligned} \tag{3.6.12}$$

当 $t\geqslant 1$ 时, 由式 (3.6.12) 可得

$$\int_{|\xi|\leqslant\delta}|\xi|^ke^{-c|\xi|^2t}d\xi\lesssim t^{-\frac{k+N}{2}}\lesssim\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)^{-\frac{k+N}{2}}\lesssim(1+t)^{-\frac{k+N}{2}}. \tag{3.6.13}$$

当 $t \leqslant 1$ 时, 由式 (3.6.11) 可得

$$\int_{|\xi|\leqslant\delta} |\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t} d\xi \lesssim 1 \lesssim (1+t)^{-\frac{k+N}{2}}(1+t)^{\frac{k+N}{2}}$$
$$\lesssim 2^{\frac{k+N}{2}}(1+t)^{-\frac{k+N}{2}}$$
$$\lesssim (1+t)^{-\frac{k+N}{2}}. \tag{3.6.14}$$

综合式 (3.6.13), (3.6.14) 得式 (3.6.9).

下证不等式 (3.6.10). 我们有

$$\sup_{0\leqslant|\xi|\leqslant\delta} |\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t} \leqslant \delta^k. \tag{3.6.15}$$

令 $f(r) = r^k e^{-crt}$, $r \in (0, \infty)$, 则

$$f'(r) = r^{k-1} e^{-cr^2 t}(k - 2cr^2 t). \tag{3.6.16}$$

可以看出 $r = \sqrt{\dfrac{k}{2ct}}$ 是 $f'(r) = 0$ 的一个稳定点. 由于

$$f''(r) = r^{k-2} e^{-cr^2 t}[k(k-1) - 4cktr^2 - 2ctr^2 + 4c^2 tr^4],$$

从而

$$f''\left(\sqrt{\frac{k}{2ct}}\right) < 0.$$

于是

$$\sup_{0\leqslant|\xi|\leqslant\delta} |\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t} \lesssim t^{-\frac{k}{2}}. \tag{3.6.17}$$

合并式 (3.6.15) 和式 (3.6.17) 得

$$\sup_{0\leqslant|\xi|\leqslant\delta} |\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t} \lesssim (1+t)^{-\frac{k}{2}}.$$ □

引理 3.6.2 设 $k \geqslant 0$, $p \in [2, \infty]$, $q \in [1, 2]$, $r \in [1, 2]$ 和 $s > N\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}\right)$ 或如果 $r = p = 2, s \geqslant 0$, 则对于 $u_1 \in \dot{H}_q^{-2r-1} \cap \dot{H}_r^{k+s}, \gamma \geqslant 0$ 和所有的 $t \geqslant 0$ 成立估计

$$\|\tilde{\mathcal{G}}(t)u_1\|_{\dot{H}_p^k} \lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}-\gamma}\left(\|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}} + \|u_1\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right). \tag{3.6.18}$$

证明 首先假定 $0 < \nu \leqslant 2$, 则

$$L(\xi, t) = e^{-\frac{\nu}{2}\frac{t|\xi|^2}{1+|\xi|^2}} \frac{2(1+|\xi|^2)}{|\xi|\sqrt{(4-\nu^2)|\xi|^2+4}} \sin\left(\frac{t|\xi|}{2(1+|\xi|^2)}\sqrt{(4-\nu^2)|\xi|^2+4}\right).$$

根据 Hausdorff-Young 不等式和 Hölder 不等式有

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{G}(t)u_1\|_{\dot H^k_p} &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\xi|^k L(\xi,t)\hat u_1(\xi)\right|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\lesssim \left(\int_{|\xi|\leqslant 1} \left||\xi|^k L(\xi,t)\hat u_1(\xi)\right|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\quad + \left(\int_{|\xi|>1} \left||\xi|^k L(\xi,t)\hat u_1(\xi)\right|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\lesssim \left(\int_{|\xi|\leqslant 1} \left(e^{-\frac{\nu}{4}|\xi|^2 t}|\xi|^{k-1}|\hat u_1(\xi)|\right)^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\quad + te^{-\frac{\nu}{4}t}\left(\int_{|\xi|>1} \left(|\xi|^k|\hat u_1(\xi)|\right)^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\lesssim \left\|e^{-\frac{\nu}{4}|\xi|^2 t}|\xi|^{k+2\gamma}\right\|_{L^{q_0}(|\xi|\leqslant 1)} \left\||\xi|^{-2\gamma-1}\hat u_1(\xi)\right\|_{L^{q'}}\\
&\quad + e^{-\frac{\nu}{8}t}\left\||\xi|^{-s}\right\|_{L^{r_0}(|\xi|\geqslant 1)}\left\||\xi|^{k+s}\hat u_1(\xi)\right\|_{L^{r'}}\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}-\gamma}\left\|(-\Delta)^{\frac{-2\gamma-1}{2}}u_1\right\|_{L^q} + e^{-\frac{\nu}{8}t}\left\|(-\Delta)^{\frac{k+s}{2}}u_1\right\|_{L^r}\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}-\gamma}\left(\|u_1\|_{\dot H_q^{-2\gamma-1}} + \|u_1\|_{\dot H_r^{k+s}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.6.19}
$$

其中$\frac{1}{q_0}=\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$, $\frac{1}{r_0}=\frac{1}{p'}-\frac{1}{r'}=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}$. 所以, 当 $0<\nu\leqslant 2$ 时, 估计 (3.6.18) 成立.

关于 $\nu>2$, 对于 $|\xi|=2(\nu^2-4)^{-1/2}\equiv\xi_0, (\nu^2-4)|\xi|^2-4=0$. $L(\xi,t)$ 可以改写为

$$
L(\xi,t)=
\begin{cases}
e^{-\frac{\nu}{2}\frac{t|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}\dfrac{2(1+|\xi|^2)}{|\xi|\sqrt{(4-\nu^2)|\xi|^2+4}}\sin\left(\dfrac{t|\xi|}{2(1+|\xi|^2)}\sqrt{(4-\nu^2)|\xi|^2+4}\right), & |\xi|\leqslant\xi_0,\\
e^{\lambda_+(\xi)t}\dfrac{1+|\xi|^2}{|\xi|\sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4}}\left(1-e^{-\frac{t|\xi|}{1+|\xi|^2}\sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4}}\right), & |\xi|>\xi_0.
\end{cases}
$$

取一小的固定数 ξ, 使得 $0<\xi_1<\xi_0$, 于是

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{G}(t)u_1\|_{\dot H^k_p} &= \|\mathcal{F}^{-1}|\xi|^k L(\xi,t)\hat u_1\| \lesssim \||\xi|^k L(\xi,t)\hat u_1\|_{L^{p'}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||\xi|^k L(\xi,t)\hat u_1(\xi)|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \left(\int_{|\xi|\leqslant \xi_1} \left| |\xi|^k L(\xi,t)\hat{u}_1(\xi) \right|^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{\xi_1<|\xi|\leqslant \xi_0} \left| |\xi|^k L(\xi,t)\hat{u}_1(\xi) \right|^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\quad + \left(\int_{|\xi|>\xi_0} \left| |\xi|^k L(\xi,t)\hat{u}_1(\xi) \right|^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\equiv I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{3.6.20}
$$

对于 $0 \leqslant |\xi| \leqslant \xi_1$, 存在一正常数 $k_1 = \dfrac{\nu}{2(1+\xi_1^2)}$, 使得

$$
|L(\xi,t)| \lesssim (1+\xi_1^2)e^{-k_1|\xi|^2 t}|\xi|^{-1}.
$$

因此可得

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left(\int_{|\xi|\leqslant \xi_1} |e^{-k_1|\xi|^2 t}|\xi|^{k+2\gamma}|\xi|^{-2\gamma-1}\hat{u}_1(\xi)|^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim \left\| e^{-k_1|\xi|^2 t}|\xi|^{k+2\gamma} \right\|_{L^{q_0}(|\xi|\leqslant \xi_1)} \left\| |\xi|^{-2\gamma-1}\hat{u}_1 \right\|_{L^{q'}} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}-\gamma}\|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma-1}}.
\end{aligned} \tag{3.6.21}
$$

对于 $\xi_1 < |\xi| \leqslant \xi_0$, 存在一正整数 $k_2 = \dfrac{\nu\xi_1^2}{2(1+\xi_1^2)}$, 使得

$$
|L(\xi,t)| \lesssim \xi_1^{-1}(1+\xi_0^2)e^{-k_2 t}.
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left(\int_{\xi_1<|\xi|\leqslant \xi_0} \left| |\xi|^k L(\xi,t)\hat{u}_1(\xi) \right|^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim e^{-k_2 t} \left(\int_{\xi_1<|\xi|\leqslant \xi_0} (|\xi|^{2\gamma+1}|\xi|^{-2\gamma-1}\hat{u}_1(\xi))^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim e^{-k_2 t} \left\| |\xi|^{-2\gamma-1}\hat{u}_1 \right\|_{L^{q'}} \lesssim e^{-k_2 t}\|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma-1}}.
\end{aligned} \tag{3.6.22}
$$

对于 $|\xi| > \xi_0$, 按照不等式

$$
1-e^{-s} \leqslant s, \quad \forall s \in [0,\infty)
$$

和

$$
\frac{2}{\nu}|\xi| \leqslant \nu|\xi| - \sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4} \leqslant \nu|\xi|,
$$

可知

$$
|L(\xi,t)| \leqslant te^{-\frac{t|\xi|^2}{\nu(1+|\xi|^2)}} \leqslant te^{-\frac{4}{\nu^3}t}.
$$

于是利用 Hausdorff-Young 不等式, 类似于式 (3.6.19) 得

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \left(\int_{|\xi|>\xi_0} ||\xi|^k L(\xi,t)\hat{u}_1(\xi)|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim te^{-\frac{4}{\nu^3}t}\left(\int_{|\xi|>\xi_0}\left(|\xi|^{-s}|\xi|^{k+s}|\hat{u}_1(\xi)|\right)^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim e^{-\frac{2}{\nu^3}t}\||\xi|^{k+s}\hat{u}_1\|_{L^{r'}}\||\xi|^{-s}\|_{L^{r_0}(|\xi|>\xi_0)} \\
&\lesssim e^{-\frac{2}{\nu^3}t}\|u_1\|_{\dot{H}_r^{k+s}}.
\end{aligned}
\tag{3.6.23}
$$

所以由式 (3.6.20)–(3.6.23) 推出不等式 (3.6.18). □

引理 3.6.3 设 $k \geqslant 0$, $p \in [2,\infty]$, $q \in [1,2]$, $r \in [1,2]$ 和 $s > N\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{p}\right)$ 或如果 $r=p=2, s \geqslant 0$, 则对于任意的 $u_0 \in \dot{H}_q^{-2\gamma} \cap \dot{H}_r^{k+s}$, 有估计

$$
\|\tilde{\mathcal{G}}(t)u_0\|_{\dot{H}_p^k} \lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}-\gamma}\left(\|u_0\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right),
\tag{3.6.24}
$$

其中 $\gamma \geqslant 0$.

证明 对于 $0<\nu \leqslant 2$ 有

$$
\begin{aligned}
L_1(\xi,t) = {} & e^{-\frac{\nu}{2}\frac{t|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}\cos\left(\frac{t|\xi|}{2(1+|\xi|^2)}\sqrt{(4-\nu^2)|\xi|^2+4}\right) \\
& + e^{-\frac{\nu}{2}\frac{t|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}\frac{\nu|\xi|}{\sqrt{(4-\nu^2)|\xi|^2+4}}\sin\left(\frac{t|\xi|}{2(1+|\xi|^2)}\sqrt{(4-\nu^2)|\xi|^2+4}\right).
\end{aligned}
$$

所以

$$
|L_1(\xi,t)| \leqslant \left(1+\frac{\nu}{2}\frac{t|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\right)e^{-\frac{\nu}{2}\frac{t|\xi|^2}{1+|\xi|^2}},
$$

应用估计式 (3.6.19) 的方法可得估计 (3.6.24).

对于 $\nu>2$, 将 $\tilde{\mathcal{G}}(t)u_0$ 分成两部分

$$
\|\tilde{\mathcal{G}}(t)u_0\|_{\dot{H}_p^k} \lesssim \left(\int_{|\xi|\leqslant\xi_0} ||\xi|^k L_1(\xi,t)\hat{u}_0(\xi)|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{|\xi|>\xi_0} ||\xi|^k L_1(\xi,t)\hat{u}_0(\xi)|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}.
$$

如果 $|\xi| \leqslant \xi_0$, 则存在一个正常数 $k_3 = \dfrac{\nu}{2(1+\xi_0^2)}$, 使得

$$
|L_1(\xi,t)| \leqslant (1+k_3|\xi|^2 t)e^{-k_3|\xi|^2 t}.
$$

如果 $|\xi|>\xi_0$, 将 $L_1(\xi,t)$ 改写为

$$
L_1(\xi,t) = e^{\lambda_+(\xi)t}\left[1+\frac{\nu|\xi|-\sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4}}{2\sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4}}\left(1-e^{-\frac{t|\xi|}{1+|\xi|^2}\sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4}}\right)\right],
$$

由此可得

$$|L_1(\xi,t)| \leqslant \left(1+\frac{\nu}{2}t\right)e^{-\frac{4}{\nu^3}t}.$$

类似于引理 3.6.2, 可得估计 (3.6.24). □

引理 3.6.4 设 $k\geqslant 0$, $p\in[2,\infty]$, $q\in[1,2]$, $r\in[1,2]$ 和 $s>N\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)$ 或如果 $r=p=2$, $s\geqslant 0$. 于是对于任意 $g(\cdot,t)\in L^q\cap \dot{H}_r^{k+s}$, 有

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)(I-\Delta)^{-1}\Delta g(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{\dot{H}_p^k}\\ \lesssim &\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k+1}{2}}\left(\|g(\cdot,\tau)\|_{L^q}+\|g(\cdot,\tau)\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right)d\tau.\end{aligned}\tag{3.6.25}$$

证明 对于 $0<\nu\leqslant 2$, 有

$$\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}L(\xi,t)=e^{-\frac{\nu}{2}\frac{t|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}\frac{2|\xi|}{\sqrt{(4-\nu^2)|\xi|^2+4}}\sin\left(\frac{t|\xi|}{2(1+|\xi|^2)}\sqrt{(4-\nu^2)|\xi|^2+4}\right).$$

应用 Hausdorff-Young 不等式和 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}(t)(I-\Delta)^{-1}\Delta g\|_{\dot{H}_p^k}\lesssim&\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}L(\xi,t)|\xi|^k\hat{g}(\xi)\right|^{p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\ \lesssim&\left(\int_{|\xi|\leqslant 1}(e^{-\frac{\nu}{4}|\xi|^2t}|\xi|^{k+1}|\hat{g}(\xi)|)^{p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &+te^{-\frac{\nu}{4}t}\left(\int_{|\xi|>1}||\xi|^k\hat{g}(\xi)|^{p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\ \lesssim&(1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k+1}{2}}\|g\|_{L^q}+e^{-\frac{\nu}{8}t}\|g\|_{\dot{H}_r^{k+s}}.\end{aligned}\tag{3.6.26}$$

对于 $\nu>2$, 将 $\mathcal{G}(t)(I-\Delta)^{-1}\Delta g$ 分为三部分:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}(t)(I-\Delta)^{-1}\Delta g\|_{\dot{H}_p^k}\lesssim&\left(\int_{|\xi|\leqslant\xi_1}\left||\xi|^k\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}L(\xi,t)\hat{g}(\xi)\right|^{p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &+\left(\int_{\xi_1<|\xi|\leqslant\xi_0}||\xi|^k\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}L(\xi,t)\hat{g}(\xi)|^{p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &+\left(\int_{|\xi|>\xi_0}||\xi|^k\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}L(\xi,t)\hat{g}(\xi)|^{p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

如果 $0<|\xi|\leqslant\xi_1$, 则

$$\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}|L(\xi,t)|\lesssim|\xi|e^{-k_1|\xi|^2t}.$$

如果 $\xi_1 < |\xi| \leqslant \xi_0$, 则

$$\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}|L(\xi,t)| \leqslant te^{-k_2 t}.$$

如果 $|\xi| > \xi_0$, 由

$$\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}L(\xi,t) = e^{\lambda_+(\xi)t}\frac{|\xi|^2}{\sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4}}\left(1-e^{-\frac{t|\xi|}{1+|\xi|^2}\sqrt{(\nu^2-4)|\xi|^2-4}}\right)$$

得

$$\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}|L(\xi,t)| \leqslant te^{-\frac{4}{\nu^3}t}.$$

如在引理 3.6.2 的证明中可得到类似于式 (3.6.26) 的估计 (3.6.25). □

引理 3.6.5 设 $k \geqslant 0, p \in [2,\infty], q \in [1,2], r \in [1,2]$ 和 $s > N\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)$ 或如果 $r=p=2$ 时, $s \geqslant 0$. 于是对于任意的 $u_0 \in \dot{H}_q^{-2\gamma} \cap \dot{H}_r^{k+s}$, $u_1 \in \dot{H}_q^{-2\gamma-1} \cap \dot{H}_r^{k+s}$ 和 $g \in L^2([0,T]; L^q \cap \dot{H}_r^{k+s})$, 问题 (3.6.3), (3.6.4) 存在唯一广义解 $u(x,t) \in C^2([0,T]; \dot{H}_p^k)$ $(\forall T>0)$. 同时有估计

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t)\|_{\dot{H}_p^k} \\
\lesssim\,&(1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}-\gamma}\left(\|u_0\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot{H}_r^{k+s}}+\|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right) \\
&+\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k+1}{2}}\left(\|g(\cdot,\tau)\|_{L^q}+\|g(\cdot,\tau)\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right)d\tau, \qquad (3.6.27) \\
&\|u_t(\cdot,t)\|_{\dot{H}_p^k} \\
\lesssim\,&(1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k+1}{2}-\gamma}\left(\|u_0\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot{H}_r^{k+s}}+\|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right) \\
&+\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k+2}{2}}\left(\|g(\cdot,\tau)\|_{L^q}+\|g(\cdot,\tau)\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right)d\tau, \qquad (3.6.28)
\end{aligned}$$

其中 $\gamma \geqslant 0$.

证明 通过 Duhamel 原理可以证明问题 (3.6.3), (3.6.4) 存在唯一解 $u(x,t)$. 估计 (3.6.27) 可以由引理 3.6.2–引理 3.6.4 立得.

因为

$$u_t(x,t) = (I-\Delta)^{-1}\Delta\mathcal{G}(t)u_0 + \partial_t\mathcal{G}(t)u_1 + \int_0^t \partial_t\mathcal{G}(t-\tau)(I-\Delta)^{-1}\Delta g(\tau)d\tau,$$

类似于引理 3.6.2–引理 3.6.4 可得式 (3.6.28) 的结论. □

3.6.3 Cauchy 问题 (3.6.1), (3.6.2) 整体解的存在性与唯一性

为了证明 Cauchy 问题 (3.6.1), (3.6.2) 整体解的存在性与唯一性, 先引入两个需要的引理如下.

引理 3.6.6[200,196]　对于任意的 $s \geqslant 0$, 如果 $u \in L^{(\alpha-1)r_1} \cap H^s_{r_2}$, 则有估计

$$\|f(u)\|_{\dot{H}^s_r} \lesssim \|u\|^{\alpha-1}_{L^{(\alpha-1)r_1}} \|u\|_{\dot{H}^s_{r_2}}, \tag{3.6.29}$$

其中

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad r_1 \in (1,\infty], \quad r_2 \in (1,\infty);$$

如果 $u \in L^{q_1} \cap \dot{H}^s_{r_1}, v \in L^{q_2} \cap \dot{H}^s_{r_2}$, 则有估计

$$\|uv\|_{\dot{H}^s_r} \lesssim \|u\|_{\dot{H}^s_{r_1}} \|v\|_{L^{q_2}} + \|u\|_{L^{q_1}} \|v\|_{\dot{H}^s_{r_2}}, \tag{3.6.30}$$

其中

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_2}, \quad r_i \in (1,\infty), \quad q_i \in (1,\infty), \quad i = 1,2.$$

引理 3.6.7[30]　设 a, b 是满足 $0 \leqslant a \leqslant b$ 的常数, 那么

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-a} (1+\tau)^{-b} d\tau \lesssim (1+t)^{-a} \int_0^t (1+\tau)^{-b} d\tau.$$

同时, 如果 $b > 1$, 则有

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-a} (1+\tau)^{-b} d\tau \lesssim (1+t)^{-a}. \tag{3.6.31}$$

定理 3.6.1　设 s, q, γ 是正常数, 使得 $\dfrac{N}{2} < s \leqslant k, q \in [1,2], \gamma \geqslant \dfrac{1}{2}$. 如果
对于 $N=1,\ 1 \leqslant q < \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$,

$$\alpha \geqslant \frac{2}{q},$$

对于 $N=1,\ \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \leqslant q \leqslant 2$,

$$\alpha > \frac{1+2q}{1+q},$$

对于 $N=2,\ 1 \leqslant q \leqslant \sqrt{5}-1$,

$$\alpha \geqslant \frac{2}{q},$$

对于 $N=2,\ \sqrt{5}-1 < q < 2$,

$$\alpha \geqslant \frac{4+q}{2+q},$$

对于 $N=2,\ q=2$,

$$\alpha > \frac{3}{2},$$

对于 $N \geqslant 3,\ 1 \leqslant q < \sqrt{N^2+1}-(N-1)$,

$$\alpha \geqslant \frac{2}{q},$$

对于 $N \geqslant 3,\ \sqrt{N^2+1}-(N-1) < q \leqslant 2$,

$$\alpha \geqslant \frac{2N+q}{N+q},$$

那么存在一正常数 δ, 使得对于任意的 $u_0 \in \dot{H}^s \cap \dot{H}_q^{-2\gamma}, u_1 \in \dot{H}^s \cap \dot{H}_q^{-2\gamma-1}$ 满足

$$\|u_0\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}} + \|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma-1}} + \|u_1\|_{\dot{H}^s} \leqslant \delta. \tag{3.6.32}$$

Cauchy 问题 (3.6.1), (3.6.2) 存在唯一整体解 $(u,u_t)(x,t) \in C([0,\infty); H^s \times \dot{H}^s)$. 同时,

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t<\infty} \Big[&(1+t)^{\frac{N+q}{2q}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} + (1+t)^{\theta}\|u_t(\cdot,t)\|_{L^\infty} \\ &+ (1+t)^{\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\|u(\cdot,t)\|_{H^s} + (1+t)^{\theta^*}\|u_t(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s}\Big] \leqslant \rho,\end{aligned} \tag{3.6.33}$$

其中

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}, & \alpha \leqslant 2, \\ \dfrac{N+2q}{2q}, & \alpha > 2, \end{cases} \tag{3.6.34}$$

$$\theta^* = \begin{cases} \dfrac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}, & \alpha \leqslant \dfrac{N(4-q)+2q(s+2)}{2(N+q)}, \\ \dfrac{N(2-q)+2q(s+2)}{4q}, & \alpha > \dfrac{N(4-q)+2q(s+2)}{2(N+q)} \end{cases} \tag{3.6.35}$$

和小正数 ρ 仅依赖于 f 和 δ.

注 3.6.1 由文献 [205] 中的推论 2 看出, 对于所有的 $u_0 \in \dot{H}_q^{-2\gamma} \cap \dot{H}^s$ 成立

$$\|u_0\|_{L^2} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}_1^{-2\gamma}}^{\frac{s}{s+2\gamma+N/q-N/2}} \|u_0\|_{\dot{H}^s}^{\frac{2\gamma+N/q-N/2}{s+2\gamma+N/q-N/2}},$$

所以对于 $u_0 \in \dot{H}_q^{-2\gamma} \cap \dot{H}^s$ 和 $s \geqslant 0$ 有 $u_0 \in H^s$.

定理 3.6.1 的证明 由下式

$$\mathcal{N}(u) = \tilde{\mathcal{G}}(t)u_0 + \mathcal{G}(t)u_1 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)(I-\Delta)^{-1}\Delta f(u(\tau))d\tau \tag{3.6.36}$$

定义 $(X,d)((X,d)$ 表示距离为 d 的集合 $X)$ 上的一非线性映射 $\mathcal{N}$, 其中

$$X = \left\{u(x,t) \in L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R}^N) \cap L^\infty([0,\infty);H^s) \,\Big|\, |||u||| \leqslant \frac{\rho}{2}\right\}, \tag{3.6.37}$$

并赋予范数

$$|||u||| = \sup_{t\geqslant 0}\left[(1+t)^{\frac{N+q}{2q}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} + (1+t)^{\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\right] \tag{3.6.38}$$

和对于 $u,v\in X$ 定义距离 $d(u,v)=\left\|(1+t)^{\frac{N(2-q)+2q}{4q}}(u-v)\right\|_{L^\infty([0,\infty);L^2)}$. 易证 (X,d) 是一完备的距离空间. 事实上, 令 $\{u_i\}_{i=1}^\infty\subset X$ 是在 $L^\infty((0,\infty);L^2)$ 中收敛于 u. 于是利用 $L^\infty((0,\infty);H^s)$ 的弱 $*$ 完备性可以找到一个函数 $w\in X$, 使得存在一子序列 $\{u_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ 在 $L^\infty((0,\infty);L^2)$ 中弱 $*$ 收敛, 因此在广义意义下收敛. 根据 $\{u_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ 在 $L^\infty((0,\infty);L^2)$ 中的强收敛, 推出 $w=u$. 因为$s>\dfrac{N}{2}$, $u\in L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$. 同时, 根据广义收敛性, 对于任意的 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 和几乎处处的 $t\in[0,\infty)$, 当 $k\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{N+q}{2q}}\int_{\mathbb{R}^N}u_{i_k}(x,t)\phi dx\to(1+t)^{\frac{N+q}{2q}}\int_{\mathbb{R}^N}u(x,t)\phi dx,\\
&(1+t)^{\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\int_{\mathbb{R}^N}u_{i_k}(x,t)\phi dx\to(1+t)^{\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\int_{\mathbb{R}^N}u(x,t)\phi dx,
\end{aligned}$$

从而推出

$$\sup_{t\geqslant 0}\left[(1+t)^{\frac{N+q}{2q}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}+(1+t)^{\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\right]\leqslant\frac{\rho}{2}.$$

这就证明了距离空间 (X,d) 的完备性.

下面证明, 对于充分小的 ρ, $\mathcal{N}$ 是从 (X,d) 到 (X,d) 的严格压缩映射. 事实上, 在式 (3.6.27) 中取 $k=0,p=\infty,r=2$, 注意到 $\alpha q\geqslant 2$, 应用条件 (3.6.32) 和引理 3.6.2 看出, 对于任意的 $u\in X$,

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{N}(u)\|_{L^\infty}\\
\lesssim&(1+t)^{-\frac{N}{2q}-\gamma}\left[\|u_0\|_{\dot H_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot H^s}+\|u_1\|_{\dot H_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot H^s}\right]\\
&+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N+q}{2q}}\left(\|f(u(\cdot,\tau))\|_{L^q}+\|f(u(\cdot,\tau))\|_{\dot H^s}\right)d\tau\\
\lesssim&\,\delta(1+t)^{-\frac{N}{2q}-\gamma}\\
&+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N+q}{2q}}\left(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-\frac{2}{q}}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2}^{\frac{2}{q}}+\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u(\cdot,\tau)\|_{\dot H^s}\right)d\tau\\
\lesssim&\,\delta(1+t)^{-\frac{N}{2q}-\gamma}\\
&+|||u|||^\alpha\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N+q}{2q}}\left[(1+\tau)^{-\frac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}}+(1+\tau)^{-\frac{N(2\alpha-q)+2\alpha q}{4q}}\right]d\tau.
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{N(2\alpha-q)+2\alpha q}{4q}\geqslant\frac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}\geqslant\frac{N+q}{2q}>\frac{N(2-q)+2q}{4q} \tag{3.6.39}$$

和对于 $N \geqslant 3$,

$$\frac{N}{2q}+\frac{1}{2}>1,$$

对于 $N=1,2$,

$$\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{2q}>1,$$

根据引理 3.6.3, 对于充分小的 δ 和 ρ 有

$$(1+t)^{\frac{N+q}{2q}}\|\mathcal{N}(u)\|_{L^\infty}\lesssim\delta+\rho^\alpha<\frac{\rho}{4}. \tag{3.6.40}$$

另一方面, 在式 (3.6.27) 中取 $k=s,p=2,r=2,s=0$, 应用条件 (3.6.32) 和引理 3.6.2 推出

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{N}(u)\|_{H^s}\\
\lesssim&(1+t)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\gamma}\left[\|u_0\|_{\dot H_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot H^s}+\|u_1\|_{\dot H_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot H^s}\right]\\
&+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\left(\|f(u(\cdot,\tau))\|_{L^q}+\|f(u(\cdot,\tau))\|_{\dot H^s}\right)d\tau\\
\lesssim&\delta(1+t)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\gamma}+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\Big(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-\frac{2}{q}}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2}^{\frac{2}{q}}\\
&+\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u(\cdot,\tau)\|_{\dot H^s}\Big)d\tau\\
\lesssim&\delta(1+t)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\gamma}+|||u|||^\alpha\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\\
&\times\left[(1+\tau)^{-\frac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}}+(1+\tau)^{-\frac{N(2\alpha-q)+2\alpha q}{4q}}\right]d\tau.
\end{aligned}$$

由式 (3.6.39) 和引理 3.6.3 得到, 对于充分小的 δ 和 ρ,

$$(1+t)^{\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\|\mathcal{N}(u)\|_{H^s}\lesssim\delta+\rho^\alpha<\frac{\rho}{4}. \tag{3.6.41}$$

综合式 (3.6.40) 和式 (3.6.41) 有

$$|||\mathcal{N}(u)|||<\frac{\rho}{2}. \tag{3.6.42}$$

所以 $\mathcal{N}$ 映 X 到 X.

对于任意的 $u,v\in X$, 由式 (3.6.36) 知

$$\mathcal{N}(u)-\mathcal{N}(v)=\int_0^t\mathcal{G}(t-\tau)(I-\Delta)^{-1}\Delta\big[f(u(x,\tau))-f(v(x,\tau))\big]d\tau. \tag{3.6.43}$$

在式 (3.6.27) 中取 $k=0,p=2,r=2,s=0$, 且注意到

$$|f(u)-f(v)|\lesssim(|u|^{\alpha-1}+|v|^{\alpha-1})|u-v|,$$

可得

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{N}(u)-\mathcal{N}(v)\|_{L^2}\\
\lesssim&\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)+2q}{4q}}[\|f(u(\cdot,\tau))-f(v(\cdot,\tau))\|_{L^q}\\
&+\|f(u(\cdot,\tau))-f(v(\cdot,\tau))\|_{L^2}]d\tau\\
\lesssim&\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\big[(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1}+\|v(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1})\|u(\cdot,\tau)-v(\cdot,\tau)\|_{L^2}\\
&+(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}+\|v(\cdot,\tau)\|_{L^\infty})^{\alpha-\frac{2}{q}}(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2}\\
&+\|v(\cdot,\tau)\|_{L^2})^{\frac{2-q}{q}}\|u(\cdot,\tau)-v(\cdot,\tau)\|_{L^2}\big]d\tau\\
\lesssim&\rho^{\alpha-1}d(u,v)\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\\
&\times\left[(1+\tau)^{-\frac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}}+(1+\tau)^{-\frac{N(2\alpha-q)+2\alpha q}{4q}}\right]d\tau.
\end{aligned}
$$

类似于式 (3.6.41), 由引理 3.6.3 知

$$(1+t)^{\frac{N(2-q)+2q}{4q}}\|\mathcal{N}(u)-\mathcal{N}(v)\|_{L^2}\lesssim\rho^{\alpha-1}d(u,v). \tag{3.6.44}$$

所以对于充分小的 ρ, $\mathcal{N}$ 是严格压缩的. 应用压缩映射原理知, $\mathcal{N}$ 在 X 中有唯一的不动点 $u(x,t)$, 且

$$u(x,t)=\tilde{\mathcal{G}}(t)u_0+\mathcal{G}(t)u_1+\int_0^t\mathcal{G}(t-\tau)(I-\Delta)^{-1}\Delta f(u(x,\tau))d\tau \tag{3.6.45}$$

是 Cauchy 问题 (3.6.1), (3.6.2) 的解. 利用标准方法可以证明解 $u(x,t)$ 的唯一性和解对时间的连续性.

式 (3.6.45) 对 t 求导得

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t)=&(I-\Delta)^{-1}\Delta\mathcal{G}(t)u_0+\partial_t\mathcal{G}(t)u_1\\
&+\int_0^t\partial_t\mathcal{G}(t-\tau)(I-\Delta)^{-1}\Delta f(u(x,\tau))d\tau.
\end{aligned}\tag{3.6.46}
$$

因此在式 (3.6.28) 中取 $k=0,p=\infty,r=2$, 应用条件 (3.6.32) 和引理 3.6.2 看出

$$
\begin{aligned}
&\|u_t(\cdot,t)\|_{L^\infty}\\
\lesssim&(1+t)^{-\frac{N+q}{2q}-\gamma}\big[\|u_0\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot{H}^s}+\|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot{H}^s}\big]\\
&+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N+2q}{2q}}\left(\|f(u(\cdot,\tau))\|_{L^q}+\|f(u(\cdot,\tau))\|_{\dot{H}^s}\right)d\tau
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \delta(1+t)^{-\frac{N+q}{2q}-\gamma}\\
&\quad+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N+2q}{2q}}\left(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-\frac{2}{q}}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2}^{\frac{2}{q}}+\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u(\cdot,\tau)\|_{\dot H^s}\right)d\tau\\
&\lesssim \delta(1+t)^{-\frac{N+q}{2q}-\gamma}\\
&\quad+\||u|\|^\alpha\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N+2q}{2q}}\left[(1+\tau)^{-\frac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}}+(1+\tau)^{-\frac{N(2\alpha-q)+2\alpha q}{4q}}\right]d\tau.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{cases}1<\dfrac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}\leqslant\dfrac{N+2q}{2q}, & \alpha\leqslant 2,\\ 1<\dfrac{N+2q}{2q}<\dfrac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}, & \alpha>2,\end{cases}$$

根据引理 3.6.3, 对于充分小的 δ 和 ρ,

$$(1+t)^\theta\|u_t(\cdot,t)\|_{L^\infty}\lesssim\delta+\rho^\alpha<\frac{\rho}{4}. \tag{3.6.47}$$

另一方面, 在式 (3.6.32) 中取 $k=s,p=2,r=2,s=0$, 利用条件 (3.6.32) 和引理 3.6.2 得

$$\begin{aligned}
&\|u_t(\cdot,t)\|_{\dot H^s}\\
&\lesssim(1+t)^{-\frac{N(2-q)+2q(s+1)}{4q}-\gamma}\left[\|u_0\|_{\dot H_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot H^s}+\|u_1\|_{\dot H_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot H^s}\right]\\
&\quad+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)+2q(s+2)}{4q}}\left(\|f(u(\cdot,\tau))\|_{L^q}+\|f(u(\cdot,\tau))\|_{\dot H^s}\right)d\tau\\
&\lesssim\delta(1+t)^{-\frac{N(2-q)+2q(s+1)}{4q}-\gamma}+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)+2q(s+2)}{4q}}\\
&\quad\times\left(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-\frac{2}{q}}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2}^{\frac{2}{q}}+\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u(\cdot,\tau)\|_{\dot H^s}\right)d\tau\\
&\lesssim\delta(1+t)^{-\frac{N(2-q)+2q(s+1)}{4q}-\gamma}+\||u|\|\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)+2q(s+2)}{4q}}\\
&\quad\times\left[(1+\tau)^{-\frac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}}+(1+\tau)^{-\frac{N(2\alpha-q)+2\alpha q}{4q}}\right]d\tau.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{cases}1<\dfrac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}\leqslant\dfrac{N(2-q)+2q(s+2)}{4q}, & \alpha\leqslant\dfrac{N(4-q)+2q(s+2)}{2(N+q)},\\ 1<\dfrac{N(2-q)+2q(s+2)}{4q}<\dfrac{N(\alpha-1)+\alpha q}{2q}, & \alpha>\dfrac{N(4-q)+2q(s+2)}{2(N+q)},\end{cases}$$

按照引理 3.6.3, 对于充分小的 δ 和 ρ 有

$$(1+t)^{\theta^*}\|u_t(\cdot,t)\|_{\dot H^s}\lesssim\delta+\rho^\alpha<\frac{\rho}{4}.$$

□

注 3.6.2 由定理 3.6.1 知, 取 $q \in [1,2]$ 小一些, 则 α 的区间变得小一些, 对应解 u 的时间衰减速度变得快一些. 反之, 如果取 $q \in [1,2]$ 大一些, 则 α 的区间变得大一些, 且对应解 u 的时间衰减速度变得慢一些.

注 3.6.3 到目前为止, 对于多维广义 IMBq 方程 $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} = \Delta f(u)$ 最好的结果是当 $N = 1, 2$ 时 $\alpha > 4$; 当 $N \geqslant 3$ 时 $\alpha > 2N$, 证明参考 Cho 和 Ozawa 的文献 [197]. 在这一节中对于具流体动力学阻尼项的多维广义 IMBq 方程 (3.6.1), 当 $N = 1$ 时, 得到 $\alpha \geqslant \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$, 当 $N = 2$ 时, 得到 $\alpha > \dfrac{3}{2}$, 以及当 $N \geqslant 3$ 时, 得到 $\alpha \geqslant \dfrac{2N+2}{N+2}$. 这完全呈现出阻尼项影响解的性质.

3.6.4 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [195], 与本节有关的文献见 [26], [30], [32], [33], [35], [68], [150], [151], [160], [161], [170], [196]–[212].

3.7 关于广义立方双色散方程 Cauchy 问题解的渐近性质

3.7.1 引言

2.5 节讨论了广义立方双色散方程的初边值问题, 3.5 节应用压缩映射原理研究了一维广义立方双色散方程的 Cauchy 问题, 3.10 节将应用 Galerkin 方法研究了一维广义立方双色散的周期边值问题和 Cauchy 问题. 本节讨论下列 N 维广义立方双色散方程 Cauchy 问题

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - a\Delta u - b\Delta u_t = \Delta f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{3.7.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.7.2}$$

其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, u_0 和 u_1 是给定的初值函数, a 和 b 是正常数, 而 $f(u)$ 是给定的非线性函数.

下面首先建立 Cauchy 问题 (3.7.1), (3.7.2) 对应的线性化方程 Cauchy 问题解的衰减估计, 其次在带时间权的 Sobolev 空间中应用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (3.7.1), (3.7.2) 在小初值的条件下小振幅解的整体存在性和解的渐近性质.

3.7.2 线性化方程 Cauchy 问题解的衰减性质

下面研究线性化方程 Cauchy 问题

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - a\Delta u - b\Delta u_t = \Delta g(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{3.7.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.7.4}$$

解的衰减性质.

首先引入方程 (3.7.3) 的解算子. 方程 (3.7.3) 和初值条件 (3.7.4) 对 x 取 Fourier 变换, Cauchy 问题 (3.7.3), (3.7.4) 化为下列带参数 $\xi \in \mathbb{R}^N$ 的常微分方程的 Cauchy 问题

$$(1+|\xi|^2)\hat{u}_{tt}(\xi,t)+b|\xi|^2\hat{u}_t(\xi,t)+|\xi|^2(a+|\xi|^2)\hat{u}(\xi,t)=-|\xi|^2\hat{g}(\xi,t), \quad (3.7.5)$$

$$\hat{u}(\xi,0)=\hat{u}_0(\xi), \quad \hat{u}_t(\xi,0)=\hat{u}_1(\xi). \quad (3.7.6)$$

方程 (3.7.5) 对应的特征方程是

$$(1+|\xi|^2)\lambda^2+b|\xi|^2\lambda+|\xi|^2(a+|\xi|^2)=0. \quad (3.7.7)$$

方程 (3.7.7) 的根 $\lambda_\pm(\xi)$ 由下式给定

$$\lambda_\pm(\xi)=\frac{-b|\xi|^2\pm|\xi|\sqrt{b^2|\xi|^2-4(1+|\xi|^2)(a+|\xi|^2)}}{2(1+|\xi|^2)}.$$

按照 Duhamel 原理 Cauchy 问题 (3.7.3), (3.7.4) 的解由下式确定

$$u(x,t)=G(t)*u_0+H(t)*u_1+\int_0^t H(t-\tau)*(I-\Delta)^{-1}\Delta g(\tau)d\tau, \quad (3.7.8)$$

其中 $*$ 表示关于 $x\in\mathbb{R}^N$ 的卷积和,

$$G(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[\hat{G}(\cdot,t)](x), \quad H(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[\hat{H}(\cdot,t)](x),$$

$$\hat{G}(\xi,t)=\frac{\lambda_+(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}-\lambda_-(\xi)e^{\lambda_+(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}, \quad (3.7.9)$$

$$\hat{H}(\xi,t)=\frac{e^{\lambda_+(\xi)t}-e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}. \quad (3.7.10)$$

命题 3.7.1 设 $k\geqslant 0$, $p\in[2,\infty]$, $q\in[1,2]$, $r\in[1,2]$ 和 $s>N\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)$ 或如果 $r=p=2$ 时, $s\geqslant 0$. 对于所有的 $t\geqslant 0$ 和只要下列不等式右端有限, 于是成立下列估计

$$\|G(t)*u_0\|_{\dot{H}_p^k}\lesssim(1+t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}-\gamma}\left(\|u_0\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right), \quad (3.7.11)$$

$$\|H(t)*u_1\|_{\dot{H}_p^k}\lesssim(1+t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}-\gamma}\left(\|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot{H}_r^{k+s-1}}\right), \quad (3.7.12)$$

$$\|G_t(t)*u_0\|_{\dot{H}_p^k}\lesssim(1+t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k+1}{2}-\gamma}\left(\|u_0\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot{H}_r^{k+s+1}}\right), \quad (3.7.13)$$

$$\|H_t(t)*u_1\|_{\dot{H}_p^k}\lesssim(1+t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}-\gamma}\left(\|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}}+\|u_1\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right), \quad (3.7.14)$$

其中 $\gamma\geqslant 0$ 是一常数.

命题 3.7.1 的证明可以利用乘子方法, 得到 $\hat{H}(\xi,t)$ 和 $\hat{G}(\xi,t)$ 的表达式. 但是为了克服讨论参数 a 和 b 的困难, 首先应用文献 [213] 中的方法建立基本解 $\hat{G}(\xi,t)$ 和 $\hat{H}(\xi,t)$ 在 Fourier 空间的点态估计. 为此, 令

$$v(t) = G(t) * u_0 + H(t) * u_1,$$

于是 $v(t)$ 是下列问题

$$v_{tt} - \Delta v_{tt} + \Delta^2 v - a\Delta v - b\Delta v_t = 0, \tag{3.7.15}$$

$$v(x,0) = u_0(x), \quad v_t(x,0) = u_1(x) \tag{3.7.16}$$

的解.

引理 3.7.1 对于 $\xi \in \mathbb{R}^N$ 和 $t \geqslant 0$, 问题 (3.7.15), (3.7.16) 的解满足以下估计

$$|\hat{v}_t(\xi,t)|^2 + |\xi|^2|\hat{v}(\xi,t)|^2 \lesssim e^{-\frac{c|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}\left[|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0(\xi)|^2\right], \tag{3.7.17}$$

其中 $c > 0$ 是常数.

证明 方程 (3.7.15) 作 Fourier 变换, 有

$$(1+|\xi|^2)\hat{v}_{tt} + b|\xi|^2\hat{v}_t + |\xi|^2(a+|\xi|^2)\hat{v} = 0. \tag{3.7.18}$$

对应的初值为

$$\hat{v}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \hat{v}_t(\xi,0) = \hat{u}_1(\xi). \tag{3.7.19}$$

方程 (3.7.18) 两端乘以 $\bar{\hat{v}}_t$, 并取实部. 这给出

$$\frac{1}{2}\left[(1+|\xi|^2)|\hat{v}_t|^2 + |\xi|^2(a+|\xi|^2)|\hat{v}|^2\right]_t + b|\xi|^2|\hat{v}_t|^2 = 0. \tag{3.7.20}$$

方程 (3.7.18) 两端乘以 $\bar{\hat{v}}$, 并取实部, 得

$$\frac{1}{2}\left[2(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}(\hat{v}_t\bar{\hat{v}}) + b|\xi|^2|\hat{v}|^2\right]_t + |\xi|^2(a+|\xi|^2)|\hat{v}|^2 - (1+|\xi|^2)|\hat{v}_t|^2 = 0. \tag{3.7.21}$$

方程 (3.7.20) 和方程 (3.7.21) 两端分别乘以 $2(1+|\xi|^2)$ 和 $b|\xi|^2$, 乘积相加, 有

$$\frac{dE}{dt} + F = 0, \tag{3.7.22}$$

其中

$$\begin{aligned}E =& (1+|\xi|^2)^2|\hat{v}_t|^2 + |\xi|^2\left[(1+|\xi|^2)(a+|\xi|^2) + \frac{b^2}{2}|\xi|^2\right]|\hat{v}|^2\\ &+ b|\xi|^2(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}(\hat{v}_t\bar{\hat{v}}),\\ F =& b|\xi|^2(1+|\xi|^2)|\hat{v}_t|^2 + b|\xi|^4(a+|\xi|^2)|\hat{v}|^2.\end{aligned}$$

令

$$E_0 = |\hat{v}_t|^2 + |\xi|^2|\hat{v}|^2,$$

简单地计算指出

$$E \sim (1+|\xi|^2)^2 E_0, \quad F \gtrsim |\xi|^2(1+|\xi|^2)E_0.$$

将这些估计代入式 (3.7.22), 得

$$\frac{dE}{dt} \lesssim -\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}E.$$

这个常微分不等式解为 $E(\xi,t) \leqslant e^{-\frac{c|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}E(\xi,0)$, 它同 $E \sim (1+|\xi|^2)^2E_0$ 证明了想要的估计 (3.7.17). □

引理 3.7.2 设由式 (3.7.9) 和式 (3.7.10) 分别给定的 $\hat{G}(\xi,t)$ 和 $\hat{H}(\xi,t)$ 是 Fourier 空间中方程 (3.7.15) 的基本解, 则有下列估计

$$|\hat{G}(\xi,t)| + |\hat{H}_t(\xi,t)| \lesssim e^{-\frac{c|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}, \tag{3.7.23}$$

$$|\hat{G}_t(\xi,t)| \lesssim |\xi|e^{-\frac{c|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}, \tag{3.7.24}$$

$$|\xi||\hat{H}(\xi,t)| \lesssim e^{-\frac{c|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}. \tag{3.7.25}$$

证明 考虑由下列表达式

$$\hat{v}(\xi,t) = \hat{G}(\xi,t)\hat{u}_0(\xi) + \hat{H}(\xi,t)\hat{u}_1(\xi) \tag{3.7.26}$$

给出的问题 (3.7.15), (3.7.16) 的解 $\hat{v}(\xi,t)$.

首先置 $\hat{u}_1(\xi) = 0$. 那么有

$$\hat{v}(\xi,t) = \hat{G}(\xi,t)\hat{u}_0(\xi), \quad \hat{v}_t(\xi,t) = \hat{G}_t(\xi,t)\hat{u}_0(\xi).$$

将这些表达式代入具有 $u_1(\xi) = 0$ 的式 (3.7.17), 得

$$|\hat{G}_t(\xi,t)|^2 + |\xi|^2|\hat{G}(\xi,t)|^2 \lesssim |\xi|^2 e^{-\frac{c|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}.$$

这就证明了想要的 $\hat{G}(\xi,t)$ 和 $\hat{G}_t(\xi,t)$ 的估计. 其次考虑 $\hat{u}_0(\xi) = 0$ 的情况. 此时, 有

$$\hat{v}(\xi,t) = \hat{H}(\xi,t)\hat{u}_1(\xi), \quad \hat{v}_t(\xi,t) = \hat{H}_t(\xi,t)\hat{u}_1(\xi).$$

应用具有 $\hat{u}_0(\xi) = 0$ 的式 (3.7.17) 推出

$$|\hat{H}_t(\xi,t)|^2 + |\xi|^2|\hat{H}(\xi,t)|^2 \lesssim e^{-\frac{c|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}.$$

这就证明了想要的 $\hat{H}(\xi,t)$ 和 $\hat{H}_t(\xi,t)$ 的估计. □

命题 3.7.1 的证明 证明基础是引理 1.8.6(Hausdorff-Young 不等式) 和引理 3.6.1. 根据 Hausdorff-Young 不等式和式 (3.7.25) 知

$$
\begin{aligned}
\|H(t)*u_1\|_{\dot{H}_p^k} &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||\xi|^k \hat{H}(\xi,t)\hat{u}_1(\xi)|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(e^{-\frac{c|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}|\xi|^{k-1}|\hat{u}_1(\xi)|\right)^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim \left(\int_{|\xi|\leqslant 1} \left(e^{-\frac{c|\xi|^2}{2}t}|\xi|^{k-1}|\hat{u}_1(\xi)|\right)^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\quad + e^{-\frac{c}{2}t}\left(\int_{|\xi|>1} \left(|\xi|^{k-1}|\hat{u}_1(\xi)|\right)^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned} \tag{3.7.27}
$$

对于 $\dfrac{1}{p'}=\dfrac{1}{q_0}+\dfrac{1}{q'}$, 应用 Hölder 不等式和注意到

$$
\frac{1}{q_0}=\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p},
$$

由 Hausdorff-Young 不等式得

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{|\xi|\leqslant 1} \left(e^{-\frac{c|\xi|^2}{2}t}|\xi|^{k-1}|\hat{u}_1(\xi)|\right)^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} \\
\leqslant &\left\|\left(e^{-\frac{c|\xi|^2}{2}t}|\xi|^{k+2\gamma}\right)^{p'}\right\|_{L^{\frac{q_0}{p'}}(|\xi|\leqslant 1)}^{\frac{1}{p'}} \left\|\left(|\xi|^{-2\gamma-1}|\hat{u}_1(\xi)|\right)^{p'}\right\|_{L^{\frac{q'}{p'}}(|\xi|\leqslant 1)}^{\frac{1}{p'}} \\
\leqslant &\left\|e^{-\frac{c}{2}|\xi|^2 t}|\xi|^{k+2\gamma}\right\|_{L^{q_0}(|\xi|\leqslant 1)} \left\||\xi|^{-2\gamma-1}\hat{u}_1(\xi)\right\|_{L^{q'}} \\
\lesssim &(1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}-\gamma}\left\|(-\Delta)^{\frac{-2\gamma-1}{2}}u_1\right\|_{L^q}.
\end{aligned} \tag{3.7.28}
$$

类似地, 对于 $\dfrac{1}{r_0}=\dfrac{1}{p'}-\dfrac{1}{r'}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{p}$, 注意到

$$
sr_0=s\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)>N,
$$

看出

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{|\xi|>1} \left(|\xi|^{k-1}|\hat{u}_1(\xi)|\right)^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} &\leqslant \left\||\xi|^{-s}\right\|_{L^{r_0}(|\xi|>1)} \left\||\xi|^{k+s-1}\hat{u}_1(\xi)\right\|_{L^{r'}} \\
&\lesssim \left\|(-\Delta)^{\frac{k+s-1}{2}}u_1\right\|_{L^r}.
\end{aligned} \tag{3.7.29}
$$

综合式 (3.7.27)–(3.7.29) 得

$$\|H(t)*u_1\|_{\dot{H}^k_p} \lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}-\gamma}\left(\|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot{H}_r^{k+s-1}}\right),$$

这就完成了式 (3.7.12) 的证明.

利用式 (3.7.11) 和 (3.7.12) 和类似的方法可得其他的估计. □

命题 3.7.2 设 $k\geqslant 0$, $p\in[2,\infty]$, $q\in[1,2]$, $r\in[1,2]$ 和 $s>N\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{p}\right)$ 或如果 $r=p=2$, $s\geqslant 0$, 那么对于任意的 $g\in L^q\cap \dot{H}_r^{k+s}$, 成立估计

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t H(t-\tau)*(I-\Delta)^{-1}\Delta g(\tau)d\tau\right\|_{\dot{H}^k_p}\\ \lesssim &\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k+1}{2}}\left(\|g(\cdot,\tau)\|_{L^q}+\|g(\cdot,\tau)\|_{\dot{H}_r^{k+s-1}}\right)d\tau,\end{aligned} \tag{3.7.30}$$

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t H_t(t-\tau)*(I-\Delta)^{-1}\Delta g(\tau)d\tau\right\|_{\dot{H}^k_p}\\ \lesssim &\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k+2}{2}}\left(\|g(\cdot,\tau)\|_{L^q}+\|g(\cdot,\tau)\|_{\dot{H}_r^{k+s}}\right)d\tau.\end{aligned} \tag{3.7.31}$$

证明 应用 Hausdorff-Young 不等式, 式 (3.7.25) 和 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\|H(t)*(I-\Delta)^{-1}\Delta g\|_{\dot{H}^k_p} &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||\xi|^k\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\hat{H}(\xi,t)\hat{g}(\xi)\right|^{p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\lesssim \left(\int_{|\xi|\leqslant 1}\left(e^{-\frac{c|\xi|^2}{2}t}|\xi|^{k+1}|\hat{g}(\xi)|\right)^{p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\quad + e^{-\frac{c}{2}t}\left(\int_{|\xi|>1}\left(|\xi|^{k-1}|\hat{g}(\xi)|\right)^{p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\lesssim \left\|e^{-\frac{c}{2}|\xi|^2 t}|\xi|^{k+1}\right\|_{L^{q_0}(|\xi|\leqslant 1)}\|\hat{g}(\xi)\|_{L^{q'}}\\ &\quad + e^{-\frac{c}{2}t}\left\||\xi|^{-s}\right\|_{L^{r_0}(|\xi|>1)}\left\||\xi|^{k+s-1}\hat{g}(\xi)\right\|_{L^{r'}}\\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k+1}{2}}\|g\|_{L^q}+e^{-\frac{c}{2}t}\left\|(-\Delta)^{\frac{k+s-1}{2}}g\right\|_{L^r}\\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{k+1}{2}}\left(\|g\|_{L^q}+\|g\|_{\dot{H}_r^{k+s-1}}\right).\end{aligned}$$

所以估计 (3.7.30) 成立. 类似地可证估计 (3.7.31). □

3.7.3 Cauchy 问题 (3.7.1), (3.7.2) 整体解的存在性与唯一性

根据 Duhamel 原理, Cauchy 问题 (3.7.1), (3.7.2) 可以重写为积分方程

$$u(x,t)=G(t)*u_0+H(t)*u_1+\int_0^t H(t-\tau)*(I-\Delta)^{-1}\Delta f(u(x,\tau))d\tau. \tag{3.7.32}$$

令积分方程 (3.7.32) 是 Cauchy 问题 (3.7.1), (3.7.2) 的广义解. 我们主要关心的是建立积分方程 (3.7.32) 的小振幅解的整体存在性和渐近性质.

为此, 引入两个引理. 第一引理是在文献 [200] 中的证明涉及分数阶导数估计的广义链和 Leibniz 法则 (也可以见文献 [196] 中的引理 3.1).

引理 3.7.3 设 $s \geqslant 0$, $\{s\}$ 是一极小整数, 它大于等于 s, $f \in C^{\{s\}}(\mathbb{R})$ 满足下列条件, 对于所有的 $u \in \mathbb{R}$,

$$|f^{(j)}(u)| \lesssim |u|^{\alpha-j}, \quad j=0,1,\cdots,\{s\}, \quad \{s\} \leqslant \alpha, \tag{3.7.33}$$

则成立

$$\|f(u)\|_{\dot{H}^s_r} \lesssim \|u\|^{\alpha-1}_{L^{(\alpha-1)r_1}} \|u\|_{\dot{H}^s_{r_2}}, \tag{3.7.34}$$

其中

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}, \quad r_1 \in (1,\infty], \quad r_2 \in (1,\infty)$$

和成立

$$\|uv\|_{\dot{H}^s_r} \lesssim \|u\|_{\dot{H}^s_{r_1}} \|v\|_{L^{q_2}} + \|u\|_{L^{q_1}} \|v\|_{\dot{H}^s_{r_2}}, \tag{3.7.35}$$

其中

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{r_2}, \quad r_i \in (1,\infty), \quad q_i \in (1,\infty], \quad i=1,2.$$

引理 3.7.4[214] 设 a 和 b 是正常数. 那么

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-a}(1+\tau)^{-b}\,d\tau \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-\min\{a,b\}}, & \max\{a,b\}>1, \\ (1+t)^{-\min\{a,b\}}\ln(2+t), & \max\{a,b\}=1, \\ (1+t)^{1-a-b}, & \max\{a,b\}<1. \end{cases} \tag{3.7.36}$$

定理 3.7.1 设 s, q, γ 是正常数, 使得 $\frac{N}{2}-1<s$, $q \in [1,2]$, $\gamma \geqslant \frac{1}{2}$, $f(u)$ 满足具有 $\alpha \geqslant \{s\}$ 的条件 (3.7.33). 又设对于 $N=1$, $1 \leqslant q < \frac{1+\sqrt{17}}{4}$,

$$\alpha \geqslant \frac{2}{q},$$

对于 $N=1$, $\frac{1+\sqrt{17}}{4} \leqslant q \leqslant 2$,

$$\alpha > \frac{1+2q}{1+q},$$

对于 $N=2$, $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{5}-1$,

$$\alpha \geqslant \frac{2}{q},$$

对于 $N=2$, $\sqrt{5}-1<q<2$,

$$\alpha \geqslant \frac{4+q}{2+q}, \tag{3.7.37}$$

对于 $N=2$, $q=2$,

$$\alpha > \frac{3}{2},$$

对于 $3 \leqslant N \leqslant 5$, $1 \leqslant q < \sqrt{N^2+1}-(n-1)$,

$$\alpha \geqslant \frac{2}{q},$$

对于 $3 \leqslant N \leqslant 5$, $\sqrt{N^2+1}-(N-1) < q \leqslant 2$,

$$\alpha \geqslant \frac{2N+q}{N+q},$$

对于 $N \geqslant 6$,

$$\alpha > \frac{N}{2}-1,$$

则存在一正常数 δ, 使得对于任意的 $u_0 \in \dot{H}^{s+1} \cap \dot{H}_q^{-2\gamma}$, $u_1 \in \dot{H}^s \cap \dot{H}_q^{-2\gamma-1}$ 满足

$$\|u_0\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma}} + \|u_0\|_{\dot{H}^{s+1}} + \|u_1\|_{\dot{H}_q^{-2\gamma-1}} + \|u_1\|_{\dot{H}^s} \leqslant \delta, \tag{3.7.38}$$

Cauchy 问题 (3.7.1), (3.7.2) 有唯一整体解 $(u,u_t)(x,t) \in C([0,\infty); H^{s+1} \times \dot{H}^s)$. 同时

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t<\infty} \Big[&(1+t)^{\frac{N}{2q}+\frac{1}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} + (1+t)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{H^{s+1}} \\ &+ (1+t)^{\frac{N}{2q}+\frac{1}{2}} \|u_t(\cdot,t)\|_{L^\infty} + (1+t)^{\theta} \|u_t(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \Big] \leqslant \rho,\end{aligned} \tag{3.7.39}$$

其中

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{N+q}{2q}\alpha - \dfrac{N}{2q}, & \alpha \leqslant \dfrac{N(4-q)+2q(s+1)}{2(N+q)}, \\ \dfrac{N(2-q)}{4q} + \dfrac{s+1}{2}, & \alpha > \dfrac{N(4-q)+2q(s+1)}{2(N+q)} \end{cases} \tag{3.7.40}$$

和小正数 ρ 仅依赖于 f 和 δ.

注 3.7.1 条件 $\alpha \geqslant \{s\}$ 来自非线性估计, 如 $\|f(u)\| \lesssim \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u\|_{H^s}$ 中要求 α 大于或等于 $\{s\}$. 如果 α 是一整数, 那么应用文献 [30] 中非线性估计这个条件是不必要的.

注 3.7.2 如果取 $q=2$, 定理 3.7.1 对于 $N=1$, $\alpha > \frac{5}{3}$, 对于 $N=2$, $\alpha > \frac{3}{2}$, 对于 $3 \leqslant N \leqslant 5$, $\alpha > 1+\frac{N}{N+2}$ 和对于 $N \geqslant 6$, $\alpha > \frac{N}{2}-1$ 是能应用的.

定理 3.7.1 的证明 应用压缩映射原理证明. 为此, 定义

$$X=\left\{u(x,t)\in L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R}^N)\cap L^\infty([0,\infty);H^{s+1})\,\middle|\,|||u|||\leqslant\frac{\rho}{2}\right\},\tag{3.7.41}$$

并赋予范数

$$|||u|||=\sup_{t\geqslant0}\left[(1+t)^{\frac{N}{2q}+\frac12}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}+(1+t)^{\frac N2(\frac1q-\frac12)+\frac12}\|u(\cdot,t)\|_{H^{s+1}}\right]\tag{3.7.42}$$

和对于 $u,v\in X$ 的距离

$$d(u,v)=\left\|(1+t)^{\frac N2(\frac1q-\frac12)+\frac12}(u-v)\right\|_{L^\infty([0,\infty);L^2)}.$$

易证 (X,d) 是一完备的距离空间. 事实上, 令 $\{u_i\}_{i=1}^\infty\subset X$ 是在 $L^\infty([0,\infty);L^2)$ 中收敛于 u 的序列, 则根据 $L^\infty([0,\infty);H^{s+1})$ 的弱 $*$ 的完备性, 存在一函数 $w\in L^\infty([0,\infty);H^{s+1})$, 使得存在一子序列 $\{u_{ik}\}_{i=1}^\infty$ 在广义意义下在 $L^\infty([0,\infty);H^{s+1})$ 中弱 $*$ 收敛于 w. 按照在 $L^\infty([0,\infty);L^2)$ 中 $\{u_{ik}\}_{i=1}^\infty$ 的强收敛, 推出 $w=u$. 因为 $s>\dfrac N2-1$, 根据 Sobolev 嵌入定理知 $u\in L^\infty([0,\infty);\mathbb{R}^N)$. 同时, 根据广义收敛性, 对于任意的 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 和几乎处处的 $t\in[0,\infty)$, 当 $k\to\infty$ 时,

$$(1+t)^{\frac{N}{2q}+\frac12}\int_{\mathbb{R}^N}u_{ik}(x,t)\phi dx\to(1+t)^{\frac{N}{2q}+\frac12}\int_{\mathbb{R}^N}u(x,t)\phi dx,$$

$$(1+t)^{\frac N2(\frac1q-\frac12)+\frac12}\int_{\mathbb{R}^N}u_{ik}(x,t)\phi dx\to(1+t)^{\frac N2(\frac1q-\frac12)+\frac12}\int_{\mathbb{R}^N}u(x,t)\phi dx.$$

这推出

$$\sup_{t\geqslant0}\left[(1+t)^{\frac{N}{2q}+\frac12}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}+(1+t)^{\frac N2(\frac1q-\frac12)+\frac12}\|u(\cdot,t)\|_{H^{s+1}}\right]\leqslant\frac{\rho}{2},$$

这就证明了距离空间 (X,d) 的完备性.

在 (X,d) 上定义一非线性映射

$$\mathcal{N}(u)=G(t)*u_0+H(t)*u_1+\int_0^tH(t-\tau)*(I-\Delta)^{-1}\Delta f(u(x,\tau))d\tau.\tag{3.7.43}$$

现在证明对于充分小的 ρ, $\mathcal{N}$ 是从 (X,d) 到 (X,d) 的严格压缩映射. 事实上, 注意到 $\alpha q\geqslant2$ 和条件 (3.7.38), 利用引理 3.7.3 和命题 3.7.1 中的式 (3.7.11) 和式 (3.7.12) 以及命题 3.7.2 中具有 $p=\infty$ 和 $k=0$ 的式 (3.7.30) 看出, 对于任意的 $u\in X$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}(u)\|_{L^\infty}\leqslant&\|G(t)*u_0\|_{L^\infty}+\|H(t)*u_1\|_{L^\infty}\\&+\left\|\int_0^tH(t-\tau)*(I-\Delta)^{-1}\Delta f(u(\cdot,\tau))d\tau\right\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2q}-\gamma}\left(\|u_0\|_{\dot H_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot H^{s+1}}+\|u_1\|_{\dot H_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot H^s}\right)\\
&\quad+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N}{2q}-\frac12}\left(\|f(u(\cdot,\tau))\|_{L^q}+\|f(u(\cdot,\tau))\|_{\dot H^s}\right)d\tau\\
&\lesssim \delta(1+t)^{-\frac{N}{2q}-\gamma}+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N}{2q}-\frac12}\\
&\quad\times\left(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-\frac{2}{q}}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2}^{\frac{2}{q}}+\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u(\cdot,\tau)\|_{\dot H^s}\right)d\tau\\
&\lesssim \delta(1+t)^{-\frac{N}{2q}-\gamma}+|||u|||^\alpha\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N}{2q}-\frac12}\\
&\quad\times\left[(1+\tau)^{-\left(\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{2q}\right)}+(1+\tau)^{-\left(\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{4}\right)}\right]d\tau.
\end{aligned}
$$

同理, 对于任意的 $u\in X$, 有

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(u)\|_{H^{s+1}}&\lesssim (1+t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac1q-\frac12\right)-\gamma}\left(\|u_0\|_{\dot H_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot H^{s+1}}+\|u_1\|_{\dot H_q^{-2\gamma-1}}+\|u_1\|_{\dot H^s}\right)\\
&\quad+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac1q-\frac12\right)-\frac12}\left(\|f(u(\cdot,\tau))\|_{L^q}+\|f(u(\cdot,\tau))\|_{\dot H^s}\right)d\tau\\
&\lesssim \delta(1+t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac1q-\frac12\right)-\gamma}+|||u|||^\alpha\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac1q-\frac12\right)-\frac12}\\
&\quad\times\left[(1+\tau)^{-\left(\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{2q}\right)}+(1+\tau)^{-\left(\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{4}\right)}\right]d\tau.
\end{aligned}
$$

因为

$$
\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{4}\geqslant\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{2q}\geqslant\frac{N}{2q}+\frac12>\frac{N}{2}\left(\frac1q-\frac12\right)+\frac12
$$

和对 $N\geqslant 3$,

$$
\frac{N}{2q}+\frac12>1,
$$

对于 $N=1,2$,

$$
\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{2q}>1,
$$

根据引理 3.7.4 对于充分小的 δ 和 ρ 有

$$
(1+t)^{\frac{N}{2q}+\frac12}\|\mathcal{N}(u)\|_{L^\infty}\lesssim\ \delta+\rho^\alpha<\frac{\rho}{4},\tag{3.7.44}
$$

$$
(1+t)^{\frac{N}{2}\left(\frac1q-\frac12\right)+\frac12}\|\mathcal{N}(u)\|_{H^{s+1}}\lesssim\ \delta+\rho^\alpha<\frac{\rho}{4}.\tag{3.7.45}
$$

综合式 (3.7.44) 和式 (3.7.45) 得

$$
|||\mathcal{N}(u)|||<\frac{\rho}{2}.\tag{3.7.46}
$$

所以 $\mathcal{N}$ 映 X 到 X.

现在证明映射 $\mathcal{N}$ 是严格压缩的. 对于任意的 $u, v \in X$, 由式 (3.7.43) 知

$$\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v) = \int_0^t H(t-\tau) * (I-\Delta)^{-1}\Delta\big[f(u(x,\tau)) - f(v(x,\tau))\big]d\tau. \tag{3.7.47}$$

注意到

$$|f(u) - f(v)| = \left|\int_0^1 f'(\tau u + (1-\tau)v)(u-v)d\tau\right| \lesssim \left(|u|^{\alpha-1} + |v|^{\alpha-1}\right)|u-v|,$$

由式 (3.7.11), (3.7.12) 和式 (3.7.30) 得

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)\|_{L^2} \\
\lesssim& \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \left(\|f(u(\cdot,\tau)) - f(v(\cdot,\tau))\|_{L^q}\right. \\
&\left.+\|f(u(\cdot,\tau)) - f(v(\cdot,\tau))\|_{L^2}\right) d\tau \\
\lesssim& \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \Big[(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1} + \|v(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1})\|u(\cdot,\tau) - v(\cdot,\tau)\|_{L^2} \\
&+ (\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty} + \|v(\cdot,\tau)\|_{L^\infty})^{\alpha-\frac{2}{q}}(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2} \\
&+ \|v(\cdot,\tau)\|_{L^2})^{\frac{2-q}{q}}\|u(\cdot,\tau) - v(\cdot,\tau)\|_{L^2}\Big]d\tau \\
\lesssim& \rho^{\alpha-1}d(u,v)\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \\
&\times \left[(1+\tau)^{-(\frac{N+q}{2q}\alpha - \frac{N}{2q})} + (1+\tau)^{-(\frac{N+q}{2q}\alpha - \frac{N}{4})}\right]d\tau.
\end{aligned}$$

类似于式 (3.7.45), 利用引理 3.7.4 有

$$(1+t)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}\|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)\|_{L^2} \lesssim \rho^{\alpha-1}d(u,v). \tag{3.7.48}$$

因此, 对于充分小的 ρ, $\mathcal{N}$ 是严格压缩映射. 根据压缩映射原理知, $\mathcal{N}$ 在 X 中有唯一不动点 $u(x,t)$, $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.7.1), (3.7.2) 的解, 且

$$u(x,t) = G(t) * u_0 + H(t) * u_1 + \int_0^t H(t-\tau) * (I-\Delta)^{-1}\Delta f(u(x,\tau))d\tau. \tag{3.7.49}$$

易证 Cauchy 问题 (3.7.1), (3.7.2) 解 $u(x,t)$ 的唯一性和解对时间的连续性.

同时, 式 (3.7.49) 对 t 求导得

$$u_t(x,t) = G_t(t) * u_0 + H_t(t) * u_1 + \int_0^t H_t(t-\tau) * (I-\Delta)^{-1}\Delta f(u(x,\tau))d\tau. \tag{3.7.50}$$

所以应用命题 3.7.1 中的式 (3.7.13) 和式 (3.7.14), 命题 3.7.2 中的式 (3.7.31), 并利用条件 (3.7.38) 和引理 3.7.3, 看出

$$\begin{aligned}
\|u_t(\cdot,t)\|_{L^\infty} \lesssim &(1+t)^{-\frac{N}{2q}-\frac{1}{2}-\gamma}\big(\|u_0\|_{\dot H_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot H^{s+1}}\big)\\
&+(1+t)^{-\frac{N}{2q}-\gamma}\big(\|u_1\|_{\dot H_q^{-2\gamma}}+\|u_1\|_{\dot H^{s}}\big)\\
&+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N}{2q}-1}\big(\|f(u(\cdot,\tau))\|_{L^q}+\|f(u(\cdot,\tau))\|_{\dot H^s}\big)d\tau\\
\lesssim &\,\delta(1+t)^{-\frac{N}{2q}-\gamma}+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N}{2q}-1}\\
&\times\Big(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-\frac{2}{q}}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2}^{\frac{2}{q}}+\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u(\cdot,\tau)\|_{\dot H^s}\Big)d\tau\\
\lesssim &\,\delta(1+t)^{-\frac{N}{2q}-\gamma}+|||u|||^\alpha\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N}{2q}-1}\\
&\times\Big[(1+\tau)^{-(\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{2q})}+(1+\tau)^{-(\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{4})}\Big]d\tau.
\end{aligned}$$

利用引理 3.7.4 对于充分小的 δ 和 ρ 有

$$(1+t)^{\frac{N}{2q}+\frac{1}{2}}\|u_t(\cdot,t)\|_{L^\infty}\lesssim\ \delta+\rho^\alpha<\frac{\rho}{4}. \tag{3.7.51}$$

另一方面, 应用条件 (3.7.38) 和引理 3.7.3 得

$$\begin{aligned}
\|u_t(\cdot,t)\|_{\dot H^s} \lesssim &(1+t)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\frac{s+1}{2}-\gamma}\big(\|u_0\|_{\dot H_q^{-2\gamma}}+\|u_0\|_{\dot H^{s+1}}\big)\\
&+(1+t)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\frac{s}{2}-\gamma}\big(\|u_1\|_{\dot H_q^{-2\gamma}}+\|u_1\|_{\dot H^{s}}\big)\\
&+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\frac{s+2}{2}}\big(\|f(u(\cdot,\tau))\|_{L^q}+\|f(u(\cdot,\tau))\|_{\dot H^s}\big)d\tau\\
\lesssim &\,\delta(1+t)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\frac{s}{2}-\gamma}+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\frac{s+2}{2}}\\
&\times\Big(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-\frac{2}{q}}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2}^{\frac{2}{q}}+\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u(\cdot,\tau)\|_{\dot H^s}\Big)d\tau\\
\lesssim &\,\delta(1+t)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\frac{s}{2}-\gamma}+|||u|||^\alpha\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{N(2-q)}{4q}-\frac{s+2}{2}}\\
&\times\Big[(1+\tau)^{-(\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{2q})}+(1+\tau)^{-(\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{4})}\Big]d\tau.
\end{aligned}$$

因为对于 $\alpha\leqslant\dfrac{N(4-q)+2q(s+1)}{2(N+q)}$,

$$1<\frac{N+q}{2q}\alpha-\frac{N}{2q}\leqslant\frac{N(2-q)}{4q}+\frac{s+1}{2},$$

对于 $\alpha > \dfrac{N(4-q)+2q(s+1)}{2(N+q)}$,

$$1 < \frac{N(2-q)}{4q} + \frac{s+1}{2} < \frac{N+q}{2q}\alpha - \frac{N}{2q},$$

根据引理 3.7.4 对于充分小的 δ 和 ρ 有

$$(1+t)^{\theta}\|u_t(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s} \lesssim \delta + \rho^{\alpha} < \frac{\rho}{4}. \tag{3.7.52}$$

□

3.7.4 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [215]. 与本节有关的文献见 [26], [30], [62]–[65], [190], [195], [196], [198]–[200], [202], [206], [208], [209], [211], [213], [216], [217].

3.8 广义 Benney-Luke 方程的 Cauchy 问题

3.8.1 引言

本节研究下列广义 Benney-Luke 方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - m\Delta u + \alpha(2\nabla u \cdot \nabla u_t + u_t \Delta u) + \beta\nabla(|\nabla u|^p \nabla u) = 0, \tag{3.8.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{3.8.2}$$

其中 $u(x,t)$ 表示变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ $(N = 1,2,3,4)$ 和 $t \in \mathbb{R}_+$ 的未知函数, $m > 0$, β 和 α 是常数, 而 $p > 0$ 满足: 如果 $N = 1, 2$,

$$0 < p < \infty;$$

如果 $N = 3, 4$,

$$0 < p \leqslant \frac{2}{N-2}. \tag{3.8.3}$$

$p = 2$ 的方程 (3.8.1) 是描写具有小振幅的色散和弱非线性长水波的模型. 自从 Russell 发现了 “大波”, 就出现了不同想法证明它的存在性和寻找它的合适模型. Boussinesq 在 [218], [219], [68] 中引进了非线性与色散之间平衡的基本思想, 并对弱非线性长波情况得到了色散的第一个近似表达式. 此期间在弱非线性与弱色散平衡的假定下得到不同的 Boussinesq 方程.

Christov 在文献 [221] 中得到色散浅水波方程的更一般形式 (保证了 Galilean 不变性), 它们是对所有小色散参数进行渐近修正. 更确切地说, 从文献 [221] 中的

方程 (2.12) 和 (2.13) 中消去变量 χ 得到下列方程 (3.8.1) 的变形 (即文献 [221] 中的方程 (2.21))

$$v_{tt}-\frac{\gamma}{2}\Delta v_{tt}+\frac{\gamma}{6}\Delta^2 v-\Delta v+\gamma(2\nabla v\cdot\nabla v_t+v_t\Delta v)+\frac{\gamma^2}{2}\nabla(|\nabla v|^2\nabla v)=0, \quad (3.8.4)$$

其中 γ 是小色散参数和 v 是在地层基础上的位势的未知量. 如果去掉方程 (3.8.4) 的最后一项, 它就变成各向同性的 Benney-Luke 方程的形式

$$v_{tt}-\Delta v+\mu(a\Delta^2 v-b\Delta v_{tt})+\varepsilon(2\nabla v\cdot\nabla v_t+v_t\Delta v)=0. \quad (3.8.5)$$

在文献 [222] 中产生了没考虑表面和小振幅参数的水波模型以及考虑了长波参数 $\varepsilon=\mu$. Pego 和 Quintero 在文献 [223] 中得到了包含表面张力效应的模型 (3.8.5). 特别地, 对于 $a-b=\sigma-\dfrac{1}{3}$, 产生了 Benney-Luke 模型方程族, 其中 ε 表示小振幅参数或非线性系数, μ 代表长波参数或色散系数, σ 代表 Bond 数, 它与表面张力有关系.

根据尺度变换 $v(x,t)=u\left(\sqrt{\dfrac{2}{\gamma}}x,\sqrt{\dfrac{2}{3\gamma}}t\right)$, 方程 (3.8.4) 可以写为如下形式

$$u_{tt}-\Delta u_{tt}+\Delta^2 u-3\Delta u+\sqrt{6\gamma}\,(2\nabla u\cdot\nabla u_t+u_t\Delta u)+3\gamma\nabla\left(|\nabla u|^2\nabla u\right)=0.$$

它是方程 (3.8.1) 的特殊情形. 在本节 φ 的 Fourier 变换和 Fourier 逆变换分别表示如下

$$\mathscr{F}(\varphi)(\xi)=\hat{\varphi}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^N}e^{-ix\xi}\varphi(x)dx,$$

$$\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}e^{ix\xi}\varphi(\xi)d\xi.$$

3.8.2 子节应用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 存在唯一局部解. 3.8.3 子节研究 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 整体解的存在性与不存在性.

3.8.2 局部解的存在性与唯一性

本子节用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 存在唯一局部解. 首先给出解的定义.

定义 3.8.1 对于 $\varphi\in H^2$, $\psi\in H^1$, 如果 $u\in C([0,T];H^2)\cap C^1([0,T];H^1)\cap C([0,T];L^2)$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$ 且方程 (3.8.1) 在广义意义下成立, u 称为 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 在 $[0,T)$ 上的解.

如果 u 是 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 的解, 应用 Fourier 变换和 Duhamel 原理, 对于所有的 $t\in[0,T)$, u 满足方程

$$u(x,t)=\partial_t S(t)\varphi+S(t)\psi+\int_0^t S(t-\tau)(I-\Delta)^{-1}f(u)(x,\tau)d\tau, \quad (3.8.6)$$

其中算子定义如下

$$S(t)\psi(x) = \mathscr{F}^{-1}\left(\hat{\psi}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|\sqrt{m+|\xi|^2}}\sin\frac{t|\xi|\sqrt{m+|\xi|^2}}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right),$$

$$\partial_t S(t)\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial t}S(t)\varphi(x) = \mathscr{F}^{-1}\left(\hat{\varphi}\cos\frac{t|\xi|\sqrt{m+|\xi|^2}}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)$$

和

$$f(u) = -\alpha\left(2\nabla u\cdot\nabla u_t + u_t\Delta u\right) - \beta\nabla(|\nabla u|^p\nabla u).$$

反之, 令 $u\in C([0,T];H^2)\cap C^1([0,T];H^1)$ 是方程 (3.8.6) 的解. 显然, $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$. 方程 (3.8.6) 对 t 求导两次, 得

$$u_{tt} = (I-\Delta)^{-1}(m\Delta u - \Delta^2 u) + (I-\Delta)^{-1}f(u), \tag{3.8.7}$$

以及至少在 L^2 中作为一广义方程有

$$(I-\Delta)u_{tt} = m\Delta u - \Delta^2 u + f(u).$$

进一步考察方程 (3.8.7) 显示 $u_{tt}\in C([0,T];L^2)$. 所以 u 是 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 的解. 其次, 仅需要证明方程 (3.8.6) 在 $C([0,T];H^2)\cap C^1([0,T];H^1)$ 中存在唯一局部解.

首先给出下面要应用的某些半群型估计和 Sobolev 乘法定律.

引理 3.8.1　对于所有 $s\in\mathbb{R}$, 有

$$\|S(t)\psi\|_{H^s} \leqslant C(1+t)\|\psi\|_{H^{s-1}},\quad \forall\psi\in H^{s-1}, \tag{3.8.8}$$

$$\|\partial_t S(t)\varphi\|_{H^s} \leqslant \|\varphi\|_{H^s},\quad \forall\varphi\in H^s, \tag{3.8.9}$$

$$\|\partial_t^2 S(t)\varphi\|_{H^s} \leqslant C\|\varphi\|_{H^{s+1}},\quad \forall\varphi\in H^{s+1}. \tag{3.8.10}$$

证明　对于所有 $\psi\in H^s$, 有

$$\begin{aligned}\|S(t)\psi\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2(m+|\xi|^2)}\left(\sin\frac{t|\xi|\sqrt{m+|\xi|^2}}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)^2|\hat{\psi}(\xi)|^2d\xi\\ &= \int_{|\xi|\leqslant 1}(1+|\xi|^2)^s\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2(m+|\xi|^2)}\left(\sin\frac{t|\xi|\sqrt{m+|\xi|^2}}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)^2|\hat{\psi}(\xi)|^2d\xi\\ &\quad+\int_{|\xi|>1}(1+|\xi|^2)^s\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2(m+|\xi|^2)}\left(\sin\frac{t|\xi|\sqrt{m+|\xi|^2}}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)^2|\hat{\psi}(\xi)|^2d\xi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2t^2 \int_{|\xi|\leqslant 1} (1+|\xi|^2)^{s-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{|\xi|>1} (1+|\xi|^2)^s \left(1+\frac{1}{|\xi|^2}\right) \frac{1}{m+|\xi|^2}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leqslant 2t^2 \int_{|\xi|\leqslant 1} (1+|\xi|^2)^{s-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \frac{2}{\min(1,m)} \int_{|\xi|>1} (1+|\xi|^2)^{s-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leqslant C(1+t^2)\|\psi\|_{H^{s-1}}^2.
\end{aligned}
$$

所以式 (3.8.8) 对所有 $s \in \mathbb{R}$ 成立.

对于 $\varphi \in H^s$, 式 (3.8.9) 是显然成立的. 注意到

$$
\partial_t^2 S(t)\varphi(x) = -\mathscr{F}^{-1}\left(\hat{\varphi}\frac{|\xi|\sqrt{m+|\xi|^2}}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\sin\frac{t|\xi|\sqrt{m+|\xi|^2}}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right),
$$

有

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t^2 S(t)\varphi\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s \frac{|\xi|^2(m+|\xi|^2)}{1+|\xi|^2}\left(\sin\frac{t|\xi|\sqrt{m+|\xi|^2}}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{s+1}|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = C\|\varphi\|_{H^{s+1}}^2,
\end{aligned}
$$

即不等式 (3.8.10) 成立. □

引理 3.8.2 (Sobolev 乘法律[224]) 设 $N \geqslant 1$ 和 s_1, s_2, s 满足

$$
s_1+s_2 \geqslant 0, \quad s \leqslant s_1, s_2, \quad s < s_1+s_2-\frac{N}{2}
$$

或

$$
s_1+s_2 > 0, \quad s < s_1, s_2, \quad s \leqslant s_1+s_2-\frac{N}{2},
$$

则

$$
\|uv\|_{H^s} \leqslant C\|u\|_{H^{s_1}}\|v\|_{H^{s_2}}.
$$

现在, 应用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 存在唯一局部解. 为此, 定义函数空间 $X(T) = C([0,T];H^2) \cap C^1([0,T];H^1)$, 并赋予范数

$$
\|u\|_{X(T)} = \max_{t\in[0,T]} \left[\|u(\cdot,t)\|_{H^2} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^1}\right], \quad \forall u \in X(T).
$$

易知 $X(T)$ 是一 Banach 空间. 令 $B_R(T)$ 是 $X(T)$ 中以原点为心, R 为半径的闭球, 即

$$
B_R(T) = \left\{u \in X(T) \middle| \|u\|_{X(T)} \leqslant R\right\}.
$$

定理 3.8.1 设 $\varphi \in H^2$, $\psi \in H^1$ 和 p 满足条件 (3.8.3), 则存在一仅依赖于 $\|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_{H^1}$ 的最大时间 T_0 和方程 (3.8.6) 有唯一解

$$u \in C([0,T];H^2) \cap C^1([0,T];H^1), \quad \forall T \in (0,T_0).$$

同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)} (\|u(\cdot,t)\|_{H^2} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^1}) < \infty, \tag{3.8.11}$$

则 $T_0 = \infty$.

证明 对于 $\varphi \in H^2$, $\psi \in H^1$, $u \in X(T)$, 定义映射

$$\Phi(u) = \partial_t S(t)\varphi + S(t)\psi + \int_0^t S(t-\tau)(I-\Delta)^{-1} f(u)(x,\tau)d\tau. \tag{3.8.12}$$

将指出对于给定的 R 和 T 对应的 $u(t) \mapsto \Phi(u(t))$ 映 $B_R(T)$ 到 $B_R(T)$, 且为严格压缩的. 令 $\delta > 0$, 使得

$$\delta \geqslant \|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_{H^1}.$$

为了证明 Φ 映 $X(T)$ 到自身, 应用引理 3.8.1, 引理 3.8.2 和 Sobolev 嵌入定理可得不等式链

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u(\cdot,t))\|_{H^2} &\leqslant \|\varphi\|_{H^2} + C(1+t)\|\psi\|_{H^1} + C\int_0^t (1+t-\tau)\|f(u(\cdot,\tau))\|_{H^{-1}}d\tau \\
&\leqslant \|\varphi\|_{H^2} + C(1+t)\|\psi\|_{H^1} + C|\beta|\int_0^t (1+t-\tau)\||\nabla u(\cdot,\tau)|^{p+1}\|_{L^2}d\tau \\
&\quad + C|\alpha|\int_0^t (1+t-\tau)\,(2\|\nabla u(\cdot,\tau)\cdot\nabla u_t(\cdot,\tau)\|_{H^{-1}} \\
&\quad + \|u_t(\cdot,\tau)\Delta u(\cdot,\tau)\|_{H^{-1}})\,d\tau \\
&\leqslant \|\varphi\|_{H^2} + C(1+t)\|\psi\|_{H^1} + C|\beta|\int_0^t (1+t-\tau)\|\nabla u(\cdot,\tau)\|_{L^{2(p+1)}}^{p+1}d\tau \\
&\quad + 3C|\alpha|\int_0^t (1+t-\tau)\|u(\cdot,\tau)\|_{H^2}\|u_t(\cdot,\tau)\|_{H^1}d\tau \\
&\leqslant \|\varphi\|_{H^2} + C(1+t)\|\psi\|_{H^1} + C|\beta|\int_0^t (1+t-\tau)\|u(\cdot,\tau)\|_{H^2}^{p+1}d\tau \\
&\quad + 3C|\alpha|\int_0^t (1+t-\tau)\|u(\cdot,\tau)\|_{H^2}\|u_t(\cdot,\tau)\|_{H^1}d\tau.
\end{aligned} \tag{3.8.13}$$

注意到

$$\Phi(u(t))_t = \partial_t^2 S(t)\varphi + \partial_t S(t)\psi + \int_0^t \partial_t S(t-\tau)(I-\Delta)^{-1} f(u)(\cdot,\tau)d\tau.$$

类似于式 (3.8.13) 可知

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(u(t))_t\|_{H^1} \\
&\leqslant C\|\varphi\|_{H^2}+\|\psi\|_{H^1}+|\alpha|\int_0^t\|2\nabla u(\cdot,\tau)\cdot\nabla u_t(\cdot,\tau)+u_t(\cdot,\tau)\Delta u(\cdot,\tau)\|_{H^{-1}}d\tau \\
&\quad+C|\beta|\int_0^t\|\nabla u(\cdot,\tau)\|_{L^{2(p+1)}}^{p+1}d\tau \\
&\leqslant C\|\varphi\|_{H^2}+\|\psi\|_{H^1} \\
&\quad+\int_0^t\left[3|\alpha|\|u(\cdot,\tau)\|_{H^2}\|u_t(\cdot,\tau)\|_{H^1}+C|\beta|\|u(\cdot,\tau)\|_{H^2}^{p+1}\right]d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.8.14}
$$

由式 (3.8.13) 和式 (3.8.14) 知, 如果 $u\in B_R(T)$, 可以看出 Φ 映 $X(T)$ 到自身和

$$
\|\Phi(u)\|_{X(T)}\leqslant(C+1)\delta+(C+1)\left(\delta+3|\alpha|R^2+2|\beta|R^{p+1}\right)(1+T)T.
$$

取 $R=2(C+1)\delta$, 由表达式

$$
(C+1)\delta\left[1+\left(1+12|\alpha|(C+1)^2\delta+2^{p+2}|\beta|(C+1)^{p+1}\delta^p\right)(1+T)T\right]
$$

知, 上式最后一项是有界的.

现在固定 T 使得

$$
\left(1+12|\alpha|(C+1)^2\delta+2^{p+2}|\beta|(C+1)^{p+1}\delta^p\right)(1+T)T<1,
\tag{3.8.15}
$$

于是

$$
\|\Phi(u)\|_{X(T)}\leqslant 2(C+1)\delta,
$$

所以 Φ 映 $B_R(T)$ 到自身.

下面证明 $\Phi(u(t)):B_R(T)\mapsto B_R(T)$ 是严格压缩的. 令 $u,v\in X(T)$ 并具有初值 φ 和 ψ, 根据 $\Phi(u)$ 的定义, 得

$$
\Phi(u)-\Phi(v)=\int_0^t S(t-\tau)(I-\Delta)^{-1}[f(u(x,\tau))-f(v(x,\tau))]d\tau.
$$

因为

$$
\begin{aligned}
f(v)-f(u)=&\,2\alpha\left[\nabla(u-v)\cdot\nabla u_t+\nabla v\cdot\nabla(u-v)_t\right] \\
&+\alpha\left[(u-v)_t\Delta u+v_t\Delta(u-v)\right] \\
&+\beta\nabla(|\nabla u|^p\nabla u-|\nabla v|^p\nabla v),
\end{aligned}
$$

应用类似于证明式 (3.8.13) 的方法得

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{H^2} \\
\leqslant & C|\alpha| \int_0^t (1+t-\tau)\left(2\|u_t(\cdot,\tau)\|_{H^1}+\|v_t(\cdot,\tau)\|_{H^1}\right)\|u(\cdot,\tau)-v(\cdot,\tau)\|_{H^2} d\tau \\
& + C|\alpha| \int_0^t (1+t-\tau)\left(2\|v(\cdot,\tau)\|_{H^2}+\|u(\cdot,\tau)\|_{H^2}\right)\|u_t(\cdot,\tau)-v_t(\cdot,\tau)\|_{H^1} d\tau \\
& + C|\beta|(p+1) \int_0^t (1+t-\tau)\left\|\left(|\nabla u|^p+|\nabla v|^p\right)|\nabla(u-v)|\right\|_{L^2} d\tau \\
\leqslant & 6C|\alpha|(C+1)\delta(1+T)T\|u-v)\|_{X(T)} \\
& + C|\beta|(p+1) \int_0^t (1+t-\tau)\left(\|\nabla u\|^p_{L^{2(p+1)}}+\|\nabla v\|^p_{L^{2(p+1)}}\right)\|\nabla(u-v)\|_{L^{2(p+1)}} d\tau \\
\leqslant & C\left[6|\alpha|(C+1)\delta+2^{p+1}|\beta|(p+1)(C+1)^p\delta^p\right](1+T)T\|u-v\|_{X(T)}
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(u(t))_t-\Phi(v(t))_t\|_{H^1} \\
\leqslant & C\left[6|\alpha|(C+1)\delta+2^{p+1}|\beta|(p+1)(C+1)^p\delta^p\right]T\|u-v\|_{X(T)}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{X(T)} \\
\leqslant & C\left[12|\alpha|(C+1)\delta+2^{p+2}|\beta|(p+1)(C+1)^p\delta^p\right](1+T)T\|u-v\|_{X(T)}.
\end{aligned}
$$

取 T 充分小, 使得式 (3.8.15) 和下式成立

$$
C\left[12|\alpha|(C+1)\delta+2^{p+2}|\beta|(p+1)(C+1)^p\delta^p\right](1+T)T \leqslant \frac{1}{2}, \tag{3.8.16}
$$

所以 Φ 映 $B_R(T)$ 到 $B_R(T)$ 是严格压缩的. 根据压缩映射原理知方程 (3.8.6) 有唯一解 $u \in B_R(T)$.

由于上面的解 u 应用压缩映射原理得到, u 至少在球 $B_R(T)$ 内, 这自然隐含了解 u 至少在球 $B_R(T)$ 内的唯一性. 值得注意的是解的唯一性可以建立于更大范围内, 而不是局部的. 所以可以断言, 对于任意 T 的值积分方程 (3.8.6) 在 $X(T)$ 中至多有一解. 事实上, 注意到对于小值的 t 根据压缩映射原理解的唯一性情况, u 是唯一的. 令 u_1 和 u_2 是两个解, 并假定它们在 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 上相等, 但在区间 $[0, t_0+\varepsilon]$ 不一致, 其中 $\varepsilon > 0$ 充分小. 方程 (3.8.6) 改写如下

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \partial_t S(t-t_0)\left[\partial_t S(t_0)\varphi + S(t_0)\psi + \int_0^{t_0} S(t_0-\tau)(I-\Delta)^{-1} f(u)(x,\tau) d\tau\right] \\
& + S(t-t_0)\left[\partial_t^2 S(t_0)\varphi + \partial_t S(t_0)\psi + \int_0^{t_0} \partial_t S(t_0-\tau)(I-\Delta)^{-1} f(u)(x,\tau) d\tau\right] \\
& + \int_{t_0}^t S(t-\tau)(I-\Delta)^{-1} f(u)(x,\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_t S(t-t_0)u(x,t_0) + S(t-t_0)u_t(x,t_0) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} S(t-\tau)(I-\Delta)^{-1} f(u)(x,\tau)d\tau = \tilde{\Phi}(u).
\end{aligned}
$$

假定包含积分方程 $u = \tilde{\Phi}(u)$ 在任意时间区间 $[t_0, t_0+\varepsilon]$ 上有两个不同的解, 其中 $\varepsilon > 0$ 充分小. 但是取 R 足够大和 ε 充分小, 可保证映射 $u \mapsto \tilde{\Phi}(u)$ 在 $C([t_0, t_0+\varepsilon]; H^2) \cap C^1([t_0, t_0+\varepsilon]; H^1)$ 中映以原点为心, R 为半径的球 $B_R(T)$ 到自身的映射, 且是严格压缩的. 事实上, 其方法与前面应用一样. 但是取 R 更大一些, 限制在时间区间 $[t_0, t_0+\varepsilon]$ 上的两个解 u_1 和 u_2 将位于 B_R 内, 这就出现了矛盾.

已建立方程 (3.8.6) 对应任意的 $\varphi \in H^2$, $\psi \in H^1$ 至少在某时间区间 $[0, T_1]$ 上有解. 现在关心的是解存在区间的延拓问题. 由 $u(\cdot, T_1)$ 和 $u_t(\cdot, T_1)$ 作为初值出发再应用压缩映射原理, 这将给出方程 (3.8.6) 在时间区间 $[0, T_2]$ 上的一个解, 其中 $T_2 > T_1$. 继续这个方法, 归纳为时间的上升序列 $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得方程 (3.8.6) 对于所有的 $k = 1, 2, \cdots$ 在时间区间 $[0, T_k]$ 上存在解. 同时, 在每一瞬时区间 $[T_k, T_{k+1}]$, $k = 1, 2, \cdots$, 上, 解 u 根据压缩映射原理作为方程 (3.8.6) 的不动点给出. 现在将产生两种可能性. 或者 $T_0 = \lim_{k\to\infty} T_k$ 是有限的, 或者它是 ∞. 如果 $T_0 = \infty$, 则方程 (3.8.6) 的解关于时间是整体的, 反之, 当 $T_0 < \infty$ 时,

$$
\limsup_{t \to T_0^-} [\|u(\cdot,t)\|_{H^2} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^1}] = \infty. \tag{3.8.17}
$$

否则, 如果 M 是在 $[0, T_0)$ 上的 $\|u(\cdot,t)\|_{H^2} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^1}$ 的上界, 于是当 $t_0 \in [0, T_0)$ 时, 应用初值 $u(\cdot, t_0)$ 和 $u_t(\cdot, t_0)$, 按照上面压缩映射原理, 得到局部解的存在性.

由式 (3.8.15) 和式 (3.8.16) 知, 总可以取依赖于 M, 不依赖于 t_0 的 $T^* \in (0, T_0)$, 使得积分方程 (3.8.6) 有唯一解属于 $X(T^*)$. 重复有限次压缩映射原理, 解将定义在区间 $[0, T_0+\varepsilon]$ 上, 其中 $\varepsilon > 0$. 压缩映射原理迫使式 (3.8.17) 成立. □

由定理 3.8.1 可得如下定理.

定理 3.8.2 设 $\varphi \in H^2$, $\psi \in H^1$ 和 p 满足 (3.8.3), 那么存在仅依赖于 $\|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_{H^1}$ 的最大时间 T_0, Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 有唯一解

$$
u \in C([0, T_0); H^2) \cap C^1([0, T_0); H^1) \cap C^2([0, T_0); L^2).
$$

同时, 如果式 (3.8.11) 成立, 则 $T_0 = \infty$.

3.8.3 整体解的存在性与不存在性

下面对于 $\beta \leqslant 0$ 和 $\beta > 0$ 两种情况, 考虑 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 整体解的存在性与唯一性.

引理 3.8.3　设 $\varphi \in H^2$, $\psi \in H^1$, $u(x,t) \in C([0,T_0);H^2) \cap C^1([0,T_0);H^1) \cap C^2([0,T_0);L^2)$ 是 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 的解, 那么对于所有的 $t \in [0,T_0)$ 有能量等式

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\|u_t(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla u_t(\cdot,t)\|^2 + \|\Delta u(\cdot,t)\|^2 + m\|\nabla u(\cdot,t)\|^2\right] - \frac{\beta}{p+2}\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^{p+2}}^{p+2} = E(0). \tag{3.8.18}$$

证明　应用正则化证明式 (3.8.18)(见文献 [225]). 令 $\phi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 使得 $\phi_1 \geqslant 0$ 且 $\int_{\mathbb{R}^N}\phi_1(x)dx = 1$. 令 $\phi_j(x) = j^N\phi_1(jx)$ 是一单位的近似. 取方程 (3.8.1) 与 ϕ_j 作卷积, 得

$$\phi_j * u_{tt} - \phi_j * \Delta u_{tt} + \phi_j * \Delta^2 u - m\phi_j * \Delta u + \alpha\phi_j * f_1(u) + \beta\phi_j * f_2(u) = 0, \tag{3.8.19}$$

其中

$$f_1(u) = 2\nabla u \cdot \nabla u_t + u_t\Delta u, \quad f_2(u) = \nabla(|\nabla u|^p\nabla u).$$

注意到 u_{tt} 和 Δu 在 $C([0,T_0);L^2(\mathbb{R}^N)$ 中和 $\Delta^2 u$ 与 Δu_{tt} 在 $C([0,T_0);H^{-2})$ 中. 所以对于每一个 $s \geqslant 0$, $\phi_j * u_{tt}$ 和 $\phi_j * \Delta u$ 在 $C([0,T_0);H^s) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N))$ 中与 $\phi_j * \Delta^2 u$ 和 $\phi_j * \Delta u_{tt}$ 在 $C([0,T_0);C^\infty(\mathbb{R}^N))$ 中. 同时, $\phi_j * \Delta^2 u = (\Delta\phi_j) * \Delta u$ 和 $\phi_j * \Delta u_{tt} = (\Delta\phi_j) * u_{tt}$. 因此, $\phi_j * \Delta^2 u$ 和 $\phi_j * \Delta u_{tt}$ 属于 $C([0,T_0);L^2)$.

于是方程 (3.8.19) 与下列方程等价

$$(\phi_j * u)_{tt} - \Delta(\phi_j * u)_{tt} + \Delta^2(\phi_j * u) - m\Delta(\phi_j * u) + \alpha\phi_j * f_1(u) + \beta\phi_j * f_2(u) = 0. \tag{3.8.20}$$

因为

$$f_1(u) \in C([0,T_0);L^1), \quad |\nabla u|^{p+1} \in C([0,T_0);L^1), \quad \phi_j * f_1(u) \in C([0,T_0);H^s),$$

且对于每一个 $s \geqslant 0$, $\phi_j * f_2(u) = (\nabla\phi_j) * (|\nabla u|^p\nabla u) \in C([0,T_0);H^s)$. 方程 (3.8.20) 乘以 $(\phi_j * u)_t (\in C([0,T_0);H^s)$, 对于每一个 $s \geqslant 0)$ 和在 $\mathbb{R}^N$ 上积分, 并分部积分, 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|\phi_j * u_t\|^2 + \|\phi_j * \nabla u_t\|^2 + \|\phi_j * \Delta u\|^2 + m\|\phi_j * \nabla u\|^2] + \alpha\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j * u_t)[\phi_j * f_1(u)]dx + \beta\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j * u_t)[\phi_j * f_2(u)]dx = 0. \tag{3.8.21}$$

令

$$E_0(u) = \frac{1}{2}\left[\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2\right].$$

对方程 (3.8.21) 从 0 到 t 积分, 得

$$E_0(\phi_j*u)-E_0(\phi_j*u(x,0))+\alpha\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j*u_s)[\phi_j*f_1(u)]dxds$$
$$+\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j*u_s)[\phi_j*f_2(u)]dxds=0. \tag{3.8.22}$$

显然, 对于每一个 $t\in(0,T_0)$, 当 $t\to\infty$ 时, $E_0(\phi_j*u)\to E_0(u)$. 现在回到非线性项. 当 $\phi_j*u\in C([0,T_0);C^\infty(\mathbb{R}^N))$ 时, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N}[\phi_j*u_t]f_1(\phi_j*u)dx=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla((\phi_j*u_t)^2\cdot\nabla(\phi_j*u))dx=0.$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j*u_t)[\phi_j*f_1(u)]dx=\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j*u_t)[\phi_j*f_1(u)-f_1(\phi_j*u)]dx.$$

由 Sobolev 嵌入定理和 Hölder 不等式知, $u_s,\nabla u\in C([0,T_0);L^4)$ 和 $f_1(u)\in C([0,T_0),L^{4/3})$. 因此, Hölder 不等式给出

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j*u_s)[\phi_j*f_1(u)]dx\right|\\
\leqslant&\|\phi_j*u_s\|_{L^4}\|\phi_j*f_1(u)-f_1(\phi_j*u)\|_{L^{4/3}}\\
\leqslant&\|\phi_j*u_s\|_{L^4}\left[\|\phi_j*f_1(u)-f_1(u)\|_{L^{4/3}}+\|f_1(u)-f_1(\phi_j*u)\|_{L^{4/3}}\right]\\
\leqslant&\|\phi_j*u_s\|_{L^4}\left[\|\phi_j*f_1(u)-f_1(u)\|_{L^{4/3}}+\|(u_s-\phi_j*u_s)\Delta u\|_{L^{4/3}}\right.\\
&+\|(\phi_j*u_s)(\Delta u-\phi_j*\Delta u)\|_{L^{4/3}}+2\|\nabla u(\nabla u_s-\phi_j*\nabla u_s)\|_{L^{4/3}}\\
&\left.+2\|(\phi_j*\nabla u_s)(\nabla u-\phi_j*\nabla u)\|_{L^{4/3}}\right]\\
\leqslant&\|\phi_j*u_s\|_{L^4}\left[\|\phi_j*f_1(u)-f_1(u)\|_{L^{4/3}}+\|\Delta u\|\|u_s-\phi_j*u_s\|_{L^4}\right.\\
&+\|\phi_j*u_s\|_{L^4}\|\Delta u-\phi_j*\Delta u\|+2\|\nabla u\|_{L^4}\|\nabla u_s-\phi_j*\nabla u_s\|\\
&\left.+2\|\phi_j*\nabla u_s\|\|\nabla u-\phi_j*\nabla u\|_{L^4}\right].
\end{aligned}$$

由上式得

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j*u_s)[\phi_j*f_1(u)]dx=0.$$

应用类似方法有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j*u_s)[\phi_j*f_2(u)-f_2(\phi_j*u)]dx=0.$$

可是

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j*u_s)f_2(\phi_j*u)dx=-\frac{1}{p+2}\|\nabla(\phi_j*u)\|_{L^{p+2}}^{p+2}+\frac{1}{p+2}\|\nabla(\phi_j*\varphi)\|_{L^{p+2}}^{p+2}.$$

因此, 对于所有的 $t \in [0, T_0)$,

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_j * u_s)[\phi_j * f_2(u)]dxds = -\frac{1}{p+2}\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2} + \frac{1}{p+2}\|\nabla\varphi\|_{L^{p+2}}^{p+2}.$$

式 (3.8.22) 两端取极限 $j \to \infty$, 得式 (3.8.18). □

1. 对于 $\beta \leqslant 0$ 情况解的整体存在性

对于 $\beta \leqslant 0$ 情况应用能量守恒律 (3.8.18) 得到 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 整体解的存在唯一性.

定理 3.8.3 设 $\varphi \in H^2$, $\psi \in H^1$, $\beta \leqslant 0$, 且 p 满足条件 (3.8.3). 于是 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 存在唯一整体解

$$u \in C([0,\infty); H^2) \cap C^1([0,\infty); H^1) \cap C^2([0,\infty); L^2).$$

证明 由引理 3.8.3 有

$$\sup_{t\in[0,T_0)}[\|u_t(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla u_t(\cdot,t)\|^2 + \|\Delta u(\cdot,t)\|^2] \leqslant 2E(0).$$

因为

$$\sup_{t\in[0,T_0)}\|u(\cdot,t)\| \leqslant \|\varphi\| + \int_0^{T_0}\|u_t(\cdot,\tau)\|d\tau \leqslant \|\varphi\| + \sqrt{2E(0)}T_0,$$

得

$$\sup_{t\in[0,T_0)}[\|u(\cdot,t)\|_{H^2} + \|u_t(\cdot,t)\|_{H^1}] < \infty.$$

因此由定理 3.8.2 得定理的结论. □

注 3.8.1 定理 3.8.3 推广了文献 [69] 所得的结果: Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 对于 $\varphi \in H^2$, $\psi \in H^1$, $\beta = 0$ 和 $N = 1$ 存在唯一整体解.

2. 对于 $\beta > 0$ 情况解的整体存在性

现在考虑 $\beta > 0$ 的情况. 为此, 令

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + \frac{m}{2}\|\nabla u\|^2 - \frac{\beta}{p+2}\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2}.$$

在 p 的假定下, 由 Sobolev 嵌入定理易知

$$\|\nabla u\|_{L^{p+2}} \leqslant C\left(\|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2\right)^{1/2}, \quad \forall u \in H^2.$$

所以, 如果 $u \in H^2$, $J(u)$ 被定义. 因为对于 $u \in H^2$, $J(u)$ 不总是非负的, 不能由 $E(t) = E(0)$ 得到先验估计. 为了克服这个困难, 首先考虑泛函 $J(u)$ 的性质. 下面

用 $C_*(p+2)$ 表示最优的 Sobolev 常数, 即

$$C_*(p+2)=\sup_{\substack{u\in H^2\\ \nabla u\neq 0}}\frac{\|\nabla u\|_{L^{p+2}}}{(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2)^{1/2}}.$$

最优常数 $C_*(p+2)$ 是在文献 [183] 中被确定的.

引理 3.8.4 设 $\beta>0$, $u\in H^2$ 和 $\nabla u\neq 0$, 则

(i) $\lim_{\lambda\to 0}J(\lambda u)=0$, $\lim_{\lambda\to\infty}J(\lambda u)=-\infty$;

(ii) 对于 $\lambda\in[0,\infty)$, $J(\lambda u)$ 有唯一极值点

$$\lambda_0=\left(\frac{\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2}{\beta\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2}}\right)^{1/p}$$

和 $J(\lambda u)$ 在 λ_0 处达到它的最大值

$$\sup_{\lambda\geqslant 0}J(\lambda u)=J(\lambda_0 u).$$

证明 由

$$J(\lambda u)=\frac{\lambda^2}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{m\lambda^2}{2}\|\nabla u\|^2-\frac{\beta\lambda^{p+2}}{p+2}\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2}$$

看出, (i) 显然成立. 注意到

$$\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)=\lambda\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)-\beta\lambda^{p+1}\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2},$$
$$\frac{d^2}{d\lambda^2}J(\lambda u)=\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2-\beta(p+1)\lambda^p\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2},$$

如果 $\lambda_0=\left(\frac{\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2}{\beta\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2}}\right)^{1/p}$,

$$\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_0}=0,\quad \frac{d^2}{d\lambda^2}J(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_0}=-p\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)<0,$$

有 $\sup_{\lambda\geqslant 0}J(\lambda u)=J(\lambda_0 u)$. □

由引理 3.8.4 的证明, 有下面的引理.

引理 3.8.5 设 $\beta>0$, $u\in H^2$, $\nabla u\neq 0$ 和

$$I(u)=\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2-\beta\|\nabla u\|_{p+2}^{p+2},$$

那么 $\sup_{\lambda\geqslant 0}J(\lambda u)=J(\lambda_0 u)$ 当且仅当 $I(\lambda_0 u)=0$.

引理 3.8.6　设

$$d=\inf\left\{\sup_{\lambda\geqslant 0} J(\lambda u)\bigg| u\in H^2,\ \nabla u\neq 0\right\},$$

则 $d=\inf_{v\in\mathscr{N}} J(v)$, 其中 $\mathscr{N}$ 是 "Nehari 流形", 即

$$\mathscr{N}=\left\{v\in H^2,\ \nabla v\neq 0,\ I(v)=0\right\}.$$

证明　由引理 3.8.4 有

$$d=\inf\left\{J(\lambda_0 u)|u\in H^2,\ \nabla u\neq 0\right\}.$$

令 $v=\lambda_0 u$. 由引理 3.8.5 知, 结论成立. □

引理 3.8.7　$d=\left(\dfrac{p}{2(p+2)}\right)\beta^{-\frac{2}{p}}(C_*(p+2))^{-\frac{2(p+2)}{p}}>0.$

证明　由 $I(u)=0$, $\|\nabla u\|\neq 0$ 推出

$$\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2=\beta\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2}\leqslant\beta(C_*(p+2))^{p+2}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p+2}{2}}.$$

因此

$$\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\geqslant\beta^{-\frac{2}{p}}(C_*(p+2))^{-\frac{2(p+2)}{p}}.$$

从 $C_*(p+2)$ 的定义知

$$\begin{aligned}d&=\inf\left\{J(u)|u\in H^2,\ \nabla u\neq 0,\ I(u)=0\right\}\\&=\inf\left\{\frac{p}{2(p+2)}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)\bigg|u\in H^2,\ \nabla u\neq 0,\ I(u)=0\right\}\\&=\left(\frac{p}{2(p+2)}\right)\beta^{-\frac{2}{p}}(C_*(p+2))^{-\frac{2(p+2)}{p}}.\end{aligned}$$

□

引理 3.8.8

(i) 如果 $I(u)<0$, 则 $\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2>\dfrac{2(p+2)d}{p}$;

(ii) 如果 $0<\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2<\dfrac{2(p+2)d}{p}$, 则 $I(u)>0$;

(iii) 如果 $I(u)>0$, 则 $0<\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2<\dfrac{2(p+2)}{p}J(u)$;

(iv) 如果 $\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2>\dfrac{2(p+2)}{p}J(u)$, 则 $I(u)<0$.

证明　(i) 如果 $I(u)<0$, 则

$$\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2<\beta\|\nabla u\|_{p+2}^{p+2}\leqslant\beta(C_*(p+2))^{p+2}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p+2}{2}}.$$

因此

$$\|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2 > \beta^{-\frac{2}{p}}(C_*(p+2))^{-\frac{2(p+2)}{p}}.$$

(ii) 如果 $0 < \|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2 < \dfrac{2(p+2)d}{p}$, 则

$$\begin{aligned}
\beta\|u\|_{p+2}^{p+2} &\leqslant \beta(C_*(p+2))^{p+2}\left(\|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p+2}{2}} \\
&= \beta(C_*(p+2))^{p+2}\left(\|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left(\|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2\right) \\
&< \|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2.
\end{aligned}$$

所以有 $I(u) > 0$.

(iii) 和 (iv) 可由

$$J(u) = \frac{p}{2(p+2)}\left(\|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2\right) + \frac{1}{p+2}I(u)$$

得到. □

注意到, 当 $J(u) < d$ 时, $\dfrac{2(p+2)}{p}J(u) < \dfrac{2(p+2)}{p}d$. 由这个事实和引理 3.8.8 分别定义稳定集 (位势井) 和不稳定集如下

$$\begin{aligned}
\mathscr{W} &\equiv \left\{u \in H^2 \mid J(u) < d, I(u) > 0\right\} \cup \{u \in H^2 | \nabla u = 0\}, \\
\mathscr{V} &\equiv \left\{u \in H^2 \mid J(u) < d, I(u) < 0\right\}.
\end{aligned}$$

在引理 3.8.9 和引理 3.8.10 中, 在 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 局部解流的条件下将得到 $\mathscr{W}$ 和 $\mathscr{V}$ 的不变性.

引理 3.8.9 设 $\beta > 0$, $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 具有初值 $\varphi \in H^2$ 和 $\psi \in H^1$ 在 $[0, T_0)$ 上的局部解, $E(0) < d$. 如果 $I(u(x,0)) > 0$ 或 $\nabla u(x,0) = 0$, 则对于所有 $t \in [0, T_0)$, 有 $u(\cdot,t) \in \mathscr{W}$ 和 $E(t) < d$. 同时,

$$\beta\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2} \leqslant (1-\gamma)\left(\|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2\right), \quad \forall t \in [0, T_0), \tag{3.8.23}$$

其中 $\gamma = 1 - (E(0)/d)^{\frac{p}{2}} > 0$.

证明 由 $E(0) < d$ 和能量等式 $E(t) = E(0)$, 对于所有的 $t \in [0, T_0)$ 成立 $E(t) < d$ 和 $J(u) < d$. 首先证明对于某些 $t_0 \in [0, T_0)$, $I(u(x,t_0)) > 0$ 推出对于所有 $t \in [t_0, T_0)$, $u(\cdot,t) \in \mathscr{W}$. 如果不对, 由 $I(u(x,t))$ 对 t 的连续性和 $I(u(x,t_0)) > 0$ 的事实, 存在 $t_1 \in (t_0, T_0)$, 使得

$$I(u(x,t_1)) = 0, \quad \nabla u(x,t_1) \neq 0.$$

所以由引理 3.8.8(iii) 得到

$$0 < \|\Delta u(\cdot,t_1)\|^2+m\|\nabla u(\cdot,t_1)\|^2 \leqslant \frac{2(p+2)}{p}J(u(x,t_1)) \leqslant \frac{2(p+2)}{p}E(t_1) < \frac{2(p+2)}{p}d.$$

由引理 3.8.8(ii), $I(u(x,t_1)) > 0$. 这指出对于所有的 $t \in [t_0,T_0)$, $I(u(x,t)) > 0$. 所以, 如果 $I(u(x,0)) > 0$, 于是对于所有的 $t \in [0,T_0)$, $u(\cdot,t) \in \mathscr{W}$.

对于 $\nabla u(x,0) = 0$, 如果所有的 $t \in [0,T_0)$, $\nabla u(x,t) = 0$, 则对于所有的 $t \in [0,T_0)$, $u(\cdot,t) \in \mathscr{W}$. 否则, 从 $\nabla u(x,t)$ 对 t 的连续性, 存在 $t_0 \in (0,T_0)$, 使得对于所有的 $t \in (0,t_0]$, $\|\Delta u(\cdot,t)\|^2 + m\|\nabla u(\cdot,t)\|^2 \not\equiv 0$ 和

$$0 \leqslant \|\Delta u(\cdot,t)\|^2 + m\|\nabla u(\cdot,t)\|^2 < \frac{2(p+2)}{p}d.$$

从引理 3.8.8(ii) 知, $u(\cdot,t) \in \mathscr{W}$ 或对于所有 $t \in [0,t_0]$, $I(u(x,t)) > 0$. 这指出对于所有 $t \in [0,T_0)$, $u(\cdot,t) \in \mathscr{W}$.

另一方面, 由 Sobolev 嵌入定理有

$$\begin{aligned}
\beta\|\nabla u\|_{L^{p+2}}^{p+2} &\leqslant \beta(C_*(p+2))^{p+2}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)\\
&\leqslant \beta(C_*(p+2))^{p+2}\left(\frac{2(p+2)}{p}\right)^{\frac{p}{2}}J(u)^{\frac{p}{2}}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)\\
&\leqslant \left(\frac{E(0)}{d}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right).
\end{aligned}$$

取 $\gamma = 1-(E(0)/d)^{\frac{p}{2}}$, 得到式 (3.8.22) 中所要的不等式. □

定理 3.8.4 设 $\varphi \in H^2$, $\psi \in H^1$, $\beta > 0$, $E(0) < d$ 和 $I(\varphi) > 0$ 或 $\nabla\varphi = 0$, 则 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 存在唯一整体弱解

$$u \in C([0,\infty);H^2)\cap C^1([0,\infty);H^1)\cap C^2([0,\infty);L^2).$$

证明 由引理 3.8.9 和

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2 + \frac{p}{2(p+2)}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right) + \frac{1}{p+2}I(u) = E(0),$$

有

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{p}{p+2}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right) < 2E(0).$$

另一方面, 对于所有的 $T>0$, 得

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &\leqslant \|\varphi\|^2 + 2\int_0^t (u,u_t)dt \\ &\leqslant \|\varphi\|^2 + \int_0^t \|u(x,\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|u_t(x,\tau)\|^2 d\tau \\ &\leqslant \|\varphi\|^2 + E(0)T + \int_0^t \|u\|^2 dt, \quad \forall t\in[0,T).\end{aligned}$$

Gronwall 不等式给出

$$\|u(\cdot,t)\|^2 \leqslant \left(\|\varphi\|^2 + E(0)T\right)e^T, \quad \forall t\in[0,T).$$

根据定理 3.8.2 知, Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 存在唯一整体弱解 $u\in C([0,\infty);H^2)\cap C^1([0,\infty);H^1)\cap C^2([0,\infty);L^2)$. □

3. 对于 $\beta>0$ 整体解的不存在性

引理 3.8.10 设 $\beta>0$, $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 具有在 $[0,T_0)$ 上初值 $\varphi\in H^2$ 和 $\psi\in H^1$, $E(0)<d$. 如果 $I(u(x,0))<0$, 则 $u(\cdot,t)\in\mathscr{V}$ 和对于所有的 $t\in[0,T_0)$ $E(t)<d$. 同时,

$$\|\Delta u\|^2 + m\|\nabla u\|^2 > \frac{2(p+2)}{p}d, \quad \forall t\in[0,T_0). \tag{3.8.24}$$

证明 由能量等式 $E(t)=E(0)$ 知, $E(t)<d$ 或 $J(u)<d$ 是显然的. 如果 $u(\cdot,t)\notin\mathscr{V}$, 由 $I(u)$ 的连续性和 $I(u(0))<0$ 的事实, 存在 $t_0\in(0,T_0]$, 使得

$$I(u(x,t))<0, \quad \forall t\in[0,t_0), \quad I(u(x,t_0))=0.$$

所以, 由引理 3.8.8(i) 有

$$\|\Delta u(\cdot,t_0)\|^2 + m\|\nabla u(\cdot,t_0)\|^2 \geqslant \frac{2(p+2)}{p}d.$$

从引理 3.8.6 知 $J(u(\cdot,t_0))\geqslant d$. 这表示对所有的 $t\in[0,T_0)$, $I(u(x,t))<0$. □

定理 3.8.5 设 $\alpha=0$, $\beta>0$, $\varphi\in H^2$, $\psi\in H^1$, $E(0)<d$ 和 $I(\varphi)<0$. 如果 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.8.1), (3.8.2) 在 $[0,T_0)$ 上的局部解, 则 $T_0<\infty$.

证明 设 $T_0=\infty$. 于是证明是建立在 $[0,\infty)$ 上的等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\|u(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2\right] - \|u_t(\cdot,t)\|^2 - \|\nabla u_t(\cdot,t)\|^2 \\ &= \langle u_{tt}(\cdot,t) - \Delta u_{tt}(\cdot,t), u(\cdot,t)\rangle_{X^*X}\end{aligned} \tag{3.8.25}$$

的基础上, 其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*X}$ 表示通常的 X^* 与 $X(X=H^2)$ 的对偶. 其次, 方程 (3.8.1) 与 $u(x,t)$ 作对偶 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*X}$, 得

$$\langle u_{tt}(\cdot,t)-\Delta u_{tt}(\cdot,t),u(\cdot,t)\rangle_{X^*X}=\beta\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^{p+2}}^{p+2}-\|\Delta u(\cdot,t)\|^2-m\|\nabla u(\cdot,t)\|^2. \tag{3.8.26}$$

进一步, 由能量等式 $E(t)=E(0)$ 推出

$$\begin{aligned}&\frac{p+2}{2}\left[\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right]+\frac{p}{2}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)+I(u(x,t))\\&=(p+2)E(0),\quad \forall t\in[0,\infty).\end{aligned} \tag{3.8.27}$$

从式 (3.8.25)–(3.8.27) 和引理 3.8.10, 可以估计如下

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\|u(\cdot,t)\|^2+\|\nabla u(\cdot,t)\|^2\right]=\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|\nabla u_t(\cdot,t)\|^2-I(u)\\&=\frac{p+4}{2}\left[\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right]+\frac{p}{2}\left(\|\Delta u\|^2+m\|\nabla u\|^2\right)-(p+2)E(0)\\&\geqslant(p+2)\left[d-E(0)\right]>0,\quad \forall t\in[0,\infty).\end{aligned} \tag{3.8.28}$$

从而得

$$\frac{d}{dt}\left[\|u(\cdot,t)\|^2+\|\nabla u(\cdot,t)\|^2\right]\geqslant 2(\varphi,\psi)+(\nabla\varphi,\nabla\psi)+2p+2\left[d-E(0)\right]t,\quad \forall t\in[0,\infty).$$

于是存在 $t_1>0$, 使得

$$\frac{d}{dt}\left[\|u(\cdot,t)\|^2+\|\nabla u(\cdot,t)\|^2\right]>0,\quad \forall t\in[t_1,\infty).$$

因此, $P(t)\equiv\|u(\cdot,t)\|^2+\|\nabla u(\cdot,t)\|^2$ 在 $[t_1,\infty)$ 上永不为零. 另一方面, 注意到

$$[P'(t)]^2\leqslant 4P(t)\left[\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right],$$

由式 (3.8.28) 知

$$P(t)P''(t)-\frac{p+4}{4}[P'(t)]^2\geqslant 2(p+2)\left[d-E(0)\right]P(t)>0,\quad \forall t\in[t_1,\infty).$$

根据凸性方法 (见引理 1.8.7) 可以找到一个 $T_0>0$, 使得

$$\lim_{t\to T_0^-}\left[\|u(\cdot,t)\|^2+\|\nabla u(\cdot,t)\|^2\right]=\infty,$$

这与 $T_0=\infty$ 矛盾. □

3.8.4 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [226]. 与本节有关的文献见 [30], [43], [64], [69], [160], [161], [163], [183], [190], [227]–[235].

3.9 多变量的广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题

3.9.1 引言

此节讨论下列多变量的广义 IMBq 方程

$$u_{tt} - A_0\nabla^2 u_{tt} - A_1\nabla^2 u - \nabla^2 g(u) - \overline{\nabla} f(\nabla u) - G(u) = 0, \tag{3.9.1}$$

其中 $u(x,t)$ 表示变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ 和 $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ 的未知函数, $\overline{\nabla} = \sum_{i=1}^N \partial/\partial x_i, A_0, A_1 > 0$ 为常数, g, f 和 G 是给定的非线性函数. 方程 (3.9.1) 是四阶的非线性波动方程.

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是每一方向宽度为 $2D(D>0)$ 的 N 维立方体, 即 $\overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) | \, |x_i| \leqslant D, i = 1, 2, \cdots, N\}$, $x + 2De_i$ 表示 $(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + 2D, x_{i+1}, \cdots, x_N)(i = 1, 2, \cdots, N)$ 和集合 $\overline{Q_T} = \{x \in \overline{\Omega}, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

关于方程 (3.9.1), 我们在 $N+1$ 维圆柱区域 Q_T 上研究方程 (3.9.1) 的周期边值问题

$$\begin{aligned} &u(x,t) = u(x + 2De_i, t), \quad i = 1, 2, \cdots, N, \\ &u(x,t) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \end{aligned} \tag{3.9.2}$$

其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是给定的 N 维初值函数, 且满足周期边值条件. 对于方程 (3.9.1), 还研究它的 Cauchy 问题

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,t) = \psi(x), \tag{3.9.3}$$

其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的已知函数.

为讨论简单起见, 在方程 (3.9.1) 中令 $A_0 = A_1 = 1$, 且在这里只证明方程 (3.9.1) 的 2 维周期边值问题 (3.9.1), (3.9.2) 和 2 维 Cauchy 问题 (3.9.1), (3.9.3) 的局部古典解的存在性和唯一性, 因为我们可以应用证明 2 维的情形证明 N 维周期边值问题 (3.9.1), (3.9.2) 和 N 维 Cauchy 问题 (3.9.1) (3.9.3).

3.9.2 周期边值问题 (3.9.1), (3.9.2)

现在我们在 $L^2(\Omega)$ 中建立一标准正交基.

下面考虑常微分方程的特征值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(x_1 + 2D) = y(x_1). \end{cases} \tag{3.9.4}$$

易得特征值 $\lambda_{1i} = \alpha_i^2 = (i\pi/D)^2 (i = 0, 1, \cdots)$ 和特征函数系

$$\{y_i(x_1)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2D}}, \frac{1}{\sqrt{D}} \cos \alpha_i x_1, \frac{1}{\sqrt{D}} \sin \alpha_i x_1, i = 1, 2, \cdots \right\},$$

此特征函数系构成 $L^2(-D, D)$ 中一标准正交基. 类似地, 可得周期边值问题 $z'' + \lambda z = 0, z(x_2 + 2D) = z(x_2)$ 的特征值 $\lambda_{2j} = \beta_j^2 = (j\pi/D)^2 (j = 0, 1, \cdots)$ 和特征函数系

$$\{z_j(x_2)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2D}}, \frac{1}{\sqrt{D}} \cos \beta_j x_2, \frac{1}{\sqrt{D}} \sin \beta_j x_2, i = 1, 2, \cdots \right\}.$$

$\{z_j(x_2)\}$ 构成 $L^2(-D, D)$ 中一个标准正交基. 根据引理 1.8.11, 函数系 $\{y_i(x_1) z_j(x_2), i, j = 0, 1, \cdots\}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基.

令 $u(x,t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} T_{ij}(t) y_i(x_1) z_j(x_2)$ 是周期边值问题 (3.9.1), (3.9.2) 的解. 初值函数可以表示为 $\varphi(x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \varphi_{ij} y_i(x_1) z_j(x_2)$ 和 $\psi(x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \psi_{ij} y_i(x_1) z_j(x_2)$. 将 $u(x,t)$ 的表达式代入方程 (3.9.1), 两端乘以 $y_i(x_1) z_j(x_2)$, 并在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned} &(1 + \alpha_i^2 + \beta_j^2) \ddot{T}_{ij} + (\alpha_i^2 + \beta_j^2) T_{ij} \\ &- \int_\Omega \{\nabla^2 g(u) + \overline{\nabla} f(\nabla u) + G(u)\} y_i(x_1) z_j(x_2) dx = 0, \quad i, j = 0, 1, \cdots. \end{aligned} \tag{3.9.5}$$

将 $u(x,t), \varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的表达式代入方程 (3.9.2) 得

$$T_{ij}(0) = \varphi_{ij}, \quad \dot{T}_{ij}(0) = \psi_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \cdots), \tag{3.9.6}$$

其中 $\dot{T}_{ij} = (d/dt) T_{ij}(t)$ 等. 因此 T_{ij} 满足无穷常微分方程组 (3.9.5), (3.9.6). 现在证明 Cauchy 问题 (3.9.5), (3.9.6) 解的存在性. 为此, 首先考虑下面有限常微分方程组

$$\begin{aligned} &(1 + \alpha_i^2 + \beta_j^2) \ddot{T}_{\bar{N}ij} + (\alpha_i^2 + \beta_j^2) T_{\bar{N}ij} \\ &- \int_\Omega \{\nabla^2 g(u_{\bar{N}}) + \overline{\nabla} f(\nabla u_{\bar{N}}) + G(u_{\bar{N}})\} y_i(x_1) z_j(x_2) dx = 0, \end{aligned} \tag{3.9.7}$$

$$T_{\bar{N}ij}(0) = \varphi_{ij}, \quad \dot{T}_{\bar{N}ij}(0) = \psi_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, \bar{N} \tag{3.9.8}$$

解的存在性, 其中 $u_{\bar{N}(x,t)} = \sum_{i,j=0}^{\bar{N}} T_{\bar{N}ij}(t) y_i(x_1) z_j(x_2)$, $\bar{N}$ 为自然数. 为了应用 Leray- Schauder 不动点定理, 我们还考虑下列带有参数 θ 的常微分方程组的 Cauchy

问题

$$(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)\ddot{T}_{\bar{N}ij}+(\alpha_i^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}ij}$$
$$-\theta\int_\Omega\{\nabla^2 g(u_{\bar{N}})+\overline{\nabla}f(\nabla u_{\bar{N}})+G(u_{\bar{N}})\}y_i(x_1)z_j(x_2)dx=0, \tag{3.9.9}$$
$$T_{\bar{N}ij}(0)=\theta\varphi_{ij},\quad \dot{T}_{\bar{N}ij}(0)=\theta\psi_{ij},\quad i,j=0,1,\cdots,\bar{N},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1. \tag{3.9.10}$$

引理 3.9.1 假设下列条件成立:

(1) $g\in C^5(\mathbb{R}),|g^{(i)}(s)|\leqslant K_i|s|^{m_1+(5-i)}$ $(i=1,2,3,4,5),(i)$ 表示导数的阶;

(2) $f\in C^4(\mathbb{R})$,

$$|f(\nabla s)|=|f(s_{x_1},s_{x_2})|\leqslant K_6\Big(|s_{x_1}|^{m_2+4}+|s_{x_1}|^{m_3+4}|s_{x_2}|^{m_4+4}+|s_{x_2}|^{m_5+4}\Big),$$
$$\left|\frac{\partial^i f}{\partial s_{x_1}^i}\right|\leqslant K_7\Big(|s_{x_1}|^{m_2+(4-i)}+|s_{x_1}|^{m_3+(4-i)}|s_{x_2}|^{m_4+4}\Big),$$
$$\left|\frac{\partial^i f}{\partial s_{x_2}^i}\right|\leqslant K_8\Big(|s_{x_1}|^{m_3+4}|s_{x_2}|^{m_4+(4-i)}+|s_{x_2}|^{m_5+(4-i)}\Big)\quad(i=1,2,3,4),$$
$$\left|\frac{\partial^{i+j} f}{\partial s_{x_i}^i\partial s_{x_2}^j}\right|\leqslant K_9|s_{x_1}|^{m_3+(4-i)}|s_{x_2}|^{m_4+(4-j)}\quad(i,j=1,2,3,\quad i+j\leqslant 4);$$

(3) $G\in C^3(\mathbb{R}),|G^{(i)}|\leqslant K_{10}|s|^{m_6+(3-i)}(i=1,2,3)$;

(4) $m_3+m_4>\max\{m_1,m_2,m_5,m_6\}$, 这里 $m_i\geqslant 1$ $(i=1,2,\cdots,6),K_i(i=0,1,\cdots,10)$ 是常数. 进一步, 设 $T(t)=(T_{\bar{N}ij}(t),i,j=0,1,\cdots,\bar{N})$ 是问题 (3.9.9), (3.9.10) 的解. 令

$$E_{\bar{N}}(t)=\sum_{i,j=0}^{\bar{N}}\left(1+\alpha_i^2+\beta_j^2+\sum_{\substack{l+k=8\\ l,k=0,2,4,6,8}}\alpha_i^l\beta_j^k+2\sum_{\substack{l+k=10\\ l,k=2,4,6,8}}\alpha_i^l\beta_j^k+\alpha_i^{10}+\beta_j^{10}\right)\dot{T}_{\bar{N}ij}^2$$
$$+\sum_{i,j=0}^{\bar{N}}\left(1+\alpha_i^2+\beta_j^2+2\sum_{\substack{l+k=10\\ l,k=2,4,6,8}}\alpha_i^l\beta_j^k+\alpha_i^{10}+\beta_j^{10}\right)T_{\bar{N}ij}^2+1,$$

则有

$$\frac{dE_{\bar{N}}(t)}{dt}\leqslant K_{11}(E_{\bar{N}}(t))^{(m_3+m_4+9)/2}, \tag{3.9.11}$$

其中 $K_{11}>0$ 是不依赖于 θ,D 和 $\bar{N}$ 的常数.

证明 方程组 (3.9.9) 两端乘以 $(1+\alpha_i^4\beta_j^4+\alpha_i^6\beta_j^2+\alpha_i^2\beta_j^6+\alpha_i^8+\beta_j^8)\dot{T}_{\bar{N}ij}$, 乘积对 $i,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 并对所得方程的两端各加 $\frac{d}{dt}\sum_{i,j=0}^{\bar{N}}T_{\bar{N}ij}^2$, 得

$$\frac{dE_{\bar{N}}(t)}{dt}=2\theta(\nabla^2 g(u_{\bar{N}})+\overline{\nabla}f(\nabla u_{\bar{N}})+G(u_{\bar{N}}),u_{\bar{N}t}$$
$$+u_{\bar{N}x_1^4x_2^4t}+u_{\bar{N}x_1^6x_2^2t}+u_{\bar{N}x_1^2x_2^6t}+u_{\bar{N}x_1^8t}+u_{\bar{N}x_2^8t})+\frac{d}{dt}(u_{\bar{N}},u_{\bar{N}}). \tag{3.9.12}$$

因为

$$
\begin{aligned}
E_{\bar N}(t)=&\sum_{i=0,1,4,5}(u_{\bar N x_1^i t},u_{\bar N x_1^i t})+\sum_{i=1,4,5}(u_{\bar N x_2^i t},u_{\bar N x_2^i t})\\
&+\sum_{\substack{i+j=4\\ i,j=1,2,3}}(u_{\bar N x_1^i x_2^j t},u_{\bar N x_1^i x_2^j t})+2\sum_{\substack{i+j=5\\ i,j=1,2,3,4}}(u_{\bar N x_1^i x_2^j t},u_{\bar N x_1^i x_2^j t})\\
&+(u_{\bar N},u_{\bar N})+\sum_{i=1}^{2}(u_{\bar N x_i},u_{\bar N x_i})+2\sum_{\substack{i+j=5\\ i,j=1,2,3,4}}(u_{\bar N x_1^i x_2^j},u_{\bar N x_1^i x_2^j})\\
&+2\sum_{i=1}^{2}(u_{\bar N x_i^5},u_{\bar N x_i^5})+1,
\end{aligned}\tag{3.9.13}
$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理和式 (3.9.13) 知

$$\|u_{\bar N}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C_1\|u_{\bar N}\|_{L^2(\Omega)}^{4/5}\|u_{\bar N}\|_{H^5(\Omega)}^{1/5}\leqslant C_2(E_{\bar N}(t))^{1/2},\tag{3.9.14}$$

$$\|u_{\bar N x_i}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C_3\|u_{\bar N}\|_{L^2(\Omega)}^{3/5}\|u_{\bar N}\|_{H^5(\Omega)}^{2/5}\leqslant C_4(E_{\bar N}(t))^{1/2},\quad i=1,2,\tag{3.9.15}$$

$$\|u_{\bar N x_i x_j}\|\leqslant C_5\|u_{\bar N}\|_{L^2(\Omega)}^{3/5}\|u_{\bar N}\|_{H^5(\Omega)}^{2/5}\leqslant C_6(E_{\bar N}(t))^{1/2},\quad i,j=1,2,\tag{3.9.16}$$

$$\|u_{\bar N x_i x_j}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C_7\|u_{\bar N}\|_{L^2(\Omega)}^{2/5}\|u_{\bar N}\|_{H^5(\Omega)}^{3/5}\leqslant C_8(E_{\bar N}(t))^{1/2},\quad i,j=1,2,\tag{3.9.17}$$

$$\|u_{\bar N x_1^i x_2^j}\|\leqslant C_9\|u_{\bar N}\|_{L^2(\Omega)}^{2/5}\|u_{\bar N}\|_{H^5(\Omega)}^{3/5}\leqslant C_{10}(E_{\bar N}(t))^{1/2},\quad i+j=3,\quad i,j=0,1,2,3,\tag{3.9.18}$$

$$\|u_{\bar N x_1^i x_2^j}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C_{11}\|u_{\bar N}\|_{L^2(\Omega)}^{1/5}\|u_{\bar N}\|_{H^5(\Omega)}^{4/5}\leqslant C_{12}(E_{\bar N}(t))^{1/2},\quad i+j=3,\quad i,j=0,1,2,3.\tag{3.9.19}$$

利用引理 3.9.1 的假定, Hölder 不等式和不等式 (3.9.13)–(3.9.15) 得

$$
\begin{aligned}
|(\nabla^2 g(u_{\bar N}),u_{\bar N t})|=&\left|\int_\Omega\left[g''(u_{\bar N})(u_{\bar N x_1}^2+u_{\bar N x_2}^2)+g'(u_{\bar N})(u_{\bar N x_1^2}+u_{\bar N x_2^2})\right]u_{\bar N t}dx\right|\\
\leqslant&C_{13}(E_{\bar N}(t))^{(m_1+4)/2}\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}(|u_{\bar N x_i}|+|u_{\bar N x_i^2}|)|u_{\bar N t}|dx\\
\leqslant&C_{13}(E_{\bar N}(t))^{(m_1+4)/2}\sum_{i=1}^{2}(\|u_{\bar N x_i}\|_{L^2(\Omega)}+\|u_{\bar N x_i^2}\|_{L^2(\Omega)})\|u_{\bar N t}\|_{L^2(\Omega)}\\
\leqslant&C_{14}(E_{\bar N}(t))^{(m_1+6)/2}.
\end{aligned}\tag{3.9.20}
$$

类似地, 由引理 3.9.1 的假定 (4) 有

$$|(\overline{\nabla}f(\nabla u_{\bar N})+G(u_{\bar N}),u_{\bar N t})|\leqslant C_{15}(E_{\bar N}(t))^{(m_3+m_4+9)/2}.\tag{3.9.21}$$

应用分部积分, Hölder 不等式, 不等式 (3.9.14)–(3.9.19) 和引理的假定可见

$$|(\nabla^2 g(u_{\bar{N}}), u_{\bar{N}x_1^4x_2^4t})| = \left|\left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\nabla^2 g(u_{\bar{N}}), u_{\bar{N}x_1x_2^4t}\right)\right| \leqslant C_{16}(E_{\bar{N}}(t))^{(m_1+6)/2}. \quad (3.9.22)$$

应用同样的方法得

$$\begin{aligned}&|(\nabla^2 g(u_{\bar{N}}), u_{\bar{N}x_1^6x_2^2t} + u_{\bar{N}x_1^2x_2^6t} + u_{\bar{N}x_1^8t} + u_{\bar{N}x_2^8t})|\\ \leqslant\, & C_{17}(E_{\bar{N}}(t))^{(m_1+6)/2}, \qquad (3.9.23)\\ &|(\overline{\nabla} f(\nabla u_{\bar{N}}) + G(u_{\bar{N}}), u_{\bar{N}x_1^6x_2^2t} + u_{\bar{N}x_1^2x_2^6t} + u_{\bar{N}x_1^8t} + u_{\bar{N}x_2^8t})|\\ \leqslant\, & C_{18}(E_{\bar{N}}(t))^{(m_3+m_4+9)/2}. \qquad (3.9.24)\end{aligned}$$

注意到引理的条件, 由式 (3.9.20)–(3.9.24) 和式 (3.9.12) 推出式 (3.9.11) 成立. □

引理 3.9.2 在引理 3.9.1 的条件下, 若

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty} E_{\bar{N}}(0)\\ =&\sum_{i,j=0}^{\infty}\left\{\left(1+\alpha_i^2+\beta_j^2+\sum_{\substack{l+k=8\\ l,k=0,2,4,6,8}}\alpha_i^l\beta_j^k+2\sum_{\substack{l+k=10\\ l,k=2,4,6,8}}\alpha_i^l\beta_j^k+\alpha_i^{10}+\beta_j^{10}\right)\psi_{i,j}^2\right.\\ &\left.+\sum_{i,j=0}^{\infty}\left(1+\alpha_i^2+\beta_j^2+2\sum_{\substack{l+k=10\\ l,k=2,4,6,8}}\alpha_i^l\beta_j^k+\alpha_i^{10}+\beta_j^{10}\right)\varphi_{ij}^2\right\}+1=b<\infty,\end{aligned}$$

则 $E_{\bar{N}}(t)$ 在任意子区间 $0\leqslant t\leqslant t_1<t_b$ 上是一致有界的, 且不依赖于 $\bar{N}$ 和 D, 其中 $t_b = 2/[K_{11}(m_3+m_4+7)b^{(m_3+m_4+7)/2}]$.

证明 由式 (3.9.11) 推出

$$\begin{aligned}E_{\bar{N}}(t) &\leqslant E_{\bar{N}}(0)\Big/\left(1-\frac{K_{11}(m_3+m_4+7)}{2}(E_{\bar{N}}(0))^{(m_3+m_4+7)/2}t\right)^{2/(m_3+m_4+7)}\\ &\leqslant b\Big/\left(1-\frac{K_{11}(m_3+m_4+7)}{2}b^{(m_3+m_4+7)/2}t\right)^{2/(m_3+m_4+7)}.\end{aligned}$$

如果 $0\leqslant t<2/[K_{11}(m_3+m_4+7)b^{(m_3+m_4+7)}/2]$, 则引理成立. □

引理 3.9.3 在引理 3.9.2 的条件下, 有限常微分方程组的 Cauchy 问题 (3.9.7), (3.9.8) 在 $[0,t_1]$ 上解存在, 其中 $0<t_1<t_b$.

证明 应用 Leray-Schauder 不动点定理证明引理.

令 B 表示基本函数空间 $C[0,t_1]$, 并考虑下列方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned}&(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)\ddot{T}_{\bar{N}ij}+(\alpha_i^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}ij}\\ =&\,\theta\int_\Omega\{\nabla^2 g(v_{\bar{N}})+\overline{\nabla} f(\nabla v_{\bar{N}})+G(v_{\bar{N}})\}y_i(x_1)z_j(x_2)dx, \qquad (3.9.25)\end{aligned}$$

$$T_{\bar{N}ij}(0)=\theta\varphi_{ij},\quad \dot{T}_{\bar{N}ij}(0)=\theta\psi_{ij},\quad i,j=0,1,\cdots,\bar{N}, \qquad (3.9.26)$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1, v_{\bar{N}}(x,t) = \sum_{i,j=0}^{\bar{N}} v_{\bar{N}ij}(t)y_i(x_1)z_j(x_2)$. 对于任意向量值函数 $V = \{v_{\bar{N}ij}(t), i,j = 0,1,\cdots,\bar{N}\} \in B$, 根据线性常微分方程理论, Cauchy 问题 (3.9.25), (3.9.26) 有唯一解 $T = \{T_{\bar{N}ij}(t), i,j = 0,1,\cdots,\bar{N}\} \in C^2[0,t_1] \equiv Z \subset B$. 这样, 我们定义了一个带参数 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 映基本空间 B 到自身的映射 $L_\theta : B \mapsto B$.

令 $S \subset B$ 是任一有界子集. 对于 $V \in S$ 和 $0 \leqslant \theta_1, \theta_2 \leqslant 1$, 有 $T = L_{\theta_1}V$, $\widetilde{T} = L_{\theta_2}V$. $W = T - \widetilde{T}$ 满足方程组

$$\begin{aligned}&(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)\ddot{W}_{\bar{N}ij} + (\alpha_i^2+\beta_j^2)W_{\bar{N}ij}\\ &= (\theta_1-\theta_2)\int_\Omega \{\nabla^2 g(v_{\bar{N}}) + (\overline{\nabla} f(\nabla v_{\bar{N}}) + G(v_{\bar{N}}))\}y_i(x_1)z_j(x_2)dx\end{aligned} \tag{3.9.27}$$

和初值条件

$$W_{\bar{N}ij}(0) = (\theta_1-\theta_2)\varphi_{ij}, \quad \dot{W}_{\bar{N}ij}(0) = (\theta_1-\theta_2)\psi_{ij}, \quad i,j = 0,1,\cdots,\bar{N}. \tag{3.9.28}$$

方程组 (3.9.27) 两端同乘以 $\dot{W}_{\bar{N}ij}$, 在 $[0,t]$ 上积分, 乘积对 $i,j = 0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 利用 $v_{\bar{N}}, v_{\bar{N}x}$ 和 $v_{\bar{N}x^2}$ 在 $\overline{\Omega} \times [0,t_1]$ 上的有界性, 并由 Gronwall 不等式, 易得

$$\sum_{i,j=0}^{\bar{N}} (\dot{W}_{\bar{N}ij}^2 + W_{\bar{N}ij}^2) \leqslant K_{12}|\theta_1-\theta_2|^2,$$

即

$$\|T-\widetilde{T}\|_{C^1[0,t_1]} = \sum_{i,j=0}^{\bar{N}} \|T_{\bar{N}ij} - \widetilde{T}_{\bar{N}ij}\|_{C^1[0,t_1]} \leqslant K_{12}|\theta_1-\theta_2|,$$

其中常数 K_{12} 不依赖于 θ. 这表示对于任意有界的子集 $S \subset B$, 映射 $L_\theta : B \mapsto B$ 对于参数 θ 是一致连续的.

容易验证, 对于任意固定的 θ 映射 $L_\theta : B \mapsto B$ 是连续的. 因为 $Z \hookrightarrow B$ 是全连续的, 因此映射 $L_\theta : B \mapsto B$ 对于每一个 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 是全连续的.

当 $\theta = 0$ 时, Cauchy 问题 (3.9.9), (3.9.10) 有唯一解 $T \equiv 0$. 由引理 3.9.2 看出, 对于 Cauchy 问题 (3.9.9), (3.9.10) 所有可能的解或映射 $L_\theta : B \mapsto B$, 所有可能的不动点 T, $\|T\|_{C^1[0,t_1]} \leqslant K_{13}$, 其中 K_{13} 不依赖于 θ. 则根据引理 1.8.9(Leray-Schauder 不动点定理) 至多存在解 $T \in C^1[0,t_1]$. 根据线性常微分方程理论知 $T \in C^2[0,t_1]$.

□

由 Ascoli-Arzelá定理可得如下推论.

推论 3.9.1 在引理 3.9.3 的条件下, 对于 Cauchy 问题 (3.9.7), (3.9.8) 的解序列 $\{T_{ij}\}_{i,j=0}^{\bar{N}}$ $(\bar{N} = 1,2\cdots)$, 存在一收敛的子序列 $\{T_{\bar{N}_k ij}\}_{i,j=0}^{\bar{N}_k}$. 当 $\bar{N}_k \to \infty$ 时, 则在 $[0,t_1]$ 上

$$T_{\bar{N}_k ij} \to T_{ij}, \quad \dot{T}_{\bar{N}_k ij} \to \dot{T}_{ij} \quad (i,j = 0,1,\cdots)$$

是一致的.

引理 3.9.4 在引理 3.9.3 的条件下, 级数 $\sum_{i,j=0}^{\infty}\dot{T}_{ij}^2$, $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^k\dot{T}_{ij}^2$ $(k=2,8,10)$, $\sum_{i,j=0}^{\infty}\beta_j^k\dot{T}_{ij}^2$ $(k=2,8,10)$, $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^k\beta_j^l\dot{T}_{ij}^2$ $(k,l=2,4,6,k+l=8)$, $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^k\beta_j^l\dot{T}_{ij}^2$ $(k,l=2,4,6,8,k+l=10)$, $\sum_{i,j=0}^{\infty}T_{ij}^2$, $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^kT_{ij}^2$ $(k=2,10)$, $\sum_{i,j=0}^{\infty}\beta_j^kT_{ij}^2$ $(k=2,10)$ 和 $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^k\beta_j^lT_{ij}^2$ $(k,l=2,4,6,8,k+l=10)$ 收敛, 且在 $[0,t_1]$ 上一致有界 (令 M 为界).

证明 令 $S_J=\sum_{i,j=0}^{J}\alpha_i^6\beta_j^4\dot{T}_{ij}^2$($J$ 是自然数). 显然 $S_{J+1}>S_J$. 固定 J, 取 $\bar{N}_k(>J)$ 充分大, 并应用推论 3.9.1 得

$$S_J\leqslant\left|S_J-\sum_{i,j=0}^{J}\alpha_i^6\beta_j^4\dot{T}_{\bar{N}_kij}^2\right|+\sum_{i,j=0}^{N_k}\alpha_i^6\beta_j^4\dot{T}_{\bar{N}_kij}^2\leqslant 1+E_{\bar{N}_k}(t).$$

因为函数 $E_{\bar{N}_k}(t)$ 有界, 且在 $[0,t_1]$ 上不依赖于 $\bar{N}_k$, 则 S_J 是有界的. 所以级数 $\sum_{i,j=0}^{J}\alpha_i^6\beta_j^4\dot{T}_{ij}^2$ 是收敛的, 且在 $[0,t_1]$ 上有界. 应用同样的方法可证其他结论. □

推论 3.9.2 在引理 3.9.2 的条件下, 存在一常数 $M_1>0$, 使得在 $[0,t_1]$ 上

$$\|u\|_{H^5(\Omega)}+\|u_t\|_{H^5(\Omega)}\leqslant M_1,$$
$$\|u\|_{C^3(\bar{\Omega})}+\|u_t\|_{C^3(\bar{\Omega})}\leqslant M_1,$$

其中 $u(x,t)=\sum_{i,j=0}^{\infty}T_{ij}(t)y_i(x_1)z_j(x_2)$.

引理 3.9.5 在引理 3.9.2 的条件下, $u_{\bar{N}_k}\to u$, $u_{\bar{N}_kx_i}\to u_{x_i}$ $(i=1,2)$ 和 $u_{\bar{N}_kt}\to u_t$ $(\bar{N}_k\to\infty)$ 在 Q_{t_1} 上一致成立, 其中 $u_{\bar{N}_k}(x,t)=\sum_{i,j=0}^{\bar{N}_k}T_{\bar{N}_kij}(t)y_i(x_1)z_j(x_2)$.

证明 令 $T_{\bar{N}_kij}\equiv 0$ $(i,j>\bar{N}_k)$. 由引理 3.9.4 推出

$$\begin{aligned}|u_{\bar{N}_kx_1}-u_{x_1}|\leqslant&\left|\sum_{i,j=1}^{l}(T_{ij}-T_{\bar{N}_kij})y_i'(x_1)z_j(x_2)\right|\\&+\left|\sum_{i,j=l+1}^{\infty}T_{ij}y_i'(x_1)z_j(x_2)\right|+\left|\sum_{i,j=l+1}^{\bar{N}_k}T_{\bar{N}_kij}y_i'(x_1)z_j(x_2)\right|\\\leqslant&\frac{1}{\sqrt{D}}\sum_{i,j=1}^{l}\alpha_i|T_{ij}-T_{\bar{N}_kij}|+\frac{2\sqrt{M}}{\sqrt{D}}\sum_{i,j=l+1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i^2\beta_j^2}.\end{aligned}$$

注意到推论 3.9.1. 我们可以首先选择 l, 然后选择 $\bar{N}_k$, 使得上述不等式右端很小, 则当 $\bar{N}_k\to\infty$ 时, 在 Q_{t_1} 上一致地 $u_{\bar{N}_kx_1}\to u_{x_1}$. 类似地可证 $u_{\bar{N}_kx_2}\to u_{x_2}$, $u_{\bar{N}_k}\to u$ 和 $u_{\bar{N}_kt}\to u_t(N_k\to\infty)$. □

定理 3.9.1 在引理 3.9.2 的条件下, 函数 $T_{ij}(t)$ 是 Cauchy 问题 (3.9.5), (3.9.6) 在 $0\leqslant t\leqslant t_1<t_b$ 上的解, 其中 $T_{ij}(t)=\lim_{N_k\to\infty}T_{\bar{N}_kij}(t)$ 和 $T_{\bar{N}_kij}(t)(k=0,1,\cdots)$ 是 Cauchy 问题 (3.9.7), (3.9.8) 的解.

证明 函数 $T_{\bar{N}_k ij}(t)$ 满足 Volterra 积分方程

$$\begin{aligned}&(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}_k ij}\\&=(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)(\varphi_{ij}+\psi_{ij}t)-\int_0^t(t-\tau)\Big[(\alpha_i^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}_k ij}\\&\quad+(\nabla^2 g(u_{\bar{N}k})+\overline{\nabla}f(\nabla u_{\bar{N}_k})+G(u_{\bar{N}_k}),y_i(x_1)z_j(x_2))\Big]d\tau\\&\equiv(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)(\varphi_{ij}+\psi_{ij}t)-F_{\bar{N}_k ij},\quad i,j=0,1,\cdots,\bar{N}_k.\end{aligned}\tag{3.9.29}$$

上面的事实指出, 函数 $T_{ij}(t)$ 满足类似的方程. 事实上, 利用式 (3.9.29) 有

$$\begin{aligned}&|(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)T_{ij}-(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)(\varphi_{ij}+\psi_{ij}t)+F_{ij}|\\&\leqslant(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)|T_{ij}-T_{\bar{N}_k ij}|+|F_{ij}-F_{\bar{N}ij}|\\&\leqslant[1+\alpha_i^2+\beta_j^2+(\alpha_i^2+\beta_j^2)t_1^2]\|T_{ij}-T_{\bar{N}_k ij}\|_{C[0,t_1]}\\&\quad+t_1^2(\|(g(u)-g(u_{\bar{N}_k}),y_i''z_j+y_iz_j'')\|_{C[0,t_1]}\\&\quad+\|(f(\nabla u)-f(\nabla u_{\bar{N}k}),y_i'z_j+y_iz_j')\|_{C[0,t_1]}\\&\quad+\|(G(u)-G(u_{\bar{N}k}),y_iz_j)\|_{C[0,t_1]}),\quad i,j=0,1,2,\cdots,\bar{N}_k,\end{aligned}\tag{3.9.30}$$

其中

$$F_{ij}=\int_0^t(t-\tau)[(\alpha_i^2+\beta_j^2)T_{ij}+(\nabla^2 g(u)+\overline{\nabla}f(\nabla u)+G(u),y_i(x_1)z_j(x_2))]d\tau.$$

由推论 3.9.1 和引理 3.9.5 推出式 (3.9.30) 的右端, 当 $\bar{N}_k\to\infty$ 时, 趋于零. 所以 $T_{ij}(t)$ 是积分方程

$$(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)T_{ij}=(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)(\varphi_{ij}+\psi_{ij}t)-F_{ij}$$

的解. 上式对 t 求导两次得定理的结论. □

定理 3.9.2 设引理 3.9.2 的条件成立且 $\varphi(x),\psi(x)\in H^6(\Omega)$, 则周期边值问题 (3.9.1), (3.9.2) 在 Q_{t_1} 上存在古典解 $u(x,t)=\sum_{i,j=0}^{\infty}T_{ij}(t)y_i(x_1)z_j(x_2)$, 其中 $0<t_1<t_b=2/[K_{11}(m_3+m_4+7)b^{(m_3+m_4+7)/2}]$.

证明 由假设推出

$$\varphi_{ij}=\int_\Omega\varphi(x)y_i(x_1)z_j(x_2)dx,\quad \psi_{ij}=\int_\Omega\psi(x)y_i(x_1)z_j(x_2)dx,\quad i,j=0,1,\cdots,$$

且它们满足条件 $b<\infty$. 在此情况下定理 3.9.1 保证 Cauchy 问题 (3.9.5), (3.9.6) 在 $0\leqslant t\leqslant t_1<t_b$ 上存在解, 且在 $[0,t_1]$ 上

$$\begin{aligned}&(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)\ddot{T}_{ij}\\&=-(\alpha_i^2+\beta_j^2)T_{ij}+(g(u),y_i''z_j+y_iz_j'')\\&\quad+(f(\nabla u),y_i'z_j+y_iz_j')+(G(u),y_iz_j),\quad i,j=0,1,\cdots.\end{aligned}\tag{3.9.31}$$

由有限常微分方程组 (3.9.7) 推出

$$\begin{aligned}&(1+\alpha_i^2+\beta_j^2)\ddot{T}_{\bar{N}_k ij}\\&=-(\alpha_i^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}_k ij}+(g(u_{\bar{N}_k}),y_i''z_j+y_iz_j'')\\&\quad+(f(\nabla u_{\bar{N}_k}),y_i'z_j+y_iz_j')+(G(u_{\bar{N}_k}),y_iz_j),\quad i,j=0,1,\cdots,\bar{N}_k.\end{aligned}\tag{3.9.32}$$

因为当 $\bar{N}_k\to\infty$ 时, $T_{\bar{N}_k ij}$ 在 $[0,t_1]$ 上一致收敛于 T_{ij} $(i,j=0,1,\cdots)$, 且当 $\bar{N}_k\to\infty$ 时, 在 Q_{t_1} 上 $u_{\bar{N}}$, $u_{\bar{N}_k x_1}$, $u_{\bar{N}_k x_2}$ 和 $u_{\bar{N}_k t}$ 分别一致收敛于 u,u_{x_1},u_{x_2} 和 u_t. 由式 (3.9.31) 和式 (3.9.32) 推出, 当 $\bar{N}_k\to\infty$ 时, $\ddot{T}_{\bar{N}_k ij}\to\ddot{T}_{ij}$ 在 $[0,t_1]$ 上是一致成立的.

方程组 (3.9.7) 两端乘以 $(\alpha_i^{10}+\alpha_i^2\beta_j^8+\alpha_i^4\beta_j^6+\alpha_i^6\beta_j^4+\alpha_i^8\beta_j^2+\beta_j^{10})\dot{T}_{\bar{N}ij}$, 乘积对 $i,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和知

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\sum_{\substack{i+j=5\\ i,j=0,1,\cdots,5}}\|u_{\bar{N}x_1^ix_2^jt}\|^2_{L^2(\Omega)}+2\sum_{\substack{i+j=6\\ i,j=1,2,\cdots,5}}\|u_{\bar{N}x_1^ix_2^jt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{\bar{N}x_1^6t}\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\&\left.+\|u_{\bar{N}x_2^6t}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{\bar{N}x_1^6}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{\bar{N}x_2^6}\|^2_{L^2(\Omega)}+2\sum_{\substack{i+j=6\\ i,j=1,2,\cdots,5}}\|u_{\bar{N}x_1^ix_2^j}\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}\\&=2\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}[\nabla^2g(u_{\bar{N}})+\overline{\nabla}f(\nabla u_{\bar{N}})+G(u_{\bar{N}})],u_{\bar{N}x_1^6t}+u_{\bar{N}x_2^6t}+u_{\bar{N}x_1^2x_2^4t}+u_{\bar{N}x_1^4x_2^2t}\right)\\&\quad+2\left(\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}[\nabla^2g(u_{\bar{N}})+\overline{\nabla}f(\nabla u_{\bar{N}})+G(u_{\bar{N}})],u_{\bar{N}x_1^2x_2^4t}+u_{\bar{N}x_2^6t}\right).\end{aligned}\tag{3.9.33}$$

应用 Hölder 不等式和引理 1.8.17 得

$$\begin{aligned}&\left|2\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}[\nabla^2g(u_{\bar{N}})+\overline{\nabla}f(\nabla u_{\bar{N}})+G(u_{\bar{N}})],u_{\bar{N}x_1^6t}+u_{\bar{N}x_2^6t}+u_{\bar{N}x_1^2x_2^4t}+u_{\bar{N}x_1^4x_2^2t}\right)\right|\\&\leqslant C_{19}\left(\|u_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}+\|u_{\bar{N}_t}\|^2_{H^6(\Omega)}\right),\end{aligned}\tag{3.9.34}$$

$$\begin{aligned}&\left|2\left(\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}[\nabla^2g(u_{\bar{N}})+\overline{\nabla}f(\nabla u_{\bar{N}})+G(u_{\bar{N}})],u_{\bar{N}x_1^2x_2^4t}+u_{\bar{N}x_2^6t}\right)\right|\\&\leqslant C_{20}\left(\|u_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}+\|u_{\bar{N}_t}\|^2_{H^6(\Omega)}\right).\end{aligned}\tag{3.9.35}$$

将式 (3.9.34) 和式 (3.9.35) 代入式 (3.9.33), 利用 Gronwall 不等式推出

$$\sum_{\substack{i+j=6\\ i,j=0,1,\cdots,6}}\left(\|u_{\bar{N}x_1^ix_2^jt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{\bar{N}x_1^ix_2^j}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\leqslant C_{21},\quad t\in[0,t_1].\tag{3.9.36}$$

因此, 由引理 3.9.2 和式 (3.9.36) 有

$$\|u_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}+\|u_{\bar{N}t}\|^2_{H^6(\Omega)}\leqslant M_2,\quad t\in[0,t_1].\tag{3.9.37}$$

利用引理 3.9.4 中同样的方法, 可以证明级数 $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^k\beta_j^l\dot{T}_{ij}^2$ 和 $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^k\beta_j^lT_{ij}^2(k,l=4,6,8,k+l=12)$ 是收敛的, 且在 $[0,t_1]$ 上有界 (令 M_3 是界). 所以有

$$|T_{ij}(t)|\leqslant\frac{M_3}{\alpha_i^4\beta_j^2},\quad |T_{\bar{N}_kij}(t)|\leqslant\frac{M_3}{\alpha_i^4\beta_j^2},\quad i,j=1,2,\cdots,\quad t\in[0,t_1].$$

由不等式

$$\begin{aligned}|u_{\bar{N}_kx_1^2}-u_{x_1^2}|&\leqslant\left|\sum_{i,j=0}^{k}\alpha_i^2(T_{\bar{N}_kij}-T_{ij})y_iz_j\right|+\left|\sum_{i,j=k+1}^{\infty}\alpha_i^2T_{\bar{N}_kij}y_iz_j\right|+\left|\sum_{i,j=k+1}^{\infty}\alpha_i^2T_{ij}y_iz_j\right|\\&\leqslant\left|\sum_{i,j=0}^{k}\alpha_i^2(T_{\bar{N}_kij}-T_{ij})y_iz_j)\right|+C_{22}\sum_{i,j=k+1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i^2\beta_j^2}\end{aligned}$$

推出, 当 $\bar{N}_k\to\infty$ 时, 在 Q_{t_1} 上 $u_{\bar{N}_kx_1^2}\to u_{x_1^2}$ 是一致的. 应用同样的方法, 可以证明在 Q_{t_1} 上一致地 $u_{\bar{N}_kx_2^2}\to u_{x_2^2}$, $u_{\bar{N}_kx_1x_2}\to u_{x_1x_2}$, $u_{\bar{N}_kx_1t}\to u_{x_1t}$, $u_{\bar{N}_kx_2t}\to u_{x_2t}$, $u_{\bar{N}_kx_1^2t}\to u_{x_1^2t}$, $u_{\bar{N}_kx_2^2t}\to u_{x_2^2t}$ 和 $u_{\bar{N}_kx_1x_2t}\to u_{x_1x_2t}$.

类似地, 方程组 (3.9.7) 两端乘以 $(\alpha_i^{10}+\alpha_i^2\beta_j^8+\alpha_i^4\beta_j^6+\alpha_i^6\beta_j^4+\alpha_i^8\beta_j^2+\beta_j^{10})\ddot{T}_{\bar{N}ij}$, 乘积对 $i,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和有

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=0}^{\bar{N}}\left(\sum_{\substack{l+k=10\\l,k=0,2,4,6,8,10}}\alpha_i^l\beta_j^k+\sum_{\substack{l+k=12\\l,k=0,2,4,6,8,10,12}}\alpha_i^l\beta_j^k\right)\ddot{T}_{\bar{N}ij}^2\\&\leqslant C_{23}\left(\sum_{i,j=0}^{\bar{N}}\sum_{\substack{l+k=12\\l,k=0,2,4,6,8,10,12}}\alpha_i^l\beta_j^k\right)T_{\bar{N}ij}^2+\|u_{\bar{N}}\|_{H^6(\Omega)}^2\leqslant C_{24},\quad t\in[0,t_1].\end{aligned}\tag{3.9.38}$$

由不等式 (3.9.38) 推出级数 $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^8\beta_j^4\ddot{T}_{ij}^2,\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^4\beta_j^8\ddot{T}_{ij}^2$ 和 $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_i^6\beta_j^6\ddot{T}_{ij}^2$ 在 $[0,t_1]$ 上收敛且有界. 因此

$$|\ddot{T}_{ij}(t)|\leqslant\frac{M_4}{\alpha_i^4\beta_j^2},\quad |\ddot{T}_{\bar{N}_kij}(t)|\leqslant\frac{M_4}{\alpha_i^4\beta_j^2},\quad i,j=1,2,\cdots,\quad t\in[0,t_1].$$

利用上面的方法, 可以证明, 当 $\bar{N}_k\to\infty$ 时, 在 Q_{t_1} 上一致地 $u_{\bar{N}_kx_1^2t^2}\to u_{x_1^2t^2}$. 同样可证当 $\bar{N}_k\to\infty$ 时, 在 Q_{t_1} 上一致地 $u_{\bar{N}_kx_2^2t^2}\to u_{x_2^2t^2}$, $u_{\bar{N}_kt^2}\to u_{t^2}$.

因此, 如果由式 (3.9.1) 定义的算子应用到 $u(x,t)=\sum_{i,j=0}^{\infty}T_{ij}(t)y_i(x_1)z_j(x_2)$ 上, 结果一定是一连续函数, 记为 $F(x,t)$. 因为对于所有的 i,j, $(F(x,t),y_i(x_1)z_j(x_2))$ 正是无穷方程组 (3.9.5) 的左端, 所以只需证明 $F(x,t)\equiv0$. 于是

$$(F(x,t),y_i(x_1)z_j(x_2))\equiv0.$$

注意到 $\{y_i(x_1)z_j(x_2), i,j = 0,1,\cdots\}$ 是一标准正交基, 所以 $F(x,t) \equiv 0$. 因而 $u(x,t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} T_{ij}(t)y_i(x_1)z_j(x_2)$ 是周期边值问题 (3.9.1), (3.9.2) 的古典解.

□

定理 3.9.3 设 $g \in C^3(\mathbb{R}), f \in C^2(\mathbb{R}), G \in C^1(\mathbb{R})$ 和 $\varphi(x), \widetilde{\varphi}(x), \psi(x), \widetilde{\psi}(x) \in H^6(\Omega)$. 令 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 分别是对应于 $\varphi(x), \psi(x)$ 和 $\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{\psi}(x)$ 的周期边值问题 (3.9.1), (3.9.2) 在 Q_{t_1} 上的两个不同的古典解. 于是对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得如果 $\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_{H^2(\Omega)} + \|\psi - \widetilde{\psi}\|_{H^2(\Omega)} < \delta$, 则有

$$\|u-v\|_{H^2(\Omega)} + \|u_t - v_t\|_{H^2(\Omega)} + \|u_{tt} - v_{tt}\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

证明 令 $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. $w(x,t)$ 满足周期边值问题

$$w_{tt} - \nabla^2 w_{tt} - \nabla^2 w = \nabla^2(g(u) - g(v)) + \overline{\nabla}(f(\nabla u) - f(\nabla v)) + G(u) - G(v), \tag{3.9.39}$$

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = w(x + 2De_i, t), \quad i = 1,2, \\
&w(x,0) = \varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x), \\
&w_t(x,0) = \psi(x) - \widetilde{\psi}(x).
\end{aligned} \tag{3.9.40}$$

方程 (3.9.39) 两端乘以 w_t, 在 $\Omega \times [0,t_1]$ 上积分, 分部积分所得方程两端各加一项 $\int_0^{t_1}\int_\Omega ww_t dxdt$, 并利用 Cauchy 不等式, 易得

$$\begin{aligned}
&\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_2}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_1t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_2t}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
= &-2\int_0^{t_1}\int_\Omega \Big\{ [g''(u + \theta_1(v-u))u_{x_1}w + g'(v)w_{x_1}]w_{x_1t} \\
&+ [g''(u + \theta_2(v-u))u_{x_2}w + g'(v)w_{x_2}]w_{x_2t} \\
&+ \Big[\frac{\partial f}{\partial u_{\bar{N}x_1}}(u_{x_1} + \theta_3(v_{x_1} - u_{x_1}), u_{x_2})w_{x_1} \\
&+ \frac{\partial f}{\partial u_{x_2}}(v_{x_1}, u_{x_2} + \theta_4(v_{x_2} - u_{x_2}))w_{x_2}\Big](w_{x_1t} + w_{x_2t})\Big\} dxdt \\
&+ 2\int_0^{t_1}\int_\Omega G'(u + \theta_5(v-u))ww_t dxdt \\
&+ 2\int_0^{t_1}\int_\Omega ww_t dxdt + \|\varphi - \widetilde{\varphi}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\psi - \widetilde{\psi}\|^2_{H^1(\Omega)} \\
\leqslant &\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\psi - \widetilde{\psi}\|^2_{H^1(\Omega)} + C_{25}\int_0^{t_1}\{\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_2}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_1t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_2t}\|^2_{L^2(\Omega)}\}dt,
\end{aligned} \tag{3.9.41}$$

其中 $0 < \theta_i < 1, i = 1,2,3,4,5$. 由 Gronwall 不等式给出

$$\|w\|^2_{H^1(\Omega)} + \|w_t\|^2_{H^2(\Omega)} \leqslant C_{26}(\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\psi - \widetilde{\psi}\|^2_{H^1(\Omega)}), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{3.9.42}$$

方程 (3.9.39) 两端同乘以 $(w_{x_1^2t} + w_{x_2^2t})$, 在 $\Omega \times [0, t_1]$ 上积分, 分部积分后, 利用 Cauchy 不等式, 式 (3.9.42) 和 Gronwall 不等式, 易知

$$\begin{aligned}&\|w_{x_1^2t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_2^2t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_1x_2t}\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\quad + \|w_{x_1^2}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_2^2}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_{x_1x_2}\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant C_{27}(\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|^2_{H^2(\Omega)} + \|\psi - \widetilde{\psi}\|^2_{H^2(\Omega)}), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1.\end{aligned} \tag{3.9.43}$$

方程 (3.9.39) 两端同乘以 w_{tt}, 并在 Ω 是积分, 有

$$\|w_{tt}\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_{28}(\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|^2_{H_2(\Omega)} + \|\psi - \widetilde{\psi}\|^2_{H_2(\Omega)}), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{3.9.44}$$

由式 (3.9.42)–(3.9.44) 导出定理 3.9.3 的结论是正确的. □

推论 3.9.3 在定理 3.9.3 的条件下, 周期边值问题 (3.9.1), (3.9.2) 在 Q_{t_1} 上的解在广义意义下是唯一的.

3.9.3 Cauchy 问题 (3.9.1), (3.9.3)

现在考虑 Cauchy 问题 (3.9.1), (3.9.3).

定理 3.9.4 在引理 3.9.1 的条件下, 若 $\varphi(x), \psi(x) \in H^6(\mathbb{R}^2)$, 则 Cauchy 问题 (3.9.1), (3.9.3) 在 $[0, t_2] \times \mathbb{R}^2$ 上存在唯一古典解 $u(x,t)$, 其中 $0 < t_2 < t_{\overline{b}}$,

$$\begin{aligned}\overline{b} = &\|\psi\|^2 + \|\psi_{x_1}\|^2 + \|\psi_{x_2}\|^2 + \sum_{\substack{i+j=4\\ i,j=0,1,2,3,4}} \|\psi_{x_1^ix_2^j}\|^2 + 2\sum_{\substack{i+j=5\\ i,j=1,2,3,4}} \|\psi_{x_1^ix_2^j}\|^2\\&+ \|\psi_{x_1^5}\|^2 + \|\psi_{x_2^5}\|^2 + \|\varphi\|^2 + \|\varphi_{x_1}\|^2 + \|\varphi_{x_2}\|^2\\&+ 2\sum_{\substack{i+j=5\\ i,j=1,2,3,4}} \|\varphi_{x_1^ix_2^j}\|^2 + \|\varphi_{x_1^5}\|^2 + \|\varphi_{x_2^5}\|^2 + 1,\end{aligned}$$

$$t_{\overline{b}} = 2 \Big/ \left[K_{11}(m_3 + m_4 + 7)\overline{b}^{(m_3+m_4+7)/2}\right].$$

证明 取实数序列 $\{D_s\}$ $(D_s > 1)$, 使得当 $s \to \infty$ 时, $D_s \to \infty$. 对于每一个 s 构造具有 $2D_s$ 周期的周期函数 φ_s 和 ψ_s, 使得

(i) $\varphi_s, \psi_s \in H^6(\Omega_s)$, 其中 $\overline{\Omega}_s = \{x \in (x_1, x_2) | \, |x_i| \leqslant D_s, i = 1, 2\}$;

(ii) 当 $x \in [-(D_s-1), D_s-1] \times [-(D_s-1), D_s-1] = \widetilde{\Omega}_s$ 时, $\varphi_s = \varphi(x), \psi_s = \psi(x)$, 则

$$\begin{aligned}&\|\varphi_{sx_j^i}\|_{L^2(\widetilde{\Omega}_s)} \leqslant \|\varphi_{x_j^i}\| \qquad (i = 0,1,2,3,4,5, j = 1,2);\\&\|\varphi_{sx_1x_2^i}\|_{L^2(\widetilde{\Omega}_s)} \leqslant \|\varphi_{x_1x_2^i}\| \quad (i = 1,2,3,4);\\&\|\varphi_{sx_1^ix_2}\|_{L^2(\widetilde{\Omega}_s)} \leqslant \|\varphi_{x_1^ix_2}\| \quad (i = 2,3,4);\\&\|\varphi_{sx_1^ix_2^j}\|_{L^2(\widetilde{\Omega}_s)} \leqslant \|\varphi_{x_1^ix_2^j}\| \quad (i = j = 2 \text{ 或 } i + j = 5, j = 2,3);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|\psi_{sx_j^i}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_s)} \leqslant \|\psi_{x_j^i}\| \qquad (i=0,1,2,3,4,5,j=1,2);\\
&\|\psi_{sx_1x_2^i}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_s)} \leqslant \|\psi_{x_1x_2^i}\| \quad (i=1,2,3,4);\\
&\|\psi_{sx_1^ix_2}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_s)} \leqslant \|\psi_{x_1^ix_2}\| \quad (i=2,3,4);\\
&\|\psi_{sx_1^ix_2^j}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_s)} \leqslant \|\psi_{x_1^ix_2^j}\| \quad (i=j=2 \text{ 或 } i+j=5, j=2,3).
\end{aligned}$$

考虑下列周期边值问题

$$u_{tt}-\nabla^2u_{tt}-\nabla^2u-\nabla^2g(u)-\overline{\nabla}f(\nabla u)-G(u)=0, \tag{3.9.45}$$

$$\begin{aligned}
&u(x,t)=u(x+2D_se_i,t), \quad i=1,2,\\
&u(x,0)=\varphi_s(x), \quad u_t(x,0)=\psi_s(x).
\end{aligned} \tag{3.9.46}$$

令 $\{y_i(x_1)\}$ 是由下列常微分方程边值问题

$$y''+\lambda y=0, \quad y(x_1)=y(x_1+2D_s)$$

对应的特征值 $\lambda_{1i}=\alpha_i^2=(i\pi/D_s)^2$ $(i=0,1,\cdots)$ 的特征函数构成的标准正交基, 而 $\{z_j(x_2)\}$ 是由下列常微分方程边值问题

$$z''+\lambda z=0, \quad z(x_2)=z(x_2+2D_s)$$

对应的特征值 $\lambda_{2j}=\beta_j^2=(j\pi/D_s)^2$ $(j=0,1,\cdots)$ 的特征函数构成的标准正交基. 根据引理 1.8.11, 函数系 $\{y_i(x_1)z_j(x_2), i,j=0,1,\cdots\}$ 构成 $L_2(\overline{\Omega}_s)$ 中的一标准正交基.

设周期边值问题 (3.9.45), (3.9.46) 的近似解为

$$u_{\bar{N}_s}(x,t)=\sum_{i,j=0}^{\bar{N}_s}T_{\bar{N}_sij}(t)y_i(x_1)z_j(x_2),$$

其中 $T_{\bar{N}_sij}(t)$ 是待定系数. 此系数应满足 Cauchy 问题

$$(u_{\bar{N}_stt}-\nabla^2u_{\bar{N}_stt}-\nabla^2u_{\bar{N}_s}-[\nabla^2g(u_{\bar{N}_s})+\overline{\nabla}f(\nabla u_{\bar{N}_s})+G(u_{\bar{N}_s})],y_iz_j)=0, \tag{3.9.47}$$

$$T_{\bar{N}_sij}(0)=(\varphi_s,y_iz_j), \quad \dot{T}_{\bar{N}_sij}(0)=(\psi_s,y_iz_j), \quad i,j=0,1,\cdots,\bar{N}_s. \tag{3.9.48}$$

令

$$\begin{aligned}
E_{\bar{N}_s}(t)=\sum_{i,j=0}^{\bar{N}_s}\Bigg[&\Bigg(1+\alpha_i^2+\beta_j^2+\sum_{\substack{k+l=8\\k,l=0,2,4,6,8}}\alpha_i^k\beta_j^l+2\sum_{\substack{k+l=10\\k,l=2,4,6,8}}\alpha_i^k\beta_j^l+\alpha_i^{10}+\beta_j^{10}\Bigg)\dot{T}_{\bar{N}_sij}^2\\
&+\Bigg(1+\alpha_i^2+\beta_j^2+2\sum_{\substack{k+l=8\\k,l=2,4,6,8}}\alpha_i^k\beta_j^l+\alpha_i^{10}+\beta_j^{10}\Bigg)T_{\bar{N}_sij}^2\Bigg]+1.
\end{aligned}$$

从而推出, 对于任意的 $s, \lim_{\bar{N}_s\to 0} E_{\bar{N}_s}(0) = b_s < \bar{b}$, 所以 $t_{\bar{b}} \leqslant t_{b_s}$. 利用获得上述估计 (3.9.37), (3.9.38) 的同样方法和嵌入定理可得

$$\|u_{\bar{N}_s}\|_{H^6(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|_{H^6(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s tt}\|_{H^6(\overline{\Omega}_s)} \leqslant C_{29}, \quad t\in[0,t_{\bar{b}}], \tag{3.9.49}$$

$$\|u_{\bar{N}_s}\|_{C^{4,\lambda}(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|_{C^{4,\lambda}(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s tt}\|_{C^{4,\lambda}(\overline{\Omega}_s)} \leqslant C_{30}, \quad t\in[0,t_{\bar{b}}], \tag{3.9.50}$$

其中 $0<\lambda<1$ 和 C_{30} 是不依赖于 $\bar{N}_s$ 和 D_s 的常数. 为了得到 Cauchy 问题 (3.9.1), (3.9.3) 的解, 需要不依赖于 $\bar{N}_s$ 和 D_s 的估计 $\|u_{\bar{N}_s t^3}\|_{H^4(\overline{\Omega}_s)}$.

式 (3.9.47) 对 t 求导, 所得方程两端乘以 $\alpha_i^6 \dddot{T}_{\bar{N}_s ij}(t)$, 乘积对 $i,j=0,1,2,\cdots,\bar{N}_s$ 求和, 并分部积分得

$$\begin{aligned}
&(u_{\bar{N}_s x_1^3 t^3}, u_{\bar{N}_s x_1^3 t^3}) + (u_{\bar{N}_s x_1^4 t^3}, u_{\bar{N}_s x_1^4 t^3}) + (u_{\bar{N}_s x_2 x_1^3 t^3}, u_{\bar{N}_s x_2 x_1^3 t^3})\\
=&-(u_{\bar{N}_s x_1^4 t}, u_{\bar{N}_s x_1^4 t^3}) - (u_{\bar{N}_s x_2 x_1^3 t}, u_{\bar{N}_s x_2 x_1^3 t^3})\\
&-\left(\left(\nabla^2(g(u_{\bar{N}_s}))_{x_1^2 t} + (\overline{\nabla} f(\nabla u_{\bar{N}_s}))_{x_1^2 t} + G(u_{\bar{N}_s})\right)_{x_1^2 t}, u_{\bar{N}_s x_1^4 t^3}\right).
\end{aligned} \tag{3.9.51}$$

根据引理 3.9.6 有

$$\begin{aligned}
&\|u_{\bar{N}_s x_1^3 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s x_1^4 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s x_1^3 x_2 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)}\\
\leqslant\ & C_{31}(\|u_{\bar{N}_s}\|^2_{H^4(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|^2_{H^4(\overline{\Omega}_s)}), \quad t\in[0,t_{\bar{b}}].
\end{aligned} \tag{3.9.52}$$

类似地可知

$$\begin{aligned}
&\|u_{\bar{N}_s x_2^3 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s x_2^4 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s x_1 x_2^3 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)}\\
\leqslant\ & C_{32}(\|u_{\bar{N}_s}\|^2_{H^4(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|^2_{H^4(\overline{\Omega}_s)}), \quad t\in[0,t_{\bar{b}}],
\end{aligned} \tag{3.9.53}$$

$$\begin{aligned}
&\|u_{\bar{N}_s x_1 x_2^2 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s x_1^2 x_2^3 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s x_1 x_2^3 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)}\\
\leqslant\ & C_{33}(\|u_{\bar{N}_s}\|^2_{H^4(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|^2_{H^4(\overline{\Omega}_s)}), \quad t\in[0,t_{\bar{b}}],
\end{aligned} \tag{3.9.54}$$

$$\begin{aligned}
&\|u_{\bar{N}_s t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s x_1 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s x_2 t^3}\|^2_{L^2(\overline{\Omega}_s)}\\
\leqslant\ & C_{34}(\|u_{\bar{N}_s}\|^2_{H^4(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|^2_{H^2(\overline{\Omega}_s)}), \quad t\in[0,t_{\bar{b}}],
\end{aligned} \tag{3.9.55}$$

因此

$$\|u_{\bar{N}_s t^3}\|_{H^4(\overline{\Omega}_s)} \leqslant C_{35}, \quad t\in[0,t_{\bar{b}}], \tag{3.9.56}$$

$$\|u_{\bar{N}_s t^3}\|_{C^{2,\lambda}(\overline{\Omega}_s)} \leqslant C_{36}, \quad t\in[0,t_{\bar{b}}], \tag{3.9.57}$$

其中 $0\leqslant\lambda<1$ 和常数 C_{35}, C_{36} 不依赖于 $\bar{N}_s$ 和 D_s. 根据式 (3.9.50), (3.9.57) 和 Ascoli-Arzelá 定理, 可以从 $\{u_{\bar{N}_s}(x,t)\}$ 中选出一子序列, 仍记为 $\{u_{\bar{N}_s}(x,t)\}$, 所以当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, 子序列 $\{u_{\bar{N}_s x_1^k t_j}\}$ $(k,j=0,1,2)$, $\{u_{\bar{N}_s x_2^k t^j}\}(k,j=0,1,2)$ 和

$\{u_{\bar{N}_s x_1 x_2 t^j}\}(j=0,1,2)$ 在 $t\in[0,t_{\bar{b}}]\times\overline{\Omega}_s$ 上分别一致收敛于极限函数 $u_{x_1^k t^j}(k,j=0,1,2), u_{x_2^k t^j}(k,j=0,1,2)$ 和 $u_{x_1x_2t^j}(j=0,1,2)$.

估计 (3.9.49) 和 (3.9.56) 对于上述子序列 $\{u_{\bar{N}_s}\}$ 仍成立. 由估计 (3.9.49) 和 (3.9.56) 知

$$\begin{aligned}
&u_{\bar{N}_s x_1^i x_2^j t^k}\in L^\infty([0,t_{\bar{b}}];L^2(\overline{\Omega}_s)),\quad i,j=1,2,\cdots,5,\quad i+j=6,\quad k=0,1,2;\\
&u_{\bar{N}_s x_k^6 t^i}\in L^\infty([0,t_{\bar{b}}];L^2(\overline{\Omega}_s)),\quad i=0,1,2,\quad k=1,2;\\
&u_{\bar{N}_s x_1^i x_2^j t^3}\in L^\infty([0,t_{\bar{b}}];L^2(\overline{\Omega}_s)),\quad i,j=1,2,3,\quad i+j=4;\\
&u_{\bar{N}_s x_i^4 t^3}\in L^\infty([0,t_{\bar{b}}];L^2(\overline{\Omega}_s)),\quad i=1,2.
\end{aligned}$$

因此可以从 $\{u_{\bar{N}_s}(x,t)\}$ 中选出一个子序列, 仍记为 $\{u_{\bar{N}_s}(x,t)\}$, 使得当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, 子序列 $\{u_{\bar{N}_s x_1^i x_2^j t^k}\}(i,j=1,2,\cdots,5,i+j=6;k=0,1,2)$ 和 $\{u_{\bar{N}_s x_k^6 t^i}\}(i=0,1,2,k=1,2)$ 在 $L^\infty([0,t_{\bar{b}}];L^2(\overline{\Omega})_s))$ 中分别弱 * 收敛于极限函数 $\{u_{sx_1^i x_2^j t^k}\}(i,j=1,2,\cdots,5,i+j=6;k=0,1,2)$ 和 $\{u_{sx_k^6 t^i}\}(i=0,1,2;k=1,2)$, 以及当 $N_s\to\infty$ 时, 子序列 $\{u_{\bar{N}_s x_1^i x_2^j t^3}\}(i,j=1,2,3;i+j=4)$ 和 $\{u_{\bar{N}_s x_i^4 t^3}\}(i=1,2)$ 在 $L^\infty([0,t_{\bar{b}}];L^2(\overline{\Omega}_s))$ 中分别弱 * 收敛于极限函数 $\{u_{sx_1^i x_2^j t^3}\}(i,j=1,2,3,i+j=4)$ 和 $\{u_{sx_i^4 t^3}\}(i=1,2)$. 从文献 [241] 的共鸣定理的推论知, 估计 (3.9.49) 和 (3.9.56) 对于 u_s 仍成立. u_s 是 Cauchy 问题 (3.9.1), (3.9.3) 的古典解. 应用 Ascoli-Arzelá 定理可以从 $\{u_s\}$ 中选出一子序列, 仍记为 $\{u_s\}$, 使得当 $s\to\infty$ 时, 子序列 $\{u_{sx_i^k t^j}\}(k,j=0,1,2;i=1,2\}$ 和 $\{u_{sx_1x_2t^j}\}(j=0,1,2)$ 在任意区域 $\{-L\leqslant x_1,x_2\leqslant L,0\leqslant t\leqslant t_{\bar{b}}\}$ 上分别一致收敛于极限函数 $u_{x_i^k t^j}(k,j=0,1,2,i=1,2)$ 和 $u_{x_1x_2t^j}(j=0,1,2)$. 得到的极限函数正是 Cauchy 问题 (3.9.1), (3.9.3) 的解.

显然, Cauchy 问题 (3.9.1), (3.9.3) 的古典解是唯一的. □

3.9.4 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [236], 与本节有关的文献见 [32], [153], [237], [241].

3.10 广义立方双色散方程的周期边值问题和 Cauchy 问题

3.10.1 引言

3.7 节讨论了广义立方双色散方程的 Cauchy 问题, 证明了此 Cauchy 问题存在唯一的整体广义解和整体古典解, 并给出解爆破的充分条件. 本节应用不同于 3.7 节所采用的方法继续研究广义立方双色散方程的 Cauchy 问题.

本节研究下列广义立方双色散方程 Cauchy 问题

$$u_{tt}-u_{xx}-au_{xxtt}+bu_{x^4}-du_{xxt}=f(u)_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\tag{3.10.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R},\tag{3.10.2}$$

其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, $a>0, b>0$ 和 d 是常数, $f(s)$ 是一给定的非线性函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的已知初值函数.

为了证明 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 存在唯一整体广义解和整体古典解, 并给出解爆破的充分条件, 我们将考虑下列辅助问题

$$v_{tt}-v_{xx}-av_{xxtt}+bv_{x^4}-dv_{xxt}=f(v_x)_x,\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\tag{3.10.3}$$

$$v(x,0)=\phi(x),\quad v_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}.\tag{3.10.4}$$

下面首先应用 Galerkin 方法证明辅助方程 (3.10.3) 的周期边值问题存在唯一整体广义解和唯一整体古典解. 其次, 建立方程 (3.10.3) 的周期边值问题序列. 因为每一周期边值问题有光滑整体广义解和光滑古典解, 我们可以应用方程 (3.10.3) 的周期边值问题序列证明 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 存在唯一的整体光滑广义解和整体光滑古典解. 于是通过 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 应用变换 $v_x(x,t)=u(x,t)$, $\phi_x(x)=u_0(x)$ 和 $\psi_x(x)=u_1(x)$ 可以得到 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 唯一整体广义解和唯一整体古典解. 最后, 通过 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 应用变换 $u(x,t)=v_x(x,t)$, $u_0(x)=\phi_x(x)$ 和 $u_1(x)=\psi_x(x)$ 给出 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 解爆破的充分条件.

3.10.2　辅助问题 (3.10.3), (3.10.4) 的周期边值问题

为了得到 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 整体广义解和整体古典解, 首先在 $\overline{Q}_T$ 上讨论下列周期边值问题

$$v_{tt}-v_{xx}-av_{xxtt}+bv_{x^4}-dv_{xxt}=f(v_x)_x,\tag{3.10.5}$$

$$v_x(x+2D,t)=v_x(x,t),\tag{3.10.6}$$

$$v(x,0)=\phi(x),\quad v_t(x,0)=\psi(x),\tag{3.10.7}$$

其中 $\overline{Q}_T=\overline{\Omega}\times[0,T]$, $\overline{\Omega}=[-D,D]$, $D>0$, $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 上的给定函数, 且满足周期边值条件 (3.10.6).

令 $\{y_n(x)\}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2D}},\dfrac{1}{\sqrt{D}}\cos\delta_n x,\dfrac{1}{\sqrt{D}}\sin\delta_n x, n=1,2,\cdots\right\}$ 是由特征值问题

$$y''+\lambda y=0,\quad x\in\Omega,$$

$$y_x(x+2D)=y_x(x)$$

的特征值 $\lambda_i = \delta_i^2 = \left(\dfrac{i\pi}{D}\right)^2$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 对应的特征函数构成的 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基. 再令

$$v_{N_0}(x,t) = \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_{N_0 i}(t) y_i(x)$$

是周期边值问题 (3.10.5)–(3.10.7) 的 Galerkin 近似解, 其中 $\alpha_{N_0 i}(t)$ 是待定的函数, N_0 是自然数. 设初值函数 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可以表示为

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i y_i(x), \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i y_i(x),$$

其中 β_i, γ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 是常数. 将近似解 $v_{N_0}(x,t)$ 和初值函数的近似

$$\phi_{N_0}(x) = \sum_{i=1}^{N_0} \beta_i y_i(x), \quad \psi_{N_0}(x) = \sum_{i=1}^{N_0} \gamma_i y_i(x)$$

代入周期边值问题 (3.10.5)–(3.10.7), 得到 $v_{N_0}(x,t)$ 满足下面初边值问题

$$v_{N_0tt} - v_{N_0xx} - a v_{N_0xxtt} + b v_{N_0x^4} - d v_{N_0xxt} = f(v_{N_0x})_x, \tag{3.10.8}$$

$$v_{N_0x}(x + 2D, t) = v_{N_0x}(x,t), \tag{3.10.9}$$

$$v_{N_0}(x,0) = \phi_{N_0}(x), \quad v_{N_0t}(x,0) = \psi_{N_0}(x). \tag{3.10.10}$$

方程 (3.10.8) 和初值 (3.10.10) 两端同乘以 $y_s(x)$, 对 $s = 1, 2, \cdots, N_0$ 求和, 并在 Ω 上积分, 有

$$(v_{N_0tt} - v_{N_0xx} - a v_{N_0xxtt} + b v_{N_0x^4} - d v_{N_0xxt}, y_s) = (f(v_{N_0x})_x, y_s), \tag{3.10.11}$$

$$\alpha_{N_0s}(0) = \beta_s, \quad \alpha_{N_0st}(0) = \gamma_s, \quad s = 1, 2, \cdots, N_0. \tag{3.10.12}$$

引理 3.10.1 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f'(s)$ 下有界, 即存在一个常数 C_0, 使得对于任意的 $s \in \mathbb{R}$, $f'(s) \geqslant C_0$, $\phi \in H^2(\Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)$. 则对任意的 N_0, 常微分方程组的 Cauchy 问题 (3.10.11), (3.10.12) 有整体广义解 $\alpha_{N_0s}(t) \in C^2[0,T]$ $(s = 1, 2, \cdots, N_0)$, 且成立估计

$$\|v_{N_0}(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|v_{N_0t}(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant C_1(T), \quad t \in [0,T], \tag{3.10.13}$$

这里和以后 $C_1(T)$ 和 $C_i(T)(i = 2, 3, \cdots)$ 是依赖于 T, 不依赖于 N_0 和 Ω 的常数.

证明 令 $f_0(s) = f(s) - \gamma s - f(0)$, 其中 $\gamma = \min\{C_0, 0\} (\leqslant 0)$, 则 $f_0(0) = 0$, $f_0'(s) = f'(s) - \gamma \geqslant 0$ 和 $f_0(s)$ 是一单增函数, 则

$$F(s) = \int_0^s f_0(\tau) d\tau \geqslant 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

显然, 方程 (3.10.3) 和方程组 (3.10.11) 分别与下列方程

$$v_{tt}-v_{xx}-av_{xxtt}+bv_{x^4}-dv_{xxt}-\gamma v_{xx}=f_0(v_x)_x \tag{3.10.14}$$

和方程组

$$\begin{aligned}&(v_{N_0tt}-v_{N_0xx}-av_{N_0xxtt}+bv_{N_0x^4}-dv_{N_0xxt}-\gamma v_{N_0xx},y_s)\\=&(f_0(v_{N_0x})_x,y_s),\quad s=1,2,\cdots,N_0\end{aligned} \tag{3.10.15}$$

等价.

方程组 (3.10.15) 两端同乘以 $2\alpha_{N_0st}(t)$, 对 $s=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 两端各加 $2(v_{N_0},v_{N_0t})$, 并进行分部积分, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\|v_{N_0}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_{N_0t}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_{N_0x}\|^2_{L^2(\Omega)}+a\|v_{N_0xt}\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\&\left.+b\|v_{N_0xx}\|^2_{L^2(\Omega)}+2\int_\Omega F(v_{N_0x}(x,t))dx\right\}\\=&2\left(\gamma\int_\Omega v_{N_0xx}v_{N_0t}dx-d\int_\Omega v^2_{N_0xt}dx+\int_\Omega v_{N_0}v_{N_0t}dx\right)\\\leqslant&(|\gamma|+2|d|+1)(\|v_{N_0}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_{N_0t}\|^2_{L^2(\Omega)}\\&+\|v_{N_0xt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_{N_0xx}\|^2_{L^2(\Omega)}),\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.10.16}$$

Gronwall 不等式给出

$$\begin{aligned}&\|v_{N_0}\|^2_{H^2(\Omega)}+\|v_{N_0t}\|^2_{H^1(\Omega)}+\int_\Omega F(v_{N_0x}(x,t))dx\\\leqslant&e^{C_2(|\gamma|+2|d|+1)T}\left(\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)}+\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)}+\int_\Omega F(\phi_x(x))dx+1\right),\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.10.17}$$

由式 (3.10.17) 知, 估计 (3.10,13) 成立.

类似于 2.5 节, 应用Leray–Schauder不动点定理可以证明Cauchy问题 (3.10.11), (3.10.12) 有解 $\alpha_{N_0s}(t)\in C^2[0,T]$ $(s=1,2,\cdots,N_0)$. □

引理 3.10.2 设引理 3.10.1 的条件成立. 又设 $k\geqslant 0$ 是一自然数. 如果 $f\in C^{k+1}(\mathbb{R})$, $\phi\in C^{k+2}(\Omega)$ 和 $\psi\in C^{k+1}(\Omega)$, 则有估计

$$\|v_{N_0}\|^2_{H^{k+2}(\Omega)}+\|v_{N_0t}\|^2_{H^{k+1}(\Omega)}\leqslant C_3(T),\quad t\in[0,T] \tag{3.10.18}$$

和

$$\|v_{N_0tt}\|^2_{H^{p_1+1}(\Omega)}+\|v_{N_0t^3}\|^2_{H^{p_2+1}(\Omega)}\leqslant C_4(T),\quad t\in[0,T], \tag{3.10.19}$$

其中 $k = 1 + p_1 = 2 + p_2$, $p_1, p_2 \geqslant 0$.

证明 我们应用数学归纳法证明估计 (3.10.18). 估计 (3.10.13) 是估计 (3.10.18) $k = 0$ 时的情况. 设当 $k = n$ 时, 估计 (3.10.18) 成立. 将证, 当 $k = n + 1$ 时, 估计 (3.10.18) 也成立.

方程 (3.10.11) 两端同乘以 $2(-1)^{n+1}\lambda_s^{n+1}\alpha_{N_0st}(t)$, 对 $s = 1, 2, \cdots, N_0$ 求和, 进行分部积分, 应用数学归纳法假定, Sobolev 嵌入定理和 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|v_{N_0x^{n+1}t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_{N_0x^{n+2}}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + a\|v_{N_0x^{n+2}t}\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|v_{N_0x^{n+3}}\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
=& -2d\|v_{N_0x^{n+2}t}\|^2_{L^2(\Omega)} - 2(f(v_{N_0x})_{x^{n+1}}, v_{N_0x^{n+2}t}) \\
\leqslant& C_5(T)(\|v_{N_0x^{n+2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_{N_0x^{n+2}t}\|^2_{L^2(\Omega)}) + C_6(T).
\end{aligned}$$

Gronwall 不等式给出

$$\|v_{N_0}\|^2_{H^{n+3}(\Omega)} + \|v_{N_0t}\|^2_{H^{n+2}(\Omega)} \leqslant C_7(T), \quad t \in [0, T].$$

所以估计 (3.10.18) 成立.

方程 (3.10.11) 两端同乘以 $(-1)^{p_1}\lambda_s^{p_1}\alpha_{N_0stt}(t)$, 对 $s = 1, 2, \cdots, N_0$ 求和, 并进行分部积分, 发现

$$\begin{aligned}
&\|v_{N_0x^{p_1}tt}\|^2_{L^2(\Omega)} + a\|v_{N_0x^{p_1+1}tt}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
=& -(v_{N_0x^{p_1+1}} - bv_{N_0x^{p_1+3}} + dv_{N_0x^{p_1+1}t} + f(v_{N_0x})_{x^{p_1}}, v_{N_0x^{p_1+1}tt}).
\end{aligned} \tag{3.10.20}$$

注意到估计 (3.10.18), 应用 Sobolev 嵌入定理和 Cauchy 不等式, 由式 (3.10.20) 推得

$$\|v_{N_0x^{p_1}tt}\|^2_{L^2(\Omega)} + a\|v_{N_0x^{p_1+1}tt}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_8(T), \quad t \in [0, T]. \tag{3.10.21}$$

式 (3.10.18) 对 t 求导, 两端同乘以 $(-1)^{p_2}\lambda_s^{p_2}\alpha_{N_0sttt}(t)$, 对 $s = 1, 2, \cdots, N_0$ 求和, 并进行分部积分, 断言

$$\begin{aligned}
&\|v_{N_0x^{p_2}t^3}\|^2_{L^2(\Omega)} + a\|v_{N_0x^{p_2+1}t^3}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
=& -(v_{N_0x^{p_2+1}t} - bv_{N_0x^{p_2+3}t} + dv_{N_0x^{p_2+1}t^2} + f(v_{N_0x})_{x^{p_2}t}, v_{N_0x^{p_2+1}t^3}).
\end{aligned} \tag{3.10.22}$$

注意到估计 (3.10.18), (3.10.21), 应用 Sobolev 嵌入定理和 Cauchy 不等式, 由式 (3.10.22) 知

$$\|v_{N_0x^{p_2}t^3}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_{N_0x^{p_2+1}t^3}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_9(T), \quad t \in [0, T]. \tag{3.10.23}$$

由式 (3.10.21) 和式 (3.10.23) 推出估计 (3.10.19). □

定理 3.10.1 在引理 3.10.2 的条件下, 如果 $k \geqslant 2$, 则周期边值问题 (3.10.3), (3.10.4) 存在唯一整体广义解 $v(x,t) \in V(\overline{Q}_T, k \geqslant 2) = \{$当 $k \geqslant 2$ 时, $v(x,t)$ 有连续导数 $v_{x^s t^r}(x,t), 0 \leqslant s+r \leqslant k, r=0,1,2$ 和广义导数 $v_{x^s t^r}(x,t), 0 \leqslant s+r \leqslant k+2, r=0,1,2,3, (x,t) \in \overline{Q}_T\}$. 如果 $k \geqslant 4$, 则周期边值问题 (3.10.3), (3.10.4) 存在唯一整体古典解 $v(x,t) \in V(\overline{Q}_T, k \geqslant 4)$.

证明 由引理 3.10.2 知

$$\begin{aligned}
&v_{N_0 x^s} \in C(\overline{\Omega} \times [0,T]), \quad 0 \leqslant s \leqslant k+1,\\
&v_{N_0 x^s t} \in C(\overline{\Omega} \times [0,T]), \quad 0 \leqslant s \leqslant k,\\
&v_{N_0 x^s tt} \in C(\overline{\Omega} \times [0,T]), \quad 0 \leqslant s \leqslant k-1 = p_1,\\
&v_{N_0 x^s t^3} \in C(\overline{\Omega} \times [0,T]), \quad 0 \leqslant s \leqslant k-2 = p_2.
\end{aligned}$$

如果 $k=2$, 我们可以从序列 $\{v_{N_0}(x,t)\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{v_{N_0}(x,t)\}$, 使得存在一函数 $v(x,t)$, 且当 $N_0 \to \infty$ 时, 子序列 $\{v_{N_0}(x,t)\}$ 在 $\overline{Q}_T$ 上一致收敛于极限函数 $v(x,t)$. 对应的子序列 $\{v_{N_0 x^s}(x,t)\}(s=1,2)$, $\{v_{N_0 x^s t}(x,t)\}(s=0,1)$ 和 $\{v_{N_0 tt}(x,t)\}$ 在 $\bar{Q}_T$ 上分别一致收敛于 $v_{x^s}(x,t)(s=1,2)$, $v_{x^s t}(x,t)(s=0,1)$ 和 $v_{tt}(x,t)$. 由估计 (3.10.18), (3.10.19) 知, 子序列 $\{v_{N_0 x^s}(x,t)\}(0 \leqslant s \leqslant 4)$, $\{v_{N_0 x^s t}(x,t)\}$ $(0 \leqslant s \leqslant 3)$, $\{v_{N_0 x^s tt}(x,t)\}(0 \leqslant s \leqslant 2)$ 和 $\{v_{N_0 x^s t^3}(x,t)\}(0 \leqslant s \leqslant 1)$ 在 $L^2(Q_T)$ 中分别弱收敛于 $v_{x^s}(x,t)\,(0 \leqslant s \leqslant 4)$, $v_{x^s t}(x,t)\,(0 \leqslant s \leqslant 3)$, $v_{x^s tt}(x,t)\,(0 \leqslant s \leqslant 2)$ 和 $v_{x^s t^3}(x,t)\,(0 \leqslant s \leqslant 1)$. 所以, 当 $k \geqslant 2$ 时, 周期边值问题 (3.10.3), (3.10.4) 存在整体广义解 $v(x,t)$, 且此解有定理 3.10.1 中所述的正则性.

类似地, 可以证明, 当 $k \geqslant 4$ 时, 周期边值问题 (3.10.5)–(3.10.7) 有整体古典解 $v(x,t)$, 且 $v(x,t)$ 有如定理 3.10.1 中所述的正则性. 易证周期边值问题 (3.10.5)–(3.10.7) 解的唯一性.

3.10.3 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4)

定理 3.10.2 设 $f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, $f'(s)$ 下有界, $\phi \in H^{k+2}$, $\psi \in H^{k+1}$. 如果 $k \geqslant 2$ $(k=1+p_1=2+p_2,\ p_1,p_2 \geqslant 0)$, 则 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 存在唯一整体广义解 $v(x,t) \in V([0,T] \times \mathbb{R}, k \geqslant 2)$. 如果 $k \geqslant 4$, 则 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 存在唯一整体的古典解 $v(x,t) \in V([0,T] \times \mathbb{R}, k \geqslant 4)$.

证明 取一实数序列 $\{D_s\}(D_s > 1)$, 使得当 $s \to \infty$ 时, $D_s \to \infty$. 对每一个 s, 构造具有周期为 $2D_s$ 的周期函数 $\phi_s(x)$ 和 $\psi_s(x)$, 使得

(i) $\phi_s \in H^{k+2}[-D_s, D_s], \psi_s \in H^{k+1}[-D_s, D_s]$;

(ii) 对于 $x \in [-(D_s-1), D_s-1], \phi_s(x)=\phi(x), \psi_s(x)=\psi(x)$ 和

$$\|\phi_{sx^i}\|_{L^2[-D_s,D_s]} \leqslant \|\phi_{x^i}\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad i=0,1,\cdots,k+2,$$
$$\|\psi_{sx^i}\|_{L^2[-D_s,D_s]} \leqslant \|\psi_{x^i}\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad i=0,1,\cdots,k+1.$$

我们考虑下列周期边值问题

$$v_{tt}-v_{xx}-av_{xxtt}+bv_{x^4}-dv_{xxt}=f(v_x)_x, \tag{3.10.24}$$
$$v_x(x,t)=v_x(x+2D_s,t), \tag{3.10.25}$$
$$v(x,0)=\phi_s(x), \quad v_t(x,0)=\psi_s(x). \tag{3.10.26}$$

令 $\{y_n(x)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2D_s}}, \frac{1}{\sqrt{D_s}}\cos\delta_n x, \frac{1}{\sqrt{D_s}}\sin\delta_n x, n=1,2,\cdots\right\}$ 是由特征值问题

$$y''+\lambda y=0, \quad x\in\Omega_s,$$
$$y_x(x+2D_s)=y_x(x)$$

的特征值 $\lambda_i=\delta_i^2=\left(\frac{i\pi}{D_s}\right)^2$ $(i=1,2,\cdots)$ 对应的特征函数构成的 $L^2(\Omega_s)$ $(\Omega_s=(-D_s,D_s))$ 中的一标准正交基.

假定周期边值问题 (3.10.24)–(3.10.26) 的 Galerkin 近似解是

$$v_{N_s}(x,t)=\sum_{i=1}^{N_s}\alpha_{N_s i}(t)y_i(x),$$

其中 $\alpha_{N_s i}(t)$ 是待定系数. 令 $v_{N_s}(x,t)$ 满足下列周期边值问题

$$v_{N_s tt}-v_{N_s xx}-av_{N_s xxtt}+bv_{N_s x^4}-dv_{N_s xxt}=f(v_{N_s x})_x, \tag{3.10.27}$$
$$v_{N_s x}(x,t)=v_{N_s x}(x+2D_s,t), \tag{3.10.28}$$
$$v_{N_s}(x,0)=\phi_s(x), \quad v_{N_s t}(x,0)=\psi_s(x). \tag{3.10.29}$$

类似于上面得到估计 (3.10.18), (3.10.19) 的同样方法可得估计

$$\begin{aligned}&\|v_{N_s}\|_{H^{k+2}(\Omega_s)}+\|v_{N_s t}\|_{H^{k+1}(\Omega_s)}+\|v_{N_s tt}\|_{H^{p_1+1}(\Omega_s)}\\&+\|v_{N_s t^3}\|_{H^{p_2+1}(\Omega_s)}\leqslant C_{10}(T), \quad t\in[0,T],\end{aligned} \tag{3.10.30}$$

这里和以后 $C_{10}(T)$ 和 $C_i(T)(i=11,12,\cdots)$ 是不依赖于 N_s 和 D_s 的常数.

根据 Sobolev 嵌入定理, 当 $k=2$ 时, 得

$$\begin{aligned}&\|v_{N_s}\|_{H^4(\Omega_s)}+\|v_{N_st}\|_{H^3(\Omega_s)}+\|v_{N_stt}\|_{H^2(\Omega_s)}\\&+\|v_{N_st^3}\|_{H^1(\Omega_s)}\leqslant C_{11}(T),\quad t\in[0,T],\end{aligned}\tag{3.10.31}$$

$$\begin{aligned}&\|v_{N_s}\|_{C^3(\overline{\Omega}_s)}+\|v_{N_st}\|_{C^2(\overline{\Omega}_s)}+\|v_{N_stt}\|_{C^1(\overline{\Omega}_s)}\\&+\|v_{N_st^3}\|_{C(\overline{\Omega}_s)}\leqslant C_{12}(T),\quad t\in[0,T].\end{aligned}\tag{3.10.32}$$

依照估计 (3.10.32) 和 Ascoli-Arzelá 定理, 我们可以从 $\{v_{N_s}(x,t)\}$ 中选出子序列, 仍记为 $\{v_{N_s}(x,t)\}$, 使得当 $N_s\to\infty$ 时, 子序列 $\{v_{N_sx^k}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 2)$, $\{v_{N_sx^kt}(x,t)\}$ $(k=0,1)$ 和 $\{v_{N_stt}(x,t)\}$ 在 $\overline{\Omega}_s\times[0,T]$ 上分别一致收敛于极限函数 $\{v_{sx^k}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 2)$, $\{v_{sx^kt}(x,t)\}$ $(k=0,1)$ 和 $\{v_{stt}(x,t)\}$.

估计 (3.10.31) 对于上面的子序列 $\{v_{N_s}(x,t)\}$仍成立. 因此, 可以从 $\{v_{N_s}(x,t)\}$中选出子序列, 仍记为 $\{v_{N_s}(x,t)\}$, 使得当 $N_s\to\infty$ 时, 子序列 $\{v_{N_sx^k}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 4)$, $\{v_{N_sx^kt}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 3)$, $\{v_{N_sx^ktt}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 2)$ 和 $\{v_{N_sx^kttt}(x,t)\}$ $(k=0,1)$ 在 $L^2((0,T);L^2(\Omega_s))$ 中分别弱收敛于极限函数 $\{v_{sx^k}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 4)$, $\{v_{sx^kt}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 3)$, $\{v_{sx^ktt}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 2)$ 和 $\{v_{sx^kttt}(x,t)\}$ $(k=0,1)$. 由共鸣定理的推论 [241] 推出估计 (3.10.31), (3.10.32) 对于 $v_s(x,t)$ 仍成立, 且 $v_s(x,t)$ 是周期边值问题 (3.10.27)–(3.10.29) 的广义解. 应用 Ascoli-Arzelá 定理, 可以从 $\{v_s(x,t)\}$ 中选取子序列, 仍记为 $\{v_s(x,t)\}$, 使得当 $s\to\infty$ 时, 子序列 $\{v_{sx^k}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 2)$, $\{v_{sx^kt}(x,t)\}$ $(k=0,1)$ 和 $\{v_{stt}(x,t)\}$ 在任意区域 $\{-L\leqslant x\leqslant L,0\leqslant t\leqslant T\}$ 上分别一致收敛于极限函数 $v_{x^k}(x,t)$ $(0\leqslant k\leqslant 2)$, $v_{x^kt}(x,t)$ $(k=0,1)$ 和 $v_{tt}(x,t)$. 由估计 (3.10.31), 可以从 $\{v_s(x,t)\}$ 中选出一子序列, 仍记为 $\{v_s(x,t)\}$, 使得当 $s\to\infty$ 时, 子序列 $\{v_{sx^k}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 4)$, $\{v_{sx^kt}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 3)$, $\{v_{sx^ktt}(x,t)\}$ $(0\leqslant k\leqslant 2)$ 和 $\{v_{sx^kttt}(x,t)\}$ $(k=0,1)$ 在 $L^2((0,T);\ L^2(-L,L))$ 中分别弱收敛于极限函数 $v_{x^k}(x,t)$ $(0\leqslant k\leqslant 4)$, $v_{x^kt}(x,t)$ $(0\leqslant k\leqslant 3)$, $v_{x^ktt}(x,t)$ $(0\leqslant k\leqslant 2)$ 和 $v_{x^kttt}(x,t)$ $(k=0,1)$. 所获极限函数 $v(x,t)$ 正是辅助问题 (3.10.3), (3.10.4) 的整体广义解.

显然, 辅助问题 (3.10.3), (3.10.4) 的广义解也是唯一的. 所以, 当 $k\geqslant 2$ 时, 周期边值问题 (3.10.3), (3.10.4) 有唯一整体广义解 $v(x,t)$, 且它有定理 3.10.2 所述的正则性.

类似地, 可以证明, 如果 $k\geqslant 4$, 则周期边值问题 (3.10.3), (3.10.4) 有唯一整体古典解 $v(x,t)$, 且它有定理 3.10.2 所述的正则性. □

3.10.4 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2)

定理 3.10.3 设 $f\in C^{k+1}(\mathbb{R})$, $f'(s)$ 下有界, $u_0\in H^{k+1}$, $u_1\in H^k$. 如果 $k-1\geqslant 2(k=1+p_1=2+p_2,\ p_1,p_2\geqslant 0)$, 则 Cauchy (3.10.1), (3.10.2) 存在唯一整体广义解 $u(x,t)\in V([0,T]\times\mathbb{R},k-1\geqslant 2)$.

证明 方程 (3.10.24) 和初值条件 (3.10.26) 对 x 求导, 有

$$v_{N_sxtt} - v_{N_sx^3} - av_{N_sx^3tt} + bv_{N_sx^5} - dv_{N_sx^3t} = f(v_{N_sx})_{xx} \tag{3.10.33}$$

和

$$v_{Nsx}(x,0) = \phi_{sx}(x), \quad v_{Nsxt}(x,0) = \psi_{sx}(x). \tag{3.10.34}$$

令

$$v_{N_sx}(x,t) = u_{N_s}(x,t). \tag{3.10.35}$$

将式 (3.10.35) 代入式 (3.10.33), (3.10.28) 和 (3.10.34), 得

$$u_{N_stt} - u_{N_sxx} - au_{N_sxxtt} + bu_{N_sx^4} - du_{N_sxxt} = f(u_{N_s})_{xx}, \tag{3.10.36}$$

$$u_{N_s}(x,t) = u_{N_s}(x+2D_s,t), \tag{3.10.37}$$

$$u_{N_s}(x,0) = u_{0N_s}(x), \quad u_{N_st}(x,0) = u_{1N_s}(x). \tag{3.10.38}$$

在式 (3.10.38) 中, $u_{0N_s}(x) = \sum_{i=1}^{N_s} a_iy_i(x)$ 和 $u_{1N_s}(x) = \sum_{i=1}^{N_s} b_iy_i(x)$ 分别是

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_iy_i(x), \quad u_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_iy_i(x)$$

的近似, 其中 a_i, $b_i(i=1,2,\cdots)$ 均为常数.

利用变换 (3.10.35), 由式 (3.10.32) 推出

$$\begin{aligned}&\|u_{N_s}\|_{H^{k+1}(\Omega_s)} + \|u_{N_st}\|_{H^k(\Omega_s)} + \|u_{N_stt}\|_{H^{p_1}(\Omega_s)}\\&+ \|u_{N_st^3}\|_{H^{p_2}(\Omega_s)} \leqslant C_{13}(T), \quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.10.39}$$

由式 (3.10.39) 和 Sobolev 嵌入定理知

$$\begin{aligned}&\|u_{N_s}\|_{C^k(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{N_st}\|_{C^{k-1}(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{N_stt}\|_{C^{p_1-1}(\overline{\Omega}_s)}\\&+ \|u_{N_st^3}\|_{C^{p_2-1}(\overline{\Omega}_s)} \leqslant C_{14}(T), \quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.10.40}$$

类似于 3.10.3 子节, 由式 (3.10.39) 和 (3.10.40) 推得, 当 $k\geqslant 3$ 时, Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 存在唯一整体广义解 $u(x,t)$, 它有定理 3.10.3 所述的正则性.

现在证明 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 解的唯一性.

令 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 的两个广义解. 于是 $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ 满足 Cauchy 问题

$$\begin{aligned}&u_{tt} - u_{xx} - au_{xxtt} + bu_{x^4} - du_{xxt}\\&= f(u_1)_{xx} - f(u_2)_{xx}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad 0<t<T,\end{aligned} \tag{3.10.41}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{3.10.42}$$

方程 (3.10.41) 两端同乘以 $2u_t(x,t)$, 在 $\mathbb{R}$ 上积分, 两端同加 $2\int_{-\infty}^{\infty} uu_t dx$, 注意到定理 1.7.6, 并进行分部积分, 可知

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2+a\|u_{xt}\|^2+b\|u_{xx}\|^2)\\
=&-2d\|u_{xt}\|^2-2\int_{-\infty}^{\infty}[f(u_1)-f(u_2)]_x u_{xt}dx+2\int_{-\infty}^{\infty} uu_t dx\\
=&-2d\|u_{xt}\|^2-2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 f''(u_2+\theta(u_1-u_2))ud\theta u_{1x}u_{xt}dx\\
&-2\int_{-\infty}^{\infty} f'(u_2)u_x u_{xt}dx+2\int_{-\infty}^{\infty} uu_t dx\\
\leqslant& C_{15}(\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2+\|u_{xt}\|^2).
\end{aligned} \tag{3.10.43}$$

这里和直到 3.10 节结束按照在第 1 章中的约定 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\mathbb{R})$ 的范数. Gronwall 不等式给出

$$\|u\|_{H^2}+\|u_t\|_{H^1}\leqslant 0.$$

唯一性得证. □

定理 3.10.4 设 $f\in C^{k+1}(\mathbb{R})$, $f'(s)$ 下有界, $u_0\in H^{k+1}$, $u_1\in H^k$. 如果 $k-1\geqslant 4(k=1+p_1=2+p_2,\ p_1,p_2\geqslant 0)$, 则 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 有唯一古典解 $u(x,t)\in V([0,T]\times\mathbb{R},k-1\geqslant 4)$.

证明 根据定理 3.10.2 知, 当 $k\geqslant 5$ 时, Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 有唯一整体古典解 $v(x,t)$, 它有连续导数 $v_{x^st^r}(x,t)(0\leqslant s+r\leqslant k,\ r=0,1,2)$ 和广义导数 $v_{x^st^r}(x,t)(0\leqslant s+r\leqslant k+2,\ r=0,1,2,3)$, $v(x,t)$ 满足方程 (3.10.3) 和初值条件 (3.10.4). 方程 (3.10.3) 和初值条件 (3.10.4) 对 x 求导, 并将 $v_x(x,t)=u(x,t)$ 代入此方程和 $\phi_x(x)=u_0(x)$, $\psi_x(x)=u_1(x)$ 代入所得的初值条件, 可见 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 的古典解. $u(x,t)$ 有定理 3.10.4 所述的正则性. 唯一性是显然的. □

3.10.5 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 解的爆破

下面首先应用凸性方法考虑 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 解的爆破. 然后通过 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 解的爆破讨论 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 解的爆破.

类似于引理 3.5.4, 易证如下结论.

引理 3.10.3 设 $f\in C(\mathbb{R})$, $G(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau$, $\phi\in H^2$, $\psi\in H^1$, $G(\phi_x)\in L^1$, 则对于 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 的广义解 $v(x,t)\in V([0,T);k\geqslant 2)$ 或古典解

$v(x,t)\in V([0,T);k\geqslant 4)$，存在下列能量等式

$$E(t)=\|v_t\|^2+\|v_x\|^2+a\|v_{xt}\|^2+b\|v_{xx}\|^2+2d\int_0^t\|v_{x\tau}\|^2d\tau \\ +2\int_{-\infty}^{\infty}G(v_x)dx=E(0). \tag{3.10.44}$$

定理 3.10.5 设 $d\geqslant 0$, $f\in C(\mathbb{R})$, $\phi\in H^2$, $\psi\in H^1$, $G(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau$, $G(\phi_x)\in L^1$, 且存在常数 $\beta>0$ 和 $\varepsilon>0$, 使得

$$2f(s)s\leqslant(4+8\beta+2a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2)G(s)+(4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2-\varepsilon)s^2,\quad \forall s\in\mathbb{R}, \tag{3.10.45}$$

则 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 的广义解 $v(x,t)$ 或古典解 $v(x,t)$ 在有限时刻爆破, 如果满足下列条件之一:

(1) $E(0)<0$;

(2) $E(0)=0$ 和 $(\phi,\psi)+a(\phi_x,\psi_x)>0$;

(3) $E(0)>0$ 和

$$(\phi,\psi)+a(\phi_x,\psi_x)>\sqrt{\frac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2(2\beta+1)}E(0)[\|\phi\|^2+a\|\phi_x\|^2]}>0.$$

证明 假定 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 解存在的最大时间区间是无限的. 令

$$H(t)=\|v\|^2+a\|v_x\|^2+\beta_0(t+t_0)^2, \tag{3.10.46}$$

其中 β_0 和 t_0 是待定非负常数. 我们有

$$\dot{H}(t)=2(v,v_t)+2a(v_x,v_{xt})+2\beta_0(t+t_0), \tag{3.10.47}$$

应用 Hölder 不等式, 由式 (3.10.47) 得

$$\dot{H}(t)^2\leqslant 4H(t)[\|v_t\|^2+a\|v_{xt}\|^2+\beta_0]. \tag{3.10.48}$$

利用方程 (3.10.3) 和能量等式 (3.10.44), 有

$$\begin{aligned}\ddot{H}(t)=&2\|v_t\|^2+2(v,v_{tt})+2a\|v_{xt}\|^2+2a(v_x,v_{xtt})+2\beta_0\\ =&4(1+\beta)[\|v_t\|^2+a\|v_{xt}\|^2+\beta_0]-(2+4\beta)[E(0)+\beta_0]-2d(v_x,v_{xt})\\ &+4\beta\left[b\|v_{xx}\|^2+\left(2+\frac{1}{\beta}\right)d\int_0^t\|v_{x\tau}\|^2d\tau\right]\\ &+2\int_{-\infty}^{\infty}[(2+4\beta)G(v_x)-f(v_x)v_x+2\beta v_x^2]dx.\end{aligned} \tag{3.10.49}$$

根据 Cauchy 不等式和式 (3.10.44) 推出

$$\begin{aligned}2d(v_x, v_{xt}) &\leqslant \varepsilon\|v_x\|^2 + \varepsilon^{-1}d^2\|v_{xt}\|^2\\&\leqslant \varepsilon\|v_x\|^2 + \varepsilon^{-1}\frac{d^2}{a}\left[E(0) - \|v_x\|^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} G(v_x)dx\right],\end{aligned} \tag{3.10.50}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是常数. 由式 (3.10.49) 和式 (3.10.50) 知

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\beta)\dot{H}(t)^2 \geqslant -[(2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2)E(0) + (2+4\beta)\beta_0]H(t). \tag{3.10.51}$$

如果 $E(0) < 0$, 取 $\beta_0 = -\dfrac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2+4\beta}E(0) > 0$, 则

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\beta)(\dot{H}(t))^2 \geqslant 0.$$

当 t_0 充分大时, $\dot{H}(0) > 0$. 显然, $H(0) > 0$. 由引理 1.8.7(凸性引理) 推出, 存在 $t_1 \leqslant t_2 = \dfrac{H(0)}{\beta\dot{H}(0)} < \infty$, 使得当 $t \to t_1$ 时, $H(t) \to \infty$.

如果 $E(0) = 0$, 取 $\beta_0 = 0$, 得

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\beta)(\dot{H}(t))^2 \geqslant 0.$$

根据假定 (2), 可见 $\dot{H}(0) > 0$. 由引理 1.8.7(凸性引理) 知, 存在 $t_1 \leqslant t_2 = \dfrac{H(0)}{\beta\dot{H}(0)} < \infty$, 使得当 $t \to t_1$ 时, $H(t) \to \infty$.

如果 $E(0) > 0$, 取 $\beta_0 = 0$, 式 (3.10.51) 变为

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\beta)\dot{H}(t)^2 \geqslant -(2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2)E(0)H(t). \tag{3.10.52}$$

定义 $I(t) = H^{-\beta}(t)$, 有

$$\begin{aligned}\dot{I}(t) &= -\beta H^{-(\beta+1)}(t)\dot{H}(t),\\\ddot{I}(t) &= -\beta H^{-(\beta+2)}(t)[H(t)\ddot{H}(t) - (1+\beta)\dot{H}(t)^2]\\&\leqslant \beta(2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2)E(0)H^{-(\beta+1)}(t).\end{aligned} \tag{3.10.53}$$

根据假定 (3) 有 $\dot{I}(0) < 0$. 设 $t^* = \sup\{t \mid \dot{I}(\tau) < 0,\ \tau \in [0,t)\}$. 由于 $\dot{I}(t)$ 的连续性, t^* 是一正数. 因此在 $t \in [0,t^*)$ 中 $\dot{I}(t) < 0$. 式 (3.10.53) 两端同乘以 $2\dot{I}(t)$, 我们发现

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\dot{I}(t)^2] &\geqslant -2\beta^2(2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2)E(0)H^{-2(\beta+1)}(t)\dot{H}(t)\\&= 2\beta^2\frac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2\beta+1}E(0)\frac{d}{dt}[H^{-(2\beta+1)}(t)], \quad \forall t \in [0,t^*).\end{aligned} \tag{3.10.54}$$

式 (3.10.54) 在 $[0,t)$ $(0 \leqslant t < t^*)$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}\dot{I}(t)^2 \geqslant & 2\beta^2 \frac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2\beta+1} E(0) H^{-(2\beta+1)}(t) + \dot{I}(0)^2 \\ & - 2\beta^2 \frac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2\beta+1} E(0) H^{-(2\beta+1)}(0).\end{aligned}$$

根据假定 (3), 可见

$$\dot{I}(0)^2 - 2\beta^2 \frac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2\beta+1} E(0) H^{-(2\beta+1)}(0) > 0.$$

因为 $\dot{I}(t)$ 是一连续函数, 对于 $0 \leqslant t < t^*$, 有

$$\dot{I}(t) \leqslant - \left[\dot{I}(0)^2 - 2\beta^2 \frac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2\beta+1} E(0) H^{-(2\beta+1)}(0) \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.10.55}$$

由 t^* 的定义知, 式 (3.10.55) 对所有的 $t \geqslant 0$ 成立. 对 t 积分式 (3.10.55), 得

$$I(t) \leqslant I(0) - \left[\dot{I}(0)^2 - 2\beta^2 \frac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2\beta+1} E(0) H^{-(2\beta+1)}(0) \right]^{\frac{1}{2}} t, \quad \forall\, t > 0. \tag{3.10.56}$$

所以, 存在某个 t_1 $(0 < t_1 \leqslant t_2)$, 使得 $I(t_1) = 0$, 其中

$$t_2 = I(0) \left[\dot{I}(0)^2 - 2\beta^2 \frac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2\beta+1} E(0) H^{-(2\beta+1)}(0) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

因此, $H(t)$ 在 t_1 处变为无限.

于是, $H(t)$ 在 (1) 或 (2) 或 (3) 假定下总在 t_1 处变为无限. 这与解存在的最大时间为无限的事实矛盾. □

定理 3.10.6 设 $d > 0$, $f \in C(\mathbb{R})$, $G(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$, $\phi \in H^2$, $\psi \in H^1$, $G(\phi_x) \in L^1$ 和存在常数 $\beta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得

$$sf(s) \leqslant (2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2) G(s), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{3.10.57}$$

则 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 的解 (见定理 3.10.5) 在有限时刻爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E(0) \leqslant 0$;

(2) $(\phi, \psi) + a(\phi_x, \psi_x) > \dfrac{1}{2} \sqrt{\varepsilon a^{-1} \beta^{-1}} (\|\phi\|^2 + a\|\phi_x\|^2)$.

证明 假定 Cauchy 问题 (3.10.3), (3.10.4) 解存在的最大时间为无限. $H(t)$ 的定义如同式 (3.10.46). 由式 (3.10.46)–(3.10.50) 和式 (3.10.57) 推出

$$\begin{aligned}& H(t)\ddot{H}(t) - (1+\beta)\dot{H}(t)^2 \\ \geqslant & - [(2+4\beta+\varepsilon^{-1}a^{-1}d^2)E(0) + (2+4\beta)\beta_0] H(t) - a^{-1}\varepsilon H(t)^2.\end{aligned} \tag{3.10.58}$$

因为 $E(0)\leqslant 0$, 取 $\beta_0=-\dfrac{2+4\beta+\varepsilon^{-1}a^{-1}d^2}{2+4\beta}E(0)\geqslant 0$, 有

$$H(t)\ddot{H}(t)-(1+\beta)\dot{H}(t)^2\geqslant -a^{-1}\varepsilon H(t)^2. \tag{3.10.59}$$

根据假定 (2) 如果 t_0 充分小, 有 $\dot{H}(0)\geqslant\sqrt{a^{-1}\beta^{-1}\varepsilon}H(0)$. 由引理 1.8.7(凸性引理) 知, 当 $t\to t_1\leqslant t_2$ 时, $H(t)\to\infty$, 其中

$$t_2=\frac{1}{2\sqrt{\beta\varepsilon a^{-1}}}\ln\frac{\beta\dot{H}(0)+\sqrt{\beta\varepsilon a^{-1}}H(0)}{\beta\dot{H}(0)-\sqrt{\beta\varepsilon a^{-1}}H(0)}.$$

这与解存在的最大时间为无限的事实矛盾. □

3.10.6 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 解的爆破

定理 3.10.7 设 $d\geqslant 0$, $f\in C(\mathbb{R})$, $u_0\in H^1$, $u_1\in L^2$, $G(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau$, $G(u_0)\in L^1$ 和存在 $\beta>0,\varepsilon>0$, 使得

$$2f(s)s\leqslant(4+8\beta+2a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2)G(s)+(4\beta+\varepsilon^{-1}a^{-1}d^2-\varepsilon)s^2,\quad\forall s\in\mathbb{R},$$

则 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 的广义解 $u(x,t)\in V([0,T]\times\mathbb{R};\ k-1\geqslant 3)$ 或古典解 $u(x,t)\in V([0,T]\times\mathbb{R};\ k-1\geqslant 4)$ 在有限时刻爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $$E_1(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)d\xi\right]^2dx+\|u_0\|^2+a\|u_1\|^2+b\|u_{0x}\|^2+\int_{-\infty}^{\infty}G(u_0)dx<0;$$

(2) $E_1(0)=0$ 和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)d\xi\right]dx+a(u_0,u_1)>0;$$

(3) $E_1(0)>0$ 和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)d\xi\right]dx+a(u_0,u_1)>\sqrt{\frac{2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2}{2(2\beta+1)}E_1(0)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)d\xi\right]^2dx+a\|u_1\|^2\right\}}>0,$$

其中

$$E_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}u_t(\xi,t)d\xi\right]^2dx+\|u\|^2+a\|u_t\|^2+b\|u_x\|^2+2\int_0^t\|u_\tau\|^2d\tau+2\int_{-\infty}^{\infty}G(u)dx.$$

证明 令

$$H_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}u(\xi,t)d\xi\right]^2dx+a\|u\|^2+\beta_0(t+t_0)^2,$$

其中 β_0 和 t_0 如在定理 3.10.5 中是非负常数.

根据定理 3.10.7 的假定, $u(x,t)$ 在广义意义下或古典意义下满足方程 (3.10.1) 和在古典意义下满足初值条件 (3.10.2). 作变换

$$u(x,t)=v_x(x,t),\quad u_0(x)=\phi_x(x),\quad u_1(x)=\psi_x(x), \tag{3.10.60}$$

则

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{x}u(\xi,t)d\xi,\quad \phi(x)=\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)d\xi,\quad \psi(x)=\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)d\xi.$$

将上面的变换 (3.10.60) 代入 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2), 得

$$v_{xtt}-v_{xxx}-av_{xxxtt}+bv_{x^5}-dv_{xxxt}=f(v_x)_{xx}, \tag{3.10.61}$$

$$v_x(x,0)=u_0(x),\quad v_{xt}(x,0)=u_1(x). \tag{3.10.62}$$

在 $(-\infty,x)$ 上积分方程 (3.10.61) 和初值条件 (3.10.62), 有

$$v_{tt}-v_{xx}-av_{xxtt}+bv_{x^4}-dv_{xxt}=f(v_x)_x, \tag{3.10.63}$$

$$v(x,0)=\phi(x),\quad v_t(x,0)=\psi(x). \tag{3.10.64}$$

令

$$H(t)=\|v\|^2+a\|v_x\|^2+\beta_0(t+t_0)^2,$$

其中 β_0 和 t_0 是正如定理 3.10.5 所述的常数. 根据定理 3.10.7 的假定, Cauchy 问题 (3.10.63), (3.10.64) 解爆破的充分条件满足. 所以由定理 3.10.5 知, 存在 t_1, 使得 $H(t)$ 在 t_1 变为无穷. 因为利用变换 (3.10.60), $H_1(t)=H(t)$, $H_1(t)$ 在 t_1 处变为无穷. □

类似于定理 3.10.7, 可证如下定理.

定理 3.10.8 设 $d>0$, $f\in C(\mathbb{R})$, $G(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau$, $u_0\in H^1$, $u_1\in L^2$, $G(u_0)\in L^1$ 和存在常数 $\beta>0$, $\varepsilon>0$, 使得

$$sf(s)\leqslant(2+4\beta+a^{-1}\varepsilon^{-1}d^2)G(s),\quad \forall s\in\mathbb{R},$$

则 Cauchy 问题 (3.10.1), (3.10.2) 的解 $u(x,t)$(见定理 3.10.7) 在有限时刻爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E_1(0)\leqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{x}u_1(\xi)d\xi\right]dx+a(u_0,u_1)$

$$>\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon a^{-1}\beta^{-1}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}u_0(\xi)d\xi\right]^2dx+a\|u_0\|^2\right\}.$$

3.10.7 Cauchy 问题 (2.5.5), (3.10.2) 和 (2.5.4), (3.10.2)

现在, 我们用 3.10.4 子节和 3.10.6 子节的理论研究 Cauchy 问题

$$u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{4}(cu^3+6u^2+au_{tt}-bu_{xx}+du_t)_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0 \tag{2.5.5}$$

$$u(x,0)=r_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R} \tag{3.10.2}$$

和 Cauchy 问题 (2.5.4), (3.10.2)

$$u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{4}(6u^2+au_{tt}-bu_{xx})_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{2.5.4}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{3.10.2}$$

定理 3.10.9 设 $u_0\in H^{k+1}$, $u_1\in H^k$. 如果 $k-1\geqslant 2$ $(k=1+p_1=2+p_2,\ p_1,p_2\geqslant 0)$, 则 Cauchy 问题 (2.5.5), (3.10.2) 存在唯一整体广义解 $u(x,t)\in V([0,T]\times\mathbb{R};\ k-1\geqslant 2)$. 如果 $k-1\geqslant 4$ $(k=1+p_1=2+p_2,\ p_1,p_2\geqslant 0)$, 则 Cauchy 问题 (2.5.5), (3.10.2) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)\in V([0,T]\times\mathbb{R};\ k-1\geqslant 4)$.

证明 根据定理 3.10.3 和 3.10.4, 只需证明 $f'(u)=\frac{1}{4}(3cu^2+12u)$ 下有界即可. 事实上,

$$f'(u)=\frac{1}{4}(3cu^2+12u)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3c}u+\frac{6}{\sqrt{3c}}\right)^2-\frac{3}{c}\geqslant-\frac{3}{c}.$$ □

定理 3.10.10 设 $u_0\in H^1$, $u_1\in L^2$ 和 $\frac{1}{2}u_0^3(x)\in L^1$, 则 Cauchy 问题 (2.5.4), (3.10.2) 的广义解 $u(x,t)\in V([0,T]\times\mathbb{R};\ k-1\geqslant 2)$ 或古典解 $u(x,t)\in V([0,T]\times\mathbb{R};\ k-1\geqslant 4)$ 在有限时刻爆破, 如果在定理 3.10.7 中的条件 (1), (2), (3) 之一成立.

证明 根据定理 3.10.7, 只需证明下列条件成立: 存在 $\beta>0$ 和 $\varepsilon>0$, 使得

$$2f(s)\leqslant(4+8\beta)G(s)+(4\beta-\varepsilon)s^2,\quad \forall s\in\mathbb{R}.$$

事实上, 如果我们取 $\beta=\frac{1}{4},\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则要求的证明条件成立. □

3.10.8 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [238]. 与本节内容有关的文献见 [6], [32], [43], [44], [53], [62]–[73], [101], [191], [239].

3.11 三维具阻尼双曲型方程 Cauchy 问题解的爆破

3.11.1 引言

本节考虑下列三维具阻尼双曲型方程 Cauchy 问题

$$u_{tt} + k_1\nabla^4 u + k_2\nabla^4 u_t + \nabla^2 g(\nabla^2 u) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T), \tag{3.11.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{3.11.2}$$

局部广义解和局部古典解的存在性、唯一性以及解的爆破, 其中 $u(x,t)$ 表示未知函数, k_1 和 k_2 是两个正常数, $g(s)$ 是给定的非线性函数, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是给定的初值函数.

方程 (3.11.1) 描写 N 维非线性阻尼膜的振动 (见 [243]). 文献 [243] 证明了具有初边值条件

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad 在\ \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ 上, \tag{3.11.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 在\ \Omega\ 上 \tag{3.11.4}$$

的方程 (3.11.1) 弱解的存在性和唯一性, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域和 ν 表示在 $\partial\Omega$ 上的外单位法向. 文献 [244] 给出 N 维情况的问题 (3.11.1), (3.11.3), (3.11.4) 解的能量衰减. 文献 [245] 给出问题 (3.11.1), (3.11.3), (3.11.4) 的 N 维情况解爆破的充分条件.

由于主要应用周期边值问题序列的方法 [129] 证明 Cauchy 问题 (3.11.1),(3.11.2) 有唯一的局部解, 所以必须研究周期边值问题, 即取一实数序列 $D_s(D_s < 1)$, 使得当 $s \to \infty$ 时, $D_s \to \infty$. 对于每一个 s, 将考虑下列周期边值问题

$$u_{tt} + k_1\nabla^4 u + k_2\nabla^4 u_t + \nabla^2 g(\nabla^2 u) = 0, \tag{3.11.1}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x_1 + 2D_s, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2 + 2D_s, x_3, t) \\ &= u(x_1, x_2, x_3 + 2D_s, t), \end{aligned} \tag{3.11.5}$$

$$u(x,0) = u_{0s}(x), \quad u_t(x,0) = u_{1s}(x). \tag{3.11.6}$$

下面将证明, 当 $s \to \infty$ 时, 问题 (3.11.1), (3.11.5), (3.11.6) 的解序列 $\{u_s(x,t)\}$ 收敛于极限函数 $u(x,t)$, 此函数正是 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 的解.

3.11.2 周期边值问题

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是在每一个方向宽度为 $2D(D > 0)$ 的三维立方体, 即 $\overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \| x_i| \leqslant D, i = 1,2,3\}$, 并置 $\overline{Q}_T = \{x \in \overline{\Omega}, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

为了证明 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 解的存在性, 在 Q_T 中研究方程 (3.11.1) 具有初边值条件

$$u(x,t)=u(x_1+2D,x_2,x_3,t)=u(x_1,x_2+2D,x_3,t)$$
$$=u(x_1,x_2,x_3+2D,t), \tag{3.11.7}$$
$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x) \tag{3.11.8}$$

的周期边值问题, 其中 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是三维初值函数, 且满足周期边值条件.

现在建立 $L^2(\Omega)$ 中的一个标准正交基.

考虑下列常微分方程的特征值问题

$$y''+\lambda y=0,$$
$$y(x_1+2D)=y(x_1).$$

可得由特征值 $\lambda_{1i}=\alpha_i^2=\left(\frac{i\pi}{D}\right)^2\ (i=0,1,\cdots)$ 的特征函数系

$$\{y_i(x_1)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2D}},\frac{1}{\sqrt{D}}\cos\alpha_i x_1,\frac{1}{\sqrt{D}}\sin\alpha_i x_1,\quad i=1,2,\cdots\right\}$$

构成的 $L^2(\Omega_1)$ 中的一标准正交基. 类似地可得由特征值 $\lambda_{2j}=\beta_j^2=\left(\frac{j\pi}{D}\right)^2(j=0,1,\cdots)$ 的特征函数系

$$\{z_j(x_2)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2D}},\frac{1}{\sqrt{D}}\cos\beta_j x_2,\frac{1}{\sqrt{D}}\sin\beta_j x_2,\quad j=1,2,\cdots\right\}$$

构成的 $L^2(\Omega_2)$ 中的一标准正交基以及由特征值 $\lambda_{3k}=\gamma_k^2=\left(\frac{k\pi}{D}\right)^2\ (k=0,1,\cdots)$ 的特征函数系

$$\{w_k(x_3)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2D}},\frac{1}{\sqrt{D}}\cos\gamma_k x_3,\frac{1}{\sqrt{D}}\sin\gamma_k x_3,\quad k=1,2,\cdots\right\}$$

构成的 $L^2(\Omega_3)$ 中的一标准正交基. 根据引理 1.8.11, 函数系 $\{y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3),\ i,j,k=0,1,\cdots\}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基, 其中 $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3$.

令

$$u_{N_0}(x,t)=\sum_{i,j,k=0}^{N_0}P_{N_0ijk}(t)y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3)$$

是问题 (3.11.1), (3.11.7), (3.11.8) 的 Galerkin 近似解, 其中 $P_{N_0ijk}(t)$ 是待定函数, N_0 是一自然数. 设初值函数 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 可以表示为

$$u_0(x)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\varphi_{ijk}y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3),\quad u_1(x)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\psi_{ijk}y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3),$$

其中 φ_{ijk} 和 $\psi_{ijk}(i,j,k=0,1,\cdots)$ 为常数, 将近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 代入 (3.11.1) 后, 两端同乘以 $y_s(x_1)z_l(x_2)w_m(x_3)$, 并在 Ω 上积分, 得

$$\ddot{P}_{N_0slm}+(\alpha_s^4+\beta_l^4+\gamma_m^4+2\alpha_s^2\beta_l^2+2\alpha_s^2\gamma_m^2+2\beta_l^2\gamma_m^2)(k_1P_{N_0slm}+k_2\dot{P}_{N_0slm})$$
$$+(\Delta g(\Delta u_N),y_s(x_1)z_l(x_2)w_m(x_3))=0,\quad s,l,m=0,1,\cdots,N_0. \tag{3.11.9}$$

把近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 和初值函数的近似

$$u_{0N_0}(x)=\sum_{i,j,k=0}^{N_0}\varphi_{ijk}y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3),\quad u_{1N_0}(x)=\sum_{i,j,k=0}^{N_0}\psi_{ijk}y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3)$$

代入式 (3.11.8) 有

$$P_{N_0slm}(0)=\varphi_{slm},\quad \dot{P}_{N_0slm}(0)=\psi_{slm},\quad s,l,m=0,1,\cdots,N_0. \tag{3.11.10}$$

引理 3.11.1 设 $g\in C^4(\mathbb{R})$, $|g(s)|\leqslant K_1|s|^q$, $|g'(s)|\leqslant K_2|s|^{q-1}$ 等, 其中 $q\geqslant 2$ 是一自然数和 K_1, K_2 是正常数. 如果

$$\begin{aligned}&\lim_{N_0\to\infty}E_{N_0}(0)=A\\&=\sum_{s,l,m=0}^{\infty}\Bigg(1+\sum_{\substack{i+j+k=8\\i,j,k=0,2,4,6,8}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\Bigg)\psi_{slm}^2+k_1\sum_{s,l,m=0}^{\infty}\Bigg(1+\alpha_s^4+\beta_l^4\\&\quad+\gamma_m^4+2\sum_{\substack{i+j+k=4\\i,j,k=0,2}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k+\alpha_s^{12}+\beta_l^{12}+\gamma_m^{12}+3\sum_{\substack{i+j+k=12\\i,j,k=0,2,10}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\\&\quad+4\sum_{\substack{i+j+k=12\\i,j,k=0,4,6,8}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k+7\sum_{\substack{i+j+k=12\\i,j,k=2,8}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k+8\sum_{\substack{i+j+k=12\\i,j,k=2,4,6}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\\&\quad+9\alpha_s^4\beta_l^4\gamma_m^4\Bigg)\varphi_{slm}^2+1<\infty,\end{aligned} \tag{3.11.11}$$

则对于常微分方程组的 Cauchy 问题 (3.11.9), (3.11.10) 在 $[0,t_1]$ 上存在古典解 $P(t)=(P_{N_0ijk}(t),i,j,k=0,1,\cdots,N_0)$ 和

$$E_{N_0}(t)\leqslant\frac{A}{[1-(q-1)K_3A^{q-1}t_1]^{\frac{1}{q-1}}}=M \tag{3.11.12}$$

是一致有界的, 其中 $t_1>0$, $K_3>0$ 和 $M>0$ 是不依赖于 D 和 N_0 的常数以及

$$\begin{aligned}E_{N_0}(t)=&\sum_{s,l,m=0}^{N_0}\Bigg(1+\sum_{\substack{i+j+k=8\\ i,j,k=0,2,4,6,8}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\Bigg)\dot{P}_{N_0slm}^2+k_1\sum_{s,l,m=0}^{N_0}\Bigg(1+\alpha_s^4+\beta_l^4\\&+\gamma_m^4+2\sum_{\substack{i+j+k=4\\ i,j,k=0,2}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k+\alpha_s^{12}+\beta_l^{12}+\gamma_m^{12}+3\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=0,2,10}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\\&+4\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=0,4,6,8}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k+7\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=2,8}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k+8\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=2,4,6}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\\&+9\alpha_s^4\beta_l^4\gamma_m^4\Bigg)P_{N_0slm}^2+1.\end{aligned}\tag{3.11.13}$$

证明　Cauchy 问题 (3.11.9), (3.11.10) 是关于 $P_{N_0ijk}(t)$, $i,j,k=0,1,\cdots,N_0$ 的二阶常微分方程组的 Cauchy 问题, 我们可以等价地把 Cauchy 问题 (3.11.9), (3.11.10) 化为一阶 $3N_0$ 维常微分方程组的 Cauchy 问题. 因为非线性项是光滑的, 所以 Cauchy 问题 (3.11.9), (3.11.10) 总存在局部解. 令 $[0,T_{N_0})$ 是解存在的最大时间区间. 容易从下面的估计看出 T_{N_0} 有不依赖于 N_0 的正下界.

方程组 (3.11.9) 两端同乘以 $2\Big(1+\sum_{\substack{i+j+k=8\\ i,j,k=0,2,4,6,8}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\Big)\dot{P}_{N_0slm}$, 对 $s,l,m=0,1,\cdots,N_0$ 求和, 并两端各加上 $k_1\dfrac{d}{dt}\sum_{s,l,m=0}^{N_0}P_{N_0slm}^2$, 推出

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_{N_0}(t)+2k_2\Bigg(\|u_{N_0t}\|^2+\sum_{i=1}^3\|u_{N_0x_i^2t}\|^2+2\sum_{\substack{i+j+k=2\\ i,j,k=0,1}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|^2+\sum_{i=1}^3\|u_{N_0x_i^6t}\|^2\\&+3\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=0,1,5}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|^2+4\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=0,2,3,4}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|^2+7\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=1,4}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|^2\\&+8\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=1,2,3}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|^2+9\|u_{N_0x_1^2x_2^2x_3^2t}\|^2\Bigg)\\=&-2\Bigg(\Delta g(\Delta u_{N_0}),u_{N_0t}+\sum_{\substack{i+j+k=8\\ i,j,k=0,2,4,6,8}}u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\Bigg)+k_1\frac{d}{dt}(u_{N_0},u_{N_0}).\end{aligned}\tag{3.11.14}$$

由式 (3.11.13) 得

$$\begin{aligned}E_{N_0}(t)=&\|u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{\substack{i+j+k=4\\ i,j,k=0,1,2,3,4}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|_{L^2(\Omega)}^2+k_1\Bigg(\|u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&+\sum_{i=1}^3\|u_{N_0x_i^2}\|_{L^2(\Omega)}^2+2\sum_{\substack{i+j+k=2\\ i,j,k=0,1}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^3\|u_{N_0x_i^6}\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+3\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=0,1,5}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\Omega)}^2+4\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=0,2,3,4}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+7\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=1,4}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\Omega)}^2+8\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=1,2,3}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\left.+9\|u_{N_0x_1^2x_2^2x_3^2}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+1. \qquad (3.11.15)
\end{aligned}
$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理和式 (3.11.15) 知

$$
\|u_{N_0}\|_{W^{4,\infty}(\Omega)}\leqslant C_1\|u_{N_0}\|_{H^6(\Omega)}\leqslant C_2(E_{N_0}(t))^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.11.16)
$$

$$
\|u_{N_0}\|_{H^5(\Omega)}\leqslant C_3\|u_{N_0}\|_{H^6(\Omega)}\leqslant C_4(E_{N_0}(t))^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.11.17)
$$

其中常数 $C_i(i=1,2,3,4)$ 不依赖于 N_0 和 Ω.

利用 Young 不等式, 式 (3.11.16), 式 (3.11.17) 和引理的假定, 发现

$$
\begin{aligned}
|-2(\Delta g(\Delta u_{N_0}),u_{N_0t})|&\leqslant 2\int_\Omega|g(\Delta u_{N_0})||\Delta u_{N_0t}|dx\\
&\leqslant C_5\|\Delta u_{N_0}\|_{L^\infty(\Omega)}^{2q-2}\|\Delta u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{k_2}{2}\|\Delta u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\leqslant C_6(E_{N_0}(t))^q+k_2\sum_{i=1}^3\|u_{N_0x_i^2t}\|_{L^2(\Omega)}^2. \qquad (3.11.18)
\end{aligned}
$$

进行分部积分和应用 Hölder 不等式, 看出

$$
\begin{aligned}
&\left|-2\int_\Omega\Delta g(\Delta u_{N_0})u_{N_0x_1^8t}dx\right|\\
=&\left|-2\int_\Omega\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\Delta g(\Delta u_{N_0}))u_{N_0x_1^6t}dx\right|\\
\leqslant&2\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\Delta g(\Delta u_{N_0}))\right\|_{L^2(\Omega)}\|u_{N_0x_1^6t}\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.11.19)
\end{aligned}
$$

应用微分法经直接计算得

$$
\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\Delta g(\Delta u_{N_0}))\right\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_7\|u_{N_0}\|_{H^6(\Omega)}^q, \qquad (3.11.20)
$$

其中常数 C_7 不依赖于 N_0 和 Ω.

利用式 (3.11.13), (3.11.16) 和式 (3.11.17), 从式 (3.11.19) 和式 (3.11.20) 知

$$
\begin{aligned}
\left|-2\int_\Omega\Delta g(\Delta u_{N_0})u_{N_0x_1^8t}dx\right|&\leqslant C_8\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\Delta g(\Delta u_{N_0}))\right\|_{L^2(\Omega)}^2+k_2\|u_{N_0x_1^6t}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\leqslant C_8(E_{N_0}(t))^q+k_2\|u_{N_0x_1^6t}\|_{L^2(\Omega)}^2. \qquad (3.11.21)
\end{aligned}
$$

类似于式 (3.11.21) 有

$$\begin{aligned}&\left|-2\int_{\Omega}\Delta g(\Delta u_{N_0})\left(u_{N_0x_2^8t}+u_{N_0x_3^8t}+\sum_{\substack{i+j+k=8\\ i,j,k=0,2,4,6}}u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^k}\right)dx\right|\\ &\leqslant C_9(E_{N_0}(t))^q+k_2\left(\sum_{i=2}^{3}\|u_{N_0x_i^6t}\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=0,1,5}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\ &\quad\left.+\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=0,3}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{\substack{i+j+k=6\\ i,j,k=1,4}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}\tag{3.11.22}$$

将式 (3.11.21) 和式 (3.11.22) 代入式 (3.11.14), 立得

$$\frac{d}{dt}E_{N_0}(t)\leqslant K_3(E_{N_0}(t))^q,\tag{3.11.23}$$

其中 K_3 是不依赖于 N_0 和 Ω 的常数.

对于任意的 $t\in(0,T_{N_0})$, 由式 (3.11.23) 看出

$$E_{N_0}(t)\leqslant\frac{E_{N_0}(0)}{[1-(q-1)K_3E_{N_0}^{q-1}(0)t]^{\frac{1}{q-1}}}\leqslant\frac{A}{[1-(q-1)K_3A^{q-1}t]^{\frac{1}{q-1}}}.\tag{3.11.24}$$

若取 t_1 满足

$$a\geqslant 1-(q-1)K_3A^{q-1}t_1>0,\tag{3.11.25}$$

其中 $0<a<1$, 则式 (3.11.12) 在 $[0,t_1]$ 上成立. 由式 (3.11.25) 推出

$$\frac{1-a}{(q-1)K_3A^{q-1}}\leqslant t_1<\frac{1}{(q-1)K_3A^{q-1}},$$

其中 $\dfrac{1-a}{(q-1)K_3A^{q-1}}>0$ 是一常数. 这表示 T_{N_0} 有正下界. □

引理 3.11.2　在引理 3.11.1 的条件下, 周期边值问题 (3.11.1), (3.11.7), (3.11.8) 的近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 有估计

$$\|u_{N_0}\|_{H^6(\Omega)}+\|u_{N_0t}\|_{H^4(\Omega)}+\|u_{N_0tt}\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_{10},\quad t\in[0,t_1],\tag{3.11.26}$$

其中常数 C_{10} 不依赖于 N_0 和 Ω.

证明　由引理 3.11.1 容易看出

$$\|u_{N_0}\|_{H^6(\Omega)}+\|u_{N_0t}\|_{H^4(\Omega)}\leqslant C_{11},\quad t\in[0,t_1].\tag{3.11.27}$$

方程组 (3.11.9) 两端同乘以 $\ddot{P}_{N_0slm}$, 并对 $s,l,m=0,1,2,\cdots,N_0$ 求和有

$$\|u_{N_0tt}\|^2_{L^2(\Omega)}+k_1(\nabla^4u_{N_0},u_{N_0tt})+k_2(\nabla^4u_{N_0t},u_{N_0tt})=-(\Delta g(\Delta u_{N_0}),u_{N_0tt}).\tag{3.11.28}$$

应用 Hölder 不等式和式 (3.11.27), 从式 (3.11.28) 推出

$$\|u_{N_0tt}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{12}, \quad t \in [0, t_1], \tag{3.11.29}$$

其中 C_{12} 是一不依赖于 N_0 和 Ω 的常数. □

定理 3.11.1 设 $g \in C^4(\mathbb{R})$, $|g(s)| \leqslant K_1|s|^q$, $|g'(s)| \leqslant K_2|s|^{q-1}$ 等, 其中 $q \geqslant 2$ 是一自然数和 K_1, K_2 是正常数. 如果 $u_0 \in H^6(\Omega)$ 和 $u_1 \in H^4(\Omega)$, 则周期边值问题 (3.11.1), (3.11.7), (3.11.8) 存在唯一局部广义解 $u(x,t)$.

证明 由式 (3.11.26) 和 Sobolev 嵌入定理看出下列估计成立

$$\|u_{N_0}\|_{C^{4,\lambda}(\overline{\Omega})} + \|u_{N_0t}\|_{C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})} \leqslant C_{13}, \quad t \in [0, t_1], \tag{3.11.30}$$

其中 $0 < \lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$ 和常数 C_{13} 不依赖于 N_0 和 Ω. 由式 (3.11.30) 和 Ascoli-Arzelá定理推出, 存在函数 $u(x,t)$ 和 $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 的子序列, 仍记为 $\{u_{N_0}(x,t)\}$, 使得当 $N_0 \to \infty$ 时, $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 和 $\{\Delta u_{N_0}(x,t)\}$ 分别在 $\overline{Q}_{t_1}$ 上一致收敛于 $u(x,t)$ 和 $\Delta u(x,t)$. 由式 (3.11.26) 推出子序列 $\{\Delta^2 u_{N_0}(x,t)\}$, $\{(\nabla\Delta u_{N_0}(x,t))^2\}$, $\{\Delta^2 u_{N_0t}(x,t)\}$ 和 $\{u_{N_0tt}(x,t)\}$ 分别在 $L^2(Q_{t_1})$ 中弱收敛于 $\Delta^2 u(x,t)$, $(\nabla\Delta u(x,t))^2$, $\Delta^2 u_t(x,t)$ 和 $u_{tt}(x,t)$. 因此周期边值问题 (3.11.1), (3.11.7), (3.11.8) 存在局部广义解.

现在证明局部广义解的唯一性. 令 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是问题 (3.11.1), (3.11.7), (3.11.8) 的两个局部广义解. 令 $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$, 则 $w(x,t)$ 满足下列周期边值问题

$$w_{tt} + k_1\nabla^4 w + k_2\nabla^4 w_t + \Delta g(\Delta u) - \Delta g(\Delta v) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{3.11.31}$$

$$\begin{aligned} w(x,t) &= w(x_1 + 2D, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_2 + 2D, x_3, t) \\ &= w(x_1, x_2, x_3 + 2D, t), \end{aligned} \tag{3.11.32}$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.11.33}$$

方程 (3.11.31) 两端同乘以 $2w_t(x,t)$ 后, 两端各加项 $2ww_t$, 并在 Ω 上积分, 经计算成立

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + k_1\|\Delta w\|^2_{L^2(\Omega)}) + 2k_2\|\Delta w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \\ =& -2\int_\Omega [\Delta g(\Delta u) - \Delta g(\Delta v)]w_t dx + 2\int_\Omega ww_t dx \\ =& -2\int_\Omega [g(\Delta u) - g(\Delta v)]\Delta w_t dx + 2\int_\Omega ww_t dx \\ =& -2\int_\Omega g'(\Delta u + \theta(\Delta v - \Delta u))\Delta w\Delta w_t dx + 2\int_\Omega ww_t dx, \end{aligned} \tag{3.11.34}$$

其中 $0<\theta<1$. 因为 $g'(\Delta u+\theta(\Delta v-\Delta u))$ 是有界的, 从式 (3.11.34) 知

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}^2+\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant C_{14}\int_0^t[\|w\|_{L^2(\Omega)}^2+\|w_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}^2]d\tau.$$

Gronwall 不等式给出

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}^2+\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}^2=0.$$

所以 $u(x,t)=v(x,t)$. □

引理 3.11.3 设引理 3.11.1 的条件成立. 如果 $g\in C^{10}(\mathbb{R})$, $u_0\in H^{12}(\Omega)$ 和 $u_1\in H^{10}(\Omega)$, 近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 有估计

$$\|u_{N_0}\|_{H^{12}(\Omega)}+\|u_{N_0t}\|_{H^{10}(\Omega)}+\|u_{N_0tt}\|_{H^6(\Omega)}+\|u_{N_0ttt}\|_{H^2(\Omega)}\leqslant C_{15},\quad t\in[0,t_1], \tag{3.11.35}$$

其中 C_{15} 是不依赖于 N_0 和 Ω 的常数.

证明 方程组 (3.11.9) 两端同乘以 $2\Big(\sum_{\substack{i+j+k=20\\ i,j,k=0,2,4,\cdots,20}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\Big)\dot{P}_{N_0slm}(t)$ 后, 对 $s,l,m=0,1,2,\cdots,N_0$ 求和, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Bigg\{\sum_{s,l,m=0}^{N_0}\Bigg(\sum_{\substack{i+j+k=20\\ i,j,k=0,2,4,\cdots,20}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\Bigg)\dot{P}_{N_0slm}^2+k_1\Big(\alpha_s^4+\beta_l^4+\gamma_m^4+2\alpha_s^2\beta_l^2\\&\quad+2\alpha_s^2\gamma_m^2+2\beta_l^2\gamma_m^2\Big)\Bigg(\sum_{\substack{i+j+k=20\\ i,j,k=0,2,4,\cdots,20}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\Bigg)P_{N_0slm}^2\Bigg\}+2k_2\Bigg\{\sum_{s,l,m=0}^{N_0}\Big(\alpha_s^4+\beta_l^4\\&\quad+\gamma_m^4+2\alpha_s^2\beta_l^2+2\alpha_s^2\gamma_m^2+2\beta_l^2\gamma_m^2\Big)\Bigg(\sum_{\substack{i+j+k=20\\ i,j,k=0,2,4,\cdots,20}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\Bigg)\dot{P}_{N_0slm}^2\Bigg\}\\&=-2\Bigg(\Delta g(\Delta u_{N_0}),\sum_{\substack{i+j+k=20\\ i,j,k=0,2,4,\cdots,20}}\alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\dot{P}_{N_0slm}\Bigg).\end{aligned}$$

类似于引理 3.11.1, 由上述方程断言

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{i+j+k=10\\ i,j,k=0,1,2,\cdots,10}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|_{L^2(\Omega)}^2+C_{16}\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=0,1,2,\cdots,12}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\quad+C_{17}\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=0,1,2,\cdots,12}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^kt}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\leqslant C_{18}\int_0^t\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=0,1,2,\cdots,12}}\|u_{N_0x_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\Omega)}^2dt+C_{19}(\|u_0\|_{H^{12}(\Omega)}^2+\|u_1\|_{H^{10}(\Omega)}^2).\end{aligned}\tag{3.11.36}$$

注意到式 (3.11.12), 根据 Gronwall 不等式由式 (3.11.36) 给出

$$\|u_{N_0}\|^2_{H^{12}(\Omega)} + \|u_{N_0t}\|^2_{H^{10}(\Omega)} \leqslant C_{20}, \quad t \in [0, t_1], \tag{3.11.37}$$

其中 C_{20} 是不依赖于 N_0 和 Ω 的常数.

方程组 (3.11.9) 两端同乘以 $\left(\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=0,2,4,\cdots,12}} \alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\right)\ddot{P}_{N_0slm}$, 对 $s,l,m=0,1,\cdots,N_0$ 求和, 并进行分部积分, 经直接计算得

$$\|u_{N_0tt}\|^2_{H^6(\Omega)} \leqslant C_{21}, \quad t \in [0, t_1], \tag{3.11.38}$$

其中 C_{21} 是不依赖于 N_0 和 Ω 的常数.

方程 (3.11.9) 对 t 求导, 有

$$\begin{aligned}&\dddot{P}_{N_0slm} + (\alpha_s^4+\beta_l^4+\gamma_m^4+2\alpha_s^2\beta_l^2+2\alpha_s^2\gamma_m^2+2\beta_l^2\gamma_m^2)(k_1\dot{P}_{N_0slm}+k_2\ddot{P}_{N_0slm})\\&+(\Delta g(\Delta u_{N_0})_t, y_s(x_1)z_l(x_2)w_m(x_3))=0, \quad s,l,m=0,1,\cdots,N_0.\end{aligned} \tag{3.11.39}$$

方程组 (3.11.39) 两端同乘以 $\left(\sum_{\substack{i+j+k=4\\ i,j,k=0,2,4}} \alpha_s^i\beta_l^j\gamma_m^k\right)\dddot{P}_{N_0slm}$, 对 $s,l,m=0,1,\cdots,N_0$ 求和, 并进行分部积分, 经直接计算断言

$$\|u_{N_0ttt}\|^2_{H^2(\Omega)} \leqslant C_{22}, \quad t \in [0, t_1], \tag{3.11.40}$$

其中 C_{22} 是不依赖于 N_0 和 Ω 的常数. 综合式 (3.11.37), (3.11.38) 和式 (3.11.40) 得式 (3.11.35). □

定理 3.11.2 设 $g \in C^{10}(\mathbb{R})$, $|g(s)| \leqslant K_1|s|^q$, $|g'(s)| \leqslant K_2|s|^{q-1}$ 等, 其中 $q \geqslant 2$ 是自然数和 K_1, K_2 是正数. 如果 $u_0 \in H^{12}(\Omega)$ 和 $u_1 \in H^{10}(\Omega)$, 则周期边值问题 (3.11.1), (3.11.7), (3.11.8) 存在唯一局部古典解 $u(x,t)$.

证明 从式 (3.11.35) 和 Sobolev 嵌入定理有

$$\begin{aligned}&\|u_{N_0}\|_{C^{10,\lambda}(\bar{\Omega})} + \|u_{N_0t}\|_{C^{8,\lambda}(\bar{\Omega})} + \|u_{N_0tt}\|_{C^{4,\lambda}(\bar{\Omega})}\\&+\|u_{N_0ttt}\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant C_{23}, \quad t \in [0, t_1],\end{aligned} \tag{3.11.41}$$

其中 $0 < \lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$ 和 C_{23} 是不依赖于 N_0 和 Ω 的常数. 由式 (3.11.41) 和 Ascoli-Arzelá定理知, 周期边值问题 (3.11.1), (3.11.7), (3.11.8) 有古典解 $u(x,t)$. 显然周期边值问题的古典解是唯一的. □

3.11.3 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2)

应用 3.9 节定理中的方法可以证明 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 有唯一的局部广义解和唯一的局部古典解, 即利用周期边值问题序列证明 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 存在唯一局部广义解和唯一局部古典解.

定理 3.11.3 设 $g \in C^4(\mathbb{R})$, $|g(s)| \leqslant K_1|s|^q$, $|g'(s)| \leqslant K_2|s|^{q-1}$ 等, 其中 $q \geqslant 2$ 是一自然数和 K_1, K_2 是正常数. 如果 $u_0 \in H^6(\mathbb{R}^3)$ 和 $u_1 \in H^4(\mathbb{R}^3)$, 则存在一个 $t_2 > 0$ 和 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 在 $[0, t_2] \times \mathbb{R}^3$ 上有唯一局部广义解 $u(x,t)$. 如果 $g \in C^{10}(\mathbb{R})$, $u_0 \in H^{12}(\mathbb{R}^3)$ 和 $u_1 \in H^{10}(\mathbb{R}^3)$, 则 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 在 $[0, t_2] \times \mathbb{R}^3$ 上有唯一局部古典解.

证明 取一实数序列 $\{D_s\}(D_s > 1)$, 使得当 $s \to \infty$ 时, $D_s \to \infty$. 对于每一个 s 构造具有周期 $2D_s$ 的周期函数 $u_{0s}(x)$ 和 $u_{1s}(x)$, 使得

(1) $u_{0s} \in H^6(\Omega_s)$, $u_{1s} \in H^4(\Omega_s)$, 其中 $\overline{\Omega}_s = \{x \in (x_1, x_2, x_3) || x_i| \leqslant D_s, i = 1,2,3\}$;

(2) 当 $x \in [-(D_s-1), D_s-1] \times [-(D_s-1), D_s-1] \times [-(D_s-1), D_s-1] = \tilde{\Omega}_s$ 时, $u_{0s}(x) = u_0(x)$, $u_{1s}(x) = u_1(x)$, 则

$$
\begin{aligned}
&\|u_{0sx_i^j}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_s)} \leqslant \|u_{0x_i^j}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad i = 1,2,3, \quad j = 0,1,2,3,4,5,6;\\
&\|u_{0sx_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_s)} \leqslant \|u_{0x_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad i+j+k = m,\\
&\qquad\qquad i,j,k = 0,1,\cdots,m-1, \quad m = 2,3,4,5,6;\\
&\|u_{1sx_i^j}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_s)} \leqslant \|u_{1x_i^j}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad i = 1,2,3, \quad j = 0,1,2,3,4;\\
&\|u_{1sx_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_s)} \leqslant \|u_{1x_1^ix_2^jx_3^k}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad i+j+k = m,\\
&\qquad\qquad i,j,k = 0,1,\cdots,m-1, \quad m = 2,3,4.
\end{aligned}
$$

考虑下列周期边值问题

$$
u_{tt} + k_1\nabla^4 u + k_2\nabla^4 u_t + \nabla^2 g(\nabla^2 u) = 0, \tag{3.11.42}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u(x_1+2D_s, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2+2D_s, x_3, t)\\
&= u(x_1, x_2, x_3+2D_s, t),
\end{aligned} \tag{3.11.43}
$$

$$
u(x,0) = u_{0s}(x), \quad u_t(x,0) = u_{1s}(x). \tag{3.11.44}
$$

令

$$
\{y_i(x_1)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2D}}, \frac{1}{\sqrt{D}}\cos\alpha_i x_1, \frac{1}{\sqrt{D}}\sin\alpha_i x_1, i = 1,2,\cdots\right\}
$$

是由下列常微分方程边值问题

$$
y'' + \lambda y = 0, \quad y(x_1 + 2D_s) = y(x_1)
$$

的特征值 $\lambda_{1i} = \alpha_i^2 = \left(\dfrac{i\pi}{D_s}\right)^2 (i = 0,1,\cdots)$ 对应的特征函数系构成的标准正交基;

$$
\{z_j(x_2)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2D}}, \frac{1}{\sqrt{D}}\cos\beta_j x_2, \frac{1}{\sqrt{D}}\sin\beta_j x_2, j = 1,2,\cdots\right\}
$$

是由下列常微分方程边值问题

$$z'' + \lambda z = 0, \quad z(x_2 + 2D_s) = z(x_2)$$

的特征值 $\lambda_{2j} = \beta_j^2 = \left(\dfrac{j\pi}{D_s}\right)^2 \ (j = 0, 1, \cdots)$ 对应的特征函数系构成的标准正交基和

$$\{w_k(x_3)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2D}}, \frac{1}{\sqrt{D}}\cos\gamma_k x_3, \frac{1}{\sqrt{D}}\sin\gamma_k x_3, k = 1, 2, \cdots\right\}$$

是下列常微分方程边值问题

$$w'' + \lambda w = 0, \quad w(x_3 + 2D_s) = w(x_3)$$

的特征值 $\lambda_{3k} = \gamma_k^2 = \left(\dfrac{k\pi}{D_s}\right)^2 \ (k = 0, 1, \cdots)$ 对应的特征函数系构成的标准正交基. 按照引理 1.8.11, 函数系 $\{y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3), i, j, k = 0, 1, \cdots\}$ 构成 $L^2(\overline{\Omega}_s)$ 中的一标准正交基.

设问题 (3.11.42)–(3.11.44) 的 Galerkin 近似解为

$$u_{N_s}(x,t) = \sum_{i,j,k=0}^{N_s} P_{N_sijk}(t)y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3),$$

其中 $P_{N_sijk}(t)$ 是待定系数. 这系数应满足 Cauchy 问题

$$(u_{N_stt} + k_1\nabla^4 u_{N_s} + k_2\nabla^4 u_{N_st} + \nabla^2 g(\nabla^2 u_{N_s}), y_iz_jw_k) = 0, \tag{3.11.45}$$

$$\begin{aligned} P_{N_sijk}(0) &= (u_{0sN_s}, y_iz_jw_k) = (\tilde{\varphi}_{ijk}, \dot{P}_{N_sijk}(0)) \\ &= (u_{1sN_s}, y_iz_jw_k) = \tilde{\psi}_{ijk}, \end{aligned} \tag{3.11.46}$$

其中

$$\begin{aligned} u_{0sN_s}(x) &= \sum_{i,j,k=0}^{N_s} (\tilde{\varphi}_{ijk}y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3), u_{1sN_s}(x)) \\ &= \sum_{i,j,k=0}^{N_s} \tilde{\psi}_{ijk}y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3) \end{aligned}$$

和 $\tilde{\varphi}_{ijk}, \tilde{\psi}_{ijk} (i, j, k = 0, 1, \cdots, N_s)$ 是常数. 正如在引理 3.11.1 中我们知道, Cauchy 问题 (3.11.45), (3.11.46) 总存在局部解. 令 $[0, T_{N_s})$ 是解存在的最大时间区间和

$$\begin{aligned} E_{N_s}(t) = &\sum_{h,l,m=0}^{N_s}\left(1 + \sum_{\substack{i+j+k=8 \\ i,j,k=0,2,4,6,8}} \alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k\right)\dot{P}_{N_shlm}^2 + k_1\sum_{h,l,m=0}^{N_s}\Bigg(1 + \alpha_h^4 + \beta_l^4 + \gamma_m^4 \\ &+ 2\sum_{\substack{i+j+k=4 \\ i,j,k=0,2}} \alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k + \alpha_h^{12} + \beta_l^{12} + \gamma_m^{12} + 3\sum_{\substack{i+j+k=12 \\ i,j,k=0,2,10}} \alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k \end{aligned}$$

$$+4\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=0,4,6,8}}\alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k+7\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=2,8}}\alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k$$

$$+8\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=2,4,6}}\alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k+9\alpha_h^4\beta_l^4\gamma_m^4\Bigg)P_{N_shlm}^2+1. \tag{3.11.47}$$

对于任意的 s,

$$\begin{aligned}&\lim_{N_s\to\infty}E_{N_s}(0)\\ =&A_s<\overline{A}=\sum_{h,l,m=0}^{\infty}\Bigg(1+\sum_{\substack{i+j+k=8\\ i,j,k=0,2,4,6,8}}\alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k\Bigg)\tilde{\psi}_{hlm}^2\\ &+k_1\sum_{h,l,m=0}^{\infty}\Bigg(1+\alpha_h^4+\beta_l^4+\gamma_m^4+2\sum_{\substack{i+j+k=4\\ i,j,k=0,2}}\alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k+\alpha_h^{12}+\beta_l^{12}+\gamma_m^{12}\\ &+3\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=0,2,10}}\alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k+4\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=0,4,6,8}}\alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k+7\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=2,8}}\alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k\\ &+8\sum_{\substack{i+j+k=12\\ i,j,k=2,4,6}}\alpha_h^i\beta_l^j\gamma_m^k+9\alpha_h^4\beta_l^4\gamma_m^4\Bigg)\tilde{\varphi}_{hlm}^2+1<\infty.\end{aligned} \tag{3.11.48}$$

应用引理 3.11.1 中的同样方法可得

$$\frac{d}{dt}E_{N_s}(t)\leqslant\overline{K}_3(E_{N_s}(t))^q, \tag{3.11.49}$$

其中 $\overline{K}_3$ 是一不依赖于 N_s 和 $\overline{\Omega}_s$ 的常数.

对于任意的 $t\in(0,T_{N_s})$, 由式 (3.11.49) 推出

$$E_{N_s}(t)\leqslant\frac{\overline{A}}{[1-(q-1)\overline{K}_3\overline{A}^{q-1}t]^{\frac{1}{q-1}}}=\overline{M}. \tag{3.11.50}$$

如果取 t_2 满足

$$a_1\geqslant 1-(q-1)\overline{K}_3\overline{A}^{q-1}t_2>0, \tag{3.11.51}$$

其中 $0<a_1<1$, 则式 (3.11.50) 在 $[0,t_2]$ 上成立. 由式 (3.11.51) 知

$$\frac{1-a_1}{(q-1)\overline{K}_3\overline{A}^{q-1}}\leqslant t_2<\frac{1}{(q-1)\overline{K}_3\overline{A}^{q-1}}, \tag{3.11.52}$$

其中 $\dfrac{1-a_1}{(q-1)\overline{K}_3\overline{A}^{q-1}}>0$ 是一常数. 这指出 T_{N_s} 有正下界.

利用得到估计 (3.11.26) 的同样方法, 有估计

$$\|u_{N_s}\|_{H^6(\Omega_s)} + \|u_{N_st}\|_{H^4(\Omega_s)} + \|u_{N_stt}\|_{L^2(\Omega_s)} \leqslant C_{24}, \quad t \in [0, t_2], \tag{3.11.53}$$

其中 C_{24} 是一不依赖于 N_s 和 Ω_s 的常数.

由 Sobolev 嵌入定理得

$$\|u_{N_s}\|_{C^{4,\lambda}(\overline{\Omega}_s)} + \|u_{N_st}\|_{C^{2,\lambda}(\overline{\Omega}_s)} \leqslant C_{25}, \quad t \in [0, t_2], \tag{3.11.54}$$

其中 $0 < \lambda < 1$ 和 C_{25} 是一不依赖于 N_s 和 Ω_s 的常数.

根据式 (3.11.54) 和 Ascoli-Arzelá 定理可以从 $\{u_{N_s}(x,t)\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{u_{N_s}(x,t)\}$, 使得当 $N_s \to \infty$ 时, 子序列 $\{u_{N_s}(x,t)\}$ 和 $\{\Delta u_{N_s}(x,t)\}$ 在 $\overline{\Omega}_s \times [0, t_2]$ 上分别一致收敛于极限函数 $\{u_s(x,t)\}$ 和 $\{\Delta u_s(x,t)\}$.

估计 (3.11.53) 对于上面子序列 $\{u_{N_s}(x,t)\}$ 仍成立. 因此可以从 $\{u_{N_s}(x,t)\}$ 中抽出一子序列, 仍记为 $\{u_{N_s}(x,t)\}$, 使得当 $N_s \to \infty$ 时, 子序列 $\{\Delta^2 u_{N_s}(x,t)\}$, $\{(\nabla\Delta u_{N_s}(x,t))^2\}$, $\{\Delta^2 u_{N_st}(x,t)\}$ 和 $\{u_{N_stt}(x,t)\}$ 分别在 $L^2((0,t_2);L^2(\Omega_s))$ 中弱收敛于极限函数 $\{\Delta^2 u_s(x,t)\}$,$\{(\nabla\Delta u_s(x,t))^2\}$,$\{(\Delta^2 u_{st}(x,t))\}$ 和 $\{u_{stt}(x,t)\}$. 从共鸣定理 [241] 的推论知, 估计 (3.11.53) 和 (3.11.54) 对于 $u_s(x,t)$ 仍成立, $u_s(x,t)$ 正是下列周期边值问题

$$\begin{aligned}
&u_{stt} + k_1\nabla^4 u_s + k_2\nabla^4 u_{st} + \nabla^2 g(\nabla^2 u_s) = 0,\\
&u_s(x,t) = u_s(x_1 + 2D_s, x_2, x_3, t) = u_s(x_1, x_2 + 2D_s, x_3, t) = u_s(x_1, x_2, x_3 + 2D_s, t),\\
&u_s(x,0) = u_{0s}(x), \quad u_{st}(x,0) = u_{1s}(x)
\end{aligned}$$

的局部广义解.

应用 Ascoli-Arzelá 定理可以从 $\{u_s(x,t)\}$ 中抽出一子序列, 仍记为 $\{u_s(x,t)\}$, 使得当 $s \to \infty$ 时, 子序列 $\{u_s(x,t)\}$ 和 $\{\Delta u_s(x,t)\}$ 在 $\{-L \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant L, 0 \leqslant t \leqslant t_2\}(L > 0)$ 上分别一致收敛于极限函数 $u(x,t)$ 和 $\Delta u(x,t)$. 由于式 (3.11.53) 可以从 $\{u_s(x,t)\}$ 中抽出一子序列, 仍记为 $\{u_s(x,t)\}$, 使得当 $s \to \infty$ 时, 子序列 $\{\Delta^2 u_s(x,t)\}$, $\{(\nabla\Delta u_s(x,t))^2\}$, $\{\Delta^2 u_{st}(x,t)\}$ 和 $\{u_{stt}(x,t)\}$ 在 $L^2((0,t_2);L^2((-L,L)\times(-L,L)\times(-L,L)))$ 中分别弱收敛于极限函数 $\Delta^2 u(x,t)$, $(\nabla\Delta u(x,t))^2$, $\Delta^2 u_t(x,t)$ 和 $u_{tt}(x,t)$. 得到的极限函数 $u(x,t)$ 正是 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 的局部广义解.

利用在定理 3.11.1 中同样的方法和引理 1.7.6 易证, Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 的解是唯一的. 所以 Cauchy 问题 (3.11.1),(3.11.2) 有唯一局部广义解.

类似地, 可以证明, 如果 $g \in C^{10}(\mathbb{R})$, $u_0 \in H^{12}(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in H^{10}(\mathbb{R}^3)$, 则 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 有唯一局部古典解. □

3.11.4 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 解的爆破

定理 3.11.4 设 $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $G(\Delta u_0) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ 和存在常数 $\beta > 0$, 使得

$$sg(s) \leqslant 2(2\beta+1)G(s) + 2\beta k_1 s^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.11.55}$$

其中 $G(s) = \int_0^s g(\tau)d\tau$, 则 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 的广义解 $u(x,t)$ 或古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E(0) < 0$;

(2) $E(0) = 0$, 和 $2\beta \int_{\mathbb{R}^3} u_0 u_1 dx - k_2 \|\Delta u_0\|^2 > 0$;

(3) $E(0) > 0$, $\int_{\mathbb{R}^3} u_0 u_1 dx > 0$ 和 $4\beta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_0 u_1 dx\right)^2 - 4\beta^2 E(0)\|u_0\|^2 - \|u_0\|^4$

$$-2k_2\|u_0\|^2\|\Delta u_0\|^2 - k_2^2\|\Delta u_0\|^4 > 4k_2\beta^2 E(0)\|\Delta u_0\|^2,$$

其中 $E(0) = \|u_1\|^2 + k_1\|\Delta u_0\|^2 + 2\int_{\mathbb{R}^3} G(\Delta u_0)dx$.

证明 设 Cauchy 问题 (3.11.1), (3.11.2) 的解存在的最大时间为无穷. 方程 (3.11.1) 两端同乘以 $2u_t$, 在 $\mathbb{R}^3$ 上积分, 得

$$\dot{E}(t) = 0, \quad t > 0,$$

其中

$$\begin{aligned} E(t) = {} & \|u_t(\cdot,t)\|^2 + k_1\|\Delta u(\cdot,t)\|^2 \\ & + 2k_2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta u_\tau(x,\tau))^2 dx d\tau + 2\int_{\mathbb{R}^3} G(\Delta u(x,t))dx. \end{aligned}$$

所以

$$E(t) = E(0), \quad t > 0. \tag{3.11.56}$$

令

$$H(t) = \|u(\cdot,t)\|^2 + k_2 \int_0^t \|\Delta u(\cdot,\tau)\|^2 d\tau + k_2(T_0 - t)\|\Delta u_0\|^2 + \alpha(t+t_0)^2,$$

其中 $T_0 > 0, t > 0$ 和 $\alpha \geqslant 0$ 是待定常数. 我们有

$$\dot{H}(t) = 2\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)u_t(x,t)dx + k_2\|\Delta u(\cdot,t)\|^2 - k_2\|\Delta u_0\|^2 + 2\alpha(t+t_0),$$

$$\begin{aligned}\dot{H}^2(t)=&\left[2\int_{\mathbb{R}^3}u(x,t)u_t(x,t)dx+2k_2\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\Delta u(x,\tau)\Delta u_\tau(x,\tau)d\tau dx+2\alpha(t+t_0)\right]^2\\ \leqslant&4\left[\|u(\cdot,t)\|^2+k_2\int_0^t\|\Delta u(\cdot,\tau)\|^2d\tau+\alpha(t+t_0)^2\right]\\ &\times\left[\|u_t(\cdot,t)\|^2+k_2\int_0^t\|\Delta u_\tau(\cdot,\tau)\|^2d\tau+\alpha\right]\\ \leqslant&4H(t)\left[\|u_t(\cdot,t)\|^2+k_2\int_0^t\|\Delta u_\tau(\cdot,\tau)\|^2d\tau+\alpha\right]\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\ddot{H}(t)=&2\left[\|u_t(\cdot,t)\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}u(x,t)u_{tt}(x,t)dx+k_2\int_{\mathbb{R}^3}\Delta u(x,t)\Delta u_t(x,t)dx+\alpha\right]\\ =&2\left[\|u_t(\cdot,t)\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}u(x,t)(u_{tt}(x,t)+k_2\Delta^2u_t(x,t))dx+\alpha\right]\\ =&2\left[\|u_t(\cdot,t)\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}u(x,t)(-k_1\Delta^2u(x,t)-\Delta g(\Delta u(x,t)))dx+\alpha\right]\\ =&2\left[\|u_t(\cdot,t)\|^2-k_1\|\Delta u(\cdot,t)\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}\Delta u(x,t)g(\Delta u(x,t))dx+\alpha\right].\end{aligned}\tag{3.11.57}$$

由式 (3.11.56) 和式 (3.11.57) 推得

$$\begin{aligned}&\ddot{H}(t)H(t)-(\beta+1)\dot{H}^2(t)\\ \geqslant&H(t)\left[-2(2\beta+1)\|u_t(\cdot,t)\|^2-2k_1\|\Delta u(\cdot,t)\|^2-2\int_{\mathbb{R}^3}\Delta u(x,t)g(\Delta u(x,t))dx\right.\\ &\left.-4(\beta+1)k_2\int_0^t\|\Delta u_\tau(\cdot,\tau)\|^2d\tau-2\alpha(2\beta+1)\right].\end{aligned}\tag{3.11.58}$$

应用能量等式 (3.11.56) 和假定 (3.11.55), 则式 (3.11.57) 变为

$$\ddot{H}(t)H(t)-(\beta+1)\dot{H}^2(t)\geqslant2(2\beta+1)H(t)[-E(0)-\alpha].\tag{3.11.59}$$

如果 $E(0)<0$, 取 $\alpha=-E(0)$, 则从式 (3.11.59) 得

$$\ddot{H}(t)H(t)-(\beta+1)\dot{H}^2(t)\geqslant0.$$

若选 T_0 和 t_0 使得 $\dfrac{H(0)}{\beta\dot{H}(0)}\leqslant T_0$, 则根据引理 1.8.7 存在 $T_1\leqslant\dfrac{H(0)}{\beta\dot{H}(0)}$, 使得当 $t\to T_1^-$ 时, $H(t)\to\infty$. 这与解存在的最大时间为无穷的事实矛盾.

为了完成证明, 需要确定 T_0 和 t_0 是正常数. 显然, 如果 t_0 充分大, 则

$$\dot{H}(0)=2\int_{\mathbb{R}^3}u_0(x)u_1(x)dx+2\alpha t_0>0.\tag{3.11.60}$$

同时, $H(0) \leqslant \beta \dot{H}(0) T_0$ 当且仅当

$$\|u_0\|^2 + \alpha t_0^2 \leqslant 2\beta T_0 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) u_1(x) dx + \alpha t_0 - \frac{k_2}{2\beta} \|\Delta u_0\|^2 \right). \tag{3.11.61}$$

现在选择 t_0 充分大, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) u_1(x) dx + \alpha t_0 - \frac{k_2}{2\beta} \|\Delta u_0\|^2 > 0 \tag{3.11.62}$$

和令

$$T_0 = \frac{\|u_0\|^2 + \alpha t_0^2}{2\beta \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) u_1(x) dx + \alpha t_0 - \frac{k_2}{2\beta} \|\Delta u_0\|^2 \right)}. \tag{3.11.63}$$

通过 t_0 极小化,t_0 有

$$\begin{aligned} t_0 = \frac{1}{\alpha} \Bigg[& \frac{k_2}{2\beta} \|\Delta u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) u_1(x) dx \\ & + \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) u_1(x) dx - \frac{k_2}{2\beta} \|\Delta u_0\|^2 \right)^2 + \alpha \|u_0\|^2} \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.11.64}$$

将式 (3.11.64) 代入式 (3.11.63), 得有限常数 T_0. 显然, 式 (3.11.64) 中的 t_0 是正的, 且满足式 (3.11.60) 和式 (3.11.62).

如果 $E(0) = 0$, 取 $\alpha = 0$, 则式 (3.11.59) 变为

$$\ddot{H}(t) H(t) - (\beta + 1) \dot{H}^2(t) \geqslant 0.$$

因为 $\dot{H}(0) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) u_1(x) dx > 0$, 取

$$T_0 = \frac{\|u_0\|^2}{2\beta \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) u_1(x) dx - k_2 \|\Delta u_0\|^2},$$

使得 $\dfrac{H(0)}{\beta \dot{H}(0)} \leqslant T_0$. 于是根据凸性引理知, 当 $t \to T_2^- \left(T_2 \leqslant \dfrac{H(0)}{\beta \dot{H}(0)} \right)$ 时, $H(t) \to \infty$. 这与解存在的最大时间为无穷的事实矛盾. 所以解存在的最大时间是有限的.

如果 $E(0) > 0$, 取 $\alpha = 0$, 则由式 (3.11.59) 推出

$$\ddot{H}(t) H(t) - (\beta + 1) \dot{H}^2(t) \geqslant -2(2\beta + 1) E(0) H(t). \tag{3.11.65}$$

定义

$$J(t) = -H^{-\beta}(t),$$

从而

$$\dot{J}(t) = \beta H^{-\beta-1}(t)\dot{H}(t),$$
$$\ddot{J}(t) = \beta H^{-\beta-2}(t)[\ddot{H}(t)H(t) - (\beta+1)\dot{H}^2(t)] \geqslant -2\beta(2\beta+1)E(0)H^{-\beta-1}(t). \quad (3.11.66)$$

利用假定 (3), 发现 $\dot{J}(0) > 0$. 令

$$t^* = \sup\{\, t \,|\dot{J}(\tau) > 0,\ \tau \in [0,t)\}. \quad (3.11.67)$$

由于 $\dot{J}(t)$ 的连续性, t^* 是正的. 式 (3.11.66) 两端同乘以 $2\dot{J}(t)$, 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\dot{J}(t)]^2 &\geqslant -4\beta^2(2\beta+1)E(0)H^{-2\beta-2}(t)\dot{H}(t)\\ &= 4\beta^2 E(0)\frac{d}{dt}H^{-2\beta-1}(t), \quad t \in [0,t^*).\end{aligned} \quad (3.11.68)$$

式 (3.11.68) 对 t 积分知

$$\dot{J}^2(t) \geqslant \dot{J}^2(0) + 4\beta^2 E(0)H^{-2\beta-1}(t) - 4\beta^2 E(0)H^{-2\beta-1}(0). \quad (3.11.69)$$

如果 T_0 充分小, 则

$$\dot{J}^2(0) - 4\beta^2 E(0)H^{-2\beta-1}(0) > 0,$$

即

$$\left(2\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)u_1(x)dx\right)^2 - 4E(0)[\|u_0\|^2 + k_2T_0\|\Delta u_0\|^2] > 0. \quad (3.11.70)$$

因此根据 $\dot{J}(t)$ 的连续性, 由式 (3.11.69) 断言

$$\dot{J}(t) \geqslant [\dot{J}^2(0) - 4\beta^2 E(0)H^{-2\beta-1}(0)]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leqslant t < t^*. \quad (3.11.71)$$

根据 t^* 的定义推出式 (3.11.71) 对所有的 $t \geqslant 0$ 成立. 所以

$$J(t) \geqslant J(0) + [\dot{J}^2(0) - 4\beta^2 E(0)H^{-2\beta-1}(0)]^{\frac{1}{2}}t, \quad \forall t > 0.$$

现在选择 T_0 使得

$$\frac{-J(0)}{[\dot{J}^2(0) - 4\beta^2 E(0)H^{-2\beta-1}(0)]^{\frac{1}{2}}} < T_0. \quad (3.11.72)$$

由式 (3.11.72) 看出

$$\begin{aligned}&\|u_0\|^4 + 2k_2T_0\|u_0\|^2\|\Delta u_0\|^2 + k_2^2T_0^2\|\Delta u_0\|^4\\ &< 4\beta^2T_0^2\left[\left(\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)u_1(x)dx\right)^2 - E(0)\|u_0\|^2 - k_2T_0E(0)\|\Delta u_0\|^2\right].\end{aligned} \quad (3.11.73)$$

如果取 $T_0 = A > 1$, 则由式 (3.11.73) 知

$$A < \frac{1}{4k_2\beta^2 E(0)\|\Delta u_0\|^2}\left[4\beta^2\left(\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)u_1(x)dx\right)^2 - 4\beta^2 E(0)\|u_0\|^2 \right.$$
$$\left. - \|u_0\|^4 - 2k_2\|u_0\|^2\|\Delta u_0\|^2 - k_2^2\|\Delta u_0\|^4\right].$$

最后 T_0 满足

$$1 < A = T_0 < \frac{1}{4k_2\beta^2 E(0)\|\Delta u_0\|^2}\left[4\beta^2\left(\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)u_1(x)dx\right)^2 - 4\beta^2 E(0)\|u_0\|^2 \right.$$
$$\left. - \|u_0\|^4 - 2k_2\|u_0\|^2\|\Delta u_0\|^2 - k_2^2\|\Delta u_0\|^4\right]$$

是所要求的. 显然, 上面的 T_0 满足式 (3.11.70) 和式 (3.11.72). 所以存在 T_3,

$$0 < T_3 \leqslant \frac{-J(0)}{[\dot{J}^2(0) - 4\beta^2 E(0)H^{-2\beta-1}(0)]^{\frac{1}{2}}} < T_0,$$

使得 $J(T_3) = 0$. 因此当 $t \to T_3^-$ 时, $H(t) \to \infty$.

这与解存在的最大时间是无穷的事实矛盾. □

3.11.5 例子

下面举一个例子说明满足定理 3.11.4 中的函数 $g(s)$, $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是存在的. 因为定理 3.11.4 对于一维的方程 (3.11.1) 的情况也成立, 为了简单起见, 我们将以一维的情况说明.

例 首先讨论 $E(0) < 0$ 的情况. 为此, 取 $g(s) = s^2$, $u_0(x) = e^{-x^2}$ 和 $u_1(x) = e^{-x^2}$. 显然, $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in L^2(\mathbb{R})$, $G(u_{0xx}) \in L^1(\mathbb{R})$, $sg(s) = s^3$ 和

$$2(2\beta+1)G(s) + 2\beta k_1 s^2 = \frac{2(2\beta+1)}{3}s^3 + 2\beta k_1 s^2.$$

因此, 当 $\beta = \dfrac{1}{4}$ 和 $k_1 > 0$ 时, $g(s)$ 满足不等式 (3.11.55). 于是可得 $\|u_0\|^2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $\|u_{0xx}\|^2 = 3\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u_0u_1dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 和

$$\begin{aligned} E(0) &= \|u_1\|^2 + k_1\|u_{0xx}\|^2 + 2\int_{-\infty}^{\infty} G(u_{0xx})dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}dx + k_1\int_{-\infty}^{\infty} 4(1-4x^2+4x^4)e^{-2x^2}dx \\ &\quad + \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-8e^{-3x^2} + 48x^2e^{-3x^2} - 96x^4e^{-3x^2} + 64x^6e^{-3x^2}\right)dx \\ &= (1+3k_1)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{64}{27}\sqrt{\frac{\pi}{3}}. \end{aligned} \tag{3.11.74}$$

所以当 $0 < k_1 < \frac{1}{243}(64\sqrt{6}-81) \approx 0.3118$ 时, 由式 (3.11.74) 看出 $E(0) < 0$. 取 $k_1 = 0.0458$ 和 $k_2 = \frac{1}{2}$, 则 $E(0) = -1 < 0$, $\alpha = -E(0) = 1$,

$$\begin{aligned} t_0 = & \frac{1}{\alpha}\left[\frac{k_2}{2\beta}\|u_{0xx}\|^2 - \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx \right. \\ & \left. + \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx - \frac{k_2}{2\beta}\|u_{0xx}\|^2\right)^2 + \alpha\|u_0\|^2}\,\right] \\ = & 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \\ = & 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2\pi + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}(\approx 5.2519), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_0 = & \frac{\|u_0\|^2 + \alpha t_0^2}{2\beta\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx + \alpha t_0 - \frac{k_2}{2\beta}\|u_{0xx}\|^2\right)} \\ = & 4\left(\sqrt{2\pi + \sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \sqrt{2\pi}\right)(\approx 21.0076), \end{aligned}$$

$$H(0) = \|u_0\|^2 + k_2 T_0\|u_{0xx}\|^2 + t_0^2 = 10\pi + 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 10\sqrt{\pi^2 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

和

$$\dot{H}(0) = 2\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx + 2t_0^2 = 2\left(3\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2\pi + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right).$$

所以在一维情况下满足定理 3.11.4 的条件. 于是存在 $T_1 \leqslant \frac{H(0)}{\beta \dot{H}(0)} \approx 21.0077$, 使得当 $t \to T_1^-$ 时, $H(t) \to \infty$.

其次研究 $E(0) = 0$ 的情况. 仍取 $g(s) = s^2$, $u_0(x) = e^{-x^2}$ 和 $u_1(x) = e^{-x^2}$, 则

$$2\beta\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx - k_2\|u_{0xx}\|^2 = (2\beta - 3k_2)\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{3.11.75}$$

所以当 $\beta = \frac{1}{4}$, $k_1 = \frac{1}{243}(64\sqrt{6}-81)$ 时, 看出 $g(s)$ 满足不等式 (3.11.55) 和由式 (3.11.74) 推出 $E(0) = 0$. 当 $\beta = \frac{1}{4}$, $0 < k_2 < \frac{1}{6}$ 时, $2\beta\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx -$

$k_2\|u_{0xx}\|^2>0$. 取 $k_2=\dfrac{1}{8}$ 和 $\alpha=0$, 则

$$T_0=\frac{\|u_0\|^2}{2\beta\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u_0(x)u_1(x)dx-k_2\|u_{0xx}\|^2}=8.$$

进一步

$$H(0)=\|u_0\|^2+k_2T_0\|u_{0xx}\|^2=4\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \dot{H}(0)=2\int_{-\infty}^{\infty}u_0(x)u_1(x)dx=2\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

于是在一维情况下满足定理 3.11.4 的条件. 存在 $T_2\leqslant\dfrac{H(0)}{\beta\dot{H}(0)}=8$, 使得当 $t\to T_2^-$ 时, $H(t)\to\infty$.

最后考虑 $E(0)>0$ 的情况. 现在取 $g(s)=s^2$, $u_0(x)=8e^{-x^2}$ 和 $u_1(x)=32e^{-x^2}$. 显然, $u_0\in H^2(\mathbb{R})$, $u_1\in L^2(\mathbb{R})$, $G(u_{0xx})\in L^1(\mathbb{R})$, $sg(s)=s^3$ 和

$$2(2\beta+1)G(s)+2\beta k_1s^2=\frac{2(2\beta+1)}{3}s^3+2\beta k_1s^2.$$

所以当 $\beta=\dfrac{1}{4}$ 和 $k_1>0$ 时, $g(s)$ 满足不等式 (3.11.55). 我们有

$$\begin{aligned}
E(0)&=\|u_1\|^2+k_1\|u_{0xx}\|^2+2\int_{-\infty}^{\infty}G(u_{0xx})dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}(32e^{-x^2})^2dx+k_1\int_{-\infty}^{\infty}(-16e^{-x^2}+32x^2e^{-x^2})^2dx+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{u_{0xx}}\tau^2d\tau dx\\
&=2048\int_0^{\infty}e^{-2x^2}dx+2k_1\int_0^{\infty}(256e^{-2x^2}-1024x^2e^{-2x^2}+1024x^4e^{-2x^2})dx\\
&\quad+\frac{4}{3}\int_0^{\infty}(-4096e^{-3x^2}+24576x^2e^{-3x^2}-49152x^4e^{-3x^2}+32768x^6e^{-3x^2})dx\\
&=(1024+192k_1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{32768}{27}\sqrt{\frac{\pi}{3}}.
\end{aligned}\tag{3.11.76}$$

显然, 当 $k_1>0$ 时, $E(0)>0$ 总是正确的. 取

$$k_1=\frac{1350\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}+32768\sqrt{\dfrac{2}{3}}-27648}{5184}(\approx 0.0355),$$

于是 $E(0)=50$.

因为 $\|u_0\|^2 = 64\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\|u_{0xx}\|^2 = 192\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 和

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx = 256\sqrt{\frac{\pi}{2}} > 0.$$

现在取 $k_2 = 0.1$, 则

$$\begin{aligned}&4\beta^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx\right)^2 - 4\beta^2E(0)\|u_0\|^2 - \|u_0\|^4\\&- 2k_2\|u_0\|^2\|u_{0xx}\|^2 - k_2^2\|u_{0xx}\|^4 - 4k_2\beta^2E(0)\|u_{0xx}\|^2\\&= 4730.88\pi - 1040\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 13559.0512 > 0.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4k_2\beta^2E(0)\|u_{0xx}\|^2}\left[4\beta^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx\right)^2 - 4\beta^2E(0)\|u_0\|^2\right.\\&\left.- \|u_0\|^4 - 2k_2\|u_0\|\|u_{0xx}\|^2 - k_2^2\|u_{0xx}\|^4\right]\\&= \frac{4730.88\pi - 800\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{240\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\end{aligned}$$

取

$$1 < A = T_0 = \frac{3200\pi - 800\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{240\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \approx 30.0884.$$

我们有

$$\begin{aligned}H(0) &= \|u_0\|^2 + k_2T_0\|u_{0xx}\|^2 = 256\pi,\\\dot{H}(0) &= 2\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)u_1(x)dx = 512\sqrt{\frac{\pi}{2}},\\J(0) &= -H^{-\beta}(0) = -\frac{1}{4}\pi^{-\frac{1}{4}},\\\dot{J}(0) &= \beta H^{-\beta-1}(0)\dot{H}(0) = \frac{1}{8}\pi^{-\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

则在一维情况下定理 3.11.4 的条件满足. 所以存在

$$T_3 \leqslant \frac{-J(0)}{[\dot{J}^2(0) - 4\beta^2E(0)H^{-2\beta-1}(0)]^{\frac{1}{2}}} = 16\sqrt{\frac{2\pi}{39}} \approx 6.4221,$$

使得 $J(T_3) = 0$. 因此当 $t \to T_3^-$ 时, $H(t) \to \infty$.

3.11.6　与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [247]. 与本节有关的文献见 [24], [28], [53], [77], [101], [248]–[251].

3.12　广义 IMBq 方程 Cauchy 问题的小振幅整体解

3.12.1　引言

本节研究下列多维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u = \Delta f(u), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \tag{3.12.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.12.2}$$

其中 $u(x,t)$ 是未知函数, $f(u)$ 是给定的非线性函数, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是已知的初值函数. 下面将证明 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 存在唯一小振幅解, 且给出 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 小初值的一非线性散射结果.

3.12.2　线性化方程的估计

现在考虑方程 (3.12.1) 的线性化方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u = \Delta g(x,t), \tag{3.12.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{3.12.4}$$

应用 Fourier 变换, 如果 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 存在解, 则 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 的解可以写为

$$u(x,t) = \partial_t B(t)\varphi(x) + B(t)\psi(x) + \int_0^t T(t-\tau)g(x,\tau)d\tau, \tag{3.12.5}$$

其中 $T(t) = B(t)(I-\Delta)^{-1}\Delta$,

$$\partial_t B(t)\varphi(x) = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\cos\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi, \tag{3.12.6}$$

$$B(t)\psi(x) = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\psi}(\xi)d\xi, \tag{3.12.7}$$

$$\int_0^t T(t-\tau)g(x,\tau)d\tau = -(2\pi)^{-N}\int_0^t\left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\sin\frac{(t-\tau)|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{g}(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau. \tag{3.12.8}$$

上面用到了 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^N}e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$.

引理 3.12.1 (Van der Corput[17,252]) 设 $h(r)$ 或者是凸的或者是凹的二次可导函数, 且 $F(r)$ 是在 $[a,b](-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$ 上的连续可导函数, 则对于在 $[a,b]$ 上 $h''(r)\neq 0$,

$$\left|\int_a^b e^{ih(r)}F(r)dr\right|\leqslant 4\left\{\min_{[a,b]}|h''(r)|\right\}^{-\frac{1}{2}}\left[|F(b)|+\int_a^b|F'(r)|dr\right].$$

引理 3.12.2 对于 $N_0(N_0$ 为自然数), $t>1$ 和 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$, 有

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0}e^{it\left(\frac{x\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}F(\xi)d\xi\right|\\&\leqslant C\max\{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}},N_0^2\}t^{\frac{1}{2}}N_0^{N-1}\left[\|F\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_\varepsilon^{N_0}|F'(r)|dr\right],\end{aligned}\tag{3.12.9}$$

其中 $F(\xi)=F(|\xi|)=F(r)$.

证明 步骤 1. $N=1$ 的情况.

令

$$h_1(\xi,x)=\frac{x\cdot\xi}{t}\pm\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}},\quad \xi>0\tag{3.12.10}$$

和

$$h_2(\xi,x)=\frac{x\cdot\xi}{t}\mp\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}},\quad \xi<0.\tag{3.12.11}$$

通过直接计算, 可得

$$\frac{\partial h_1(\xi,x)}{\partial\xi}=\frac{x}{t}\pm(1+\xi^2)^{-\frac{3}{2}},\quad \frac{\partial h_2(\xi,x)}{\partial\xi}=\frac{x}{t}\mp(1+\xi^2)^{-\frac{3}{2}},\tag{3.12.12}$$

$$\frac{\partial^2 h_1(\xi,x)}{\partial\xi^2}=\mp3\xi(1+\xi^2)^{-\frac{5}{2}},\quad \frac{\partial^2 h_2(\xi,x)}{\partial\xi^2}=\pm3\xi(1+\xi^2)^{-\frac{5}{2}},\tag{3.12.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 h_1(\xi,x)}{\partial\xi^3}&=\mp3(2\xi-1)(2\xi+1)(1+\xi^2)^{-\frac{7}{2}},\\ \frac{\partial^3 h_2(\xi,x)}{\partial\xi^3}&=\pm3(2\xi-1)(2\xi+1)(1+\xi^2)^{-\frac{7}{2}}.\end{aligned}\tag{3.12.14}$$

因此

(i) $\dfrac{\partial^2 h_1(\xi,x)}{\partial\xi^2}<0(>0),\xi>0$;

(ii) $\dfrac{\partial^2 h_2(\xi,x)}{\partial\xi^2}<0(>0),\xi<0$;

(iii) 对于 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}, N_0>1$,

$$\min_{[\varepsilon,N_0]}\left|\frac{\partial^2 h_1(\xi,x)}{\partial\xi^2}\right|=\min\left\{\left|\frac{\partial^2 h_1(\varepsilon,x)}{\partial\xi^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 h_1(N_0,x)}{\partial\xi^2}\right|\right\}\geqslant\frac{3}{2^{\frac{7}{2}}}\min\{2\varepsilon,(N_0)^{-4}\};$$

(iv) 对于 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}, N_0>1$,

$$\begin{aligned}\min_{[-N_0,-\varepsilon]}\left|\frac{\partial^2 h_2(\xi,x)}{\partial\xi^2}\right|&=\min\left\{\left|\frac{\partial^2 h_2(-\varepsilon,x)}{\partial\xi^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 h_2(-N_0,x)}{\partial\xi^2}\right|\right\}\\&\geqslant\frac{3}{2^{\frac{7}{2}}}\min\{2\varepsilon,(N_0)^{-4}\}.\end{aligned}$$

事实上, (i) 和 (ii) 是显然的. 因为 (iii) 和 (iv) 是类似的, 我们取 (iii) 作为例子加以证明, 类似地, 可以证明 (iv).

对于 $\xi>0$, 令 $f(\xi)=\left|\dfrac{\partial^2 h_1(\xi,x)}{\partial\xi^2}\right|$, 由式 (3.12.13) 和 (3.12.14) 得

$$f'(\xi)=-3(2\xi-1)(2\xi+1)(1+\xi^2)^{-\frac{7}{2}},$$

由此推出

$$\begin{cases}f'(\xi)>0, & \varepsilon\leqslant\xi<\dfrac{1}{2},\\ f'(\xi)<0, & \dfrac{1}{2}<\xi\leqslant N_0.\end{cases}$$

注意到 (i) 有 $\max\limits_{[\varepsilon,N_0]}f(\xi)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 和

$$\begin{aligned}\min_{[\varepsilon,N_0]}\left|\frac{\partial^2 h_1(\xi,x)}{\partial\xi^2}\right|&=\min_{[\varepsilon,N_0]}f(\xi)=\min\{f(\varepsilon),f(N_0)\}\\&=\min\left\{\left|\frac{\partial^2 h_1(\varepsilon,x)}{\partial\xi^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 h_1(N_0,x)}{\partial\xi^2}\right|\right\}\\&=\min\left\{\frac{3\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}},\frac{3N_0}{(1+(N_0)^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}\\&\geqslant\min\left\{\frac{3\varepsilon}{(1+1^2)^{\frac{5}{2}}},\frac{3N_0}{((N_0)^2+(N_0)^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}\\&\geqslant\frac{3}{2^{\frac{7}{2}}}\min\{2\varepsilon,(N_0)^{-4}\}.\end{aligned}$$

这就完成了 (iii) 的证明. 因为下面对 h_1 和 h_2 的估计, 多数情况涉及变量 ξ, 为了方便起见, 对 h_1 和 h_2 只写变量 ξ.

根据引理 3.12.1 得

$$
\begin{aligned}
I_1 =& \left| \int_{\varepsilon}^{N_0} e^{ith_1(\xi)} F(\xi) d\xi \right| \\
\leqslant & 4 \left\{ \min_{[\varepsilon, N_0]} |th_1''(\xi)| \right\}^{-\frac{1}{2}} \left[|F(N_0)| + \int_{\varepsilon}^{N_0} |F'(\xi)| d\xi \right] \\
\leqslant & 4t^{-\frac{1}{2}} \left\{ \min_{[\varepsilon, N_0]} |h_1''(\xi)| \right\}^{-\frac{1}{2}} \left[\|F\|_{L^\infty[\varepsilon, N_0]} + \int_{\varepsilon}^{N_0} |F'(r)| dr \right] \\
\leqslant & 4t^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2^{\frac{7}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \max\{(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}, (N_0)^2\} \times \left[\|F\|_{L^\infty[\varepsilon, N_0]} + \int_{\varepsilon}^{N_0} |F'(r)| dr \right] \quad (3.12.15)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
I_2 =& \left| \int_{-N_0}^{-\varepsilon} e^{ith_2(\xi)} F(\xi) d\xi \right| \\
\leqslant & 4 \left\{ \min_{[-N_0, -\varepsilon]} |th_2''(\xi)| \right\}^{-\frac{1}{2}} \left[|F(-\varepsilon)| + \int_{-N_0}^{-\varepsilon} |F'(\xi)| d\xi \right] \\
\leqslant & 4t^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2^{\frac{7}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \max\{(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}, (N_0)^2\} \times \left[\|F\|_{L^\infty[\varepsilon, N_0]} + \int_{\varepsilon}^{N_0} |F'(r)| dr \right], \quad (3.12.16)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_{\varepsilon \leqslant |\xi| \leqslant N_0} e^{it\left(\frac{x\cdot\xi}{t} \pm \frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)} F(\xi) d\xi \right| \\
\leqslant & \left| \int_{\varepsilon}^{N_0} e^{ith_1(\xi)} F(\xi) d\xi \right| + \left| \int_{-N_0}^{-\varepsilon} e^{ith_2(\xi)} F(\xi) d\xi \right| \\
\leqslant & Ct^{-\frac{1}{2}} \max\{(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}, (N_0)^2\} \left[\|F\|_{L^\infty[\varepsilon, N_0]} + \int_{\varepsilon}^{N_0} |F'(r)| dr \right], \quad (3.12.17)
\end{aligned}
$$

其中 $C = 8 \left(\frac{3}{2^{\frac{7}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

步骤 2. $N \geqslant 2$ 的情况.

应用球坐标和沿 x 方向取极坐标系, 因此 $x \cdot \xi = |x| r \cos\theta_1$. 由 $\int_0^\pi \sin^k \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \pi^{\frac{1}{2}}$ 得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0} e^{it\left(\frac{x\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}F(\xi)d\xi\\
=&\int_{\varepsilon}^{N_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} e^{it\left(\frac{|x|\cos\theta_1}{t}r\pm\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)}F(r)r^{N-1}\\
&\times\sin^{N-2}\theta_1\sin^{N-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{N-2}d\theta_{N-1}d\theta_{N-2}\cdots d\theta_2 d\theta_1 dr\\
=&\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{N-1}{2}\right)}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\varepsilon}^{N_0} e^{it\left(\frac{|x|\cos\theta_1}{t}r\pm\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)}F(r)r^{N-1}dr\right]\times\sin^{N-2}\theta_1 d\theta_1. \qquad (3.12.18)
\end{aligned}
$$

下证

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\varepsilon}^{N_0} e^{it\left(\frac{|x|\cos\theta_1}{t}r\pm\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)}F(r)r^{N-1}dr\right|\\
\leqslant& C\max\{(2\varepsilon)^{-\frac12},(N_0)^2\}t^{-\frac12}(N_0)^{N-1}\left[\|F\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_{\varepsilon}^{N_0}|F'(r)|dr\right]. \qquad (3.12.19)
\end{aligned}
$$

事实上, 令 $h(r)=\dfrac{|x|\cos\theta_1}{t}r\pm\dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}$, 类似于步骤 1, 可得

$$
\min_{[\varepsilon,N_0]}\left|\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r)\right|\geqslant\frac{3}{2^{\frac72}}\min\{2\varepsilon,(N_0)^{-4}\},
$$

这样根据引理 3.12.1 有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\varepsilon}^{N_0} e^{it\left(\frac{|x|\cos\theta_1}{t}r\pm\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)}F(r)r^{N-1}dr\right|\\
=&\left|\int_{\varepsilon}^{N_0} e^{ith(r)}F(r)r^{N-1}dr\right|\\
\leqslant& Ct^{-\frac12}\max\{(2\varepsilon)^{-\frac12},(N_0)^2\}\Bigg[|F(N_0)|(N_0)^{N-1}\\
&+\int_{\varepsilon}^{N_0}|r^{N-1}F'(r)|dr+\int_{\varepsilon}^{N_0}|(r^{N-1})'F(r)|dr\Bigg]\\
\leqslant& Ct^{-\frac12}\max\{(2\varepsilon)^{-\frac12},(N_0)^2\}\Bigg[|F(N_0)|(N_0)^{N-1}\\
&+(N_0)^{N-1}\int_{\varepsilon}^{N_0}|F'(r)|dr+\|F\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}((N_0)^{N-1}-\varepsilon^{N-1})\Bigg]\\
\leqslant& Ct^{-\frac12}\max\{(2\varepsilon)^{-\frac12},(N_0)^2\}(N_0)^{N-1}\left[\|F\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_{\varepsilon}^{N_0}|F'(r)|dr\right].
\end{aligned}
$$

因此完成了式 (3.12.19) 的证明.

根据刚证的式 (3.12.19), 由式 (3.12.18) 易知

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0} e^{it\left(\frac{x\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}F(\xi)d\xi\right|\\&\leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\max\{(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},(N_0)^2\}(N_0)^{N-1}\\&\quad\times\left[\|F\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_\varepsilon^{N_0}|F'(r)|dr\right]\int_0^\pi \sin^{N-2}\theta_1 d\theta_1\\&\leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\max\{(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},(N_0)^2\}(N_0)^{N-1}\left[\|F\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_\varepsilon^{N_0}|F'(r)|dr\right].\quad\Box\end{aligned}$$

引理 3.12.3 设 $F_1=1, F_2=\dfrac{\sqrt{1+r^2}}{r}, F_3=\dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}, F_4=\dfrac{r^2}{1+r^2}$. 若置

$$G_i=\|F_i\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_\varepsilon^{N_0}|F_i'(r)|dr, \tag{3.12.20}$$

则

$$G_i\leqslant C\varepsilon^{-1},\quad i=1,2,3,4. \tag{3.12.21}$$

证明 (i)

$$G_1=\|F_1\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_\varepsilon^{N_0}|F_1'(r)|dr=\|1\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_\varepsilon^{N_0}|1'|dr=1. \tag{3.12.22}$$

(ii)

$$\begin{aligned}G_2&=\|F_2\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_\varepsilon^{N_0}|F_2'(r)|dr\\&=\left\|\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}\right\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_\varepsilon^{N_0}\left|\left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}\right)'\right|dr\\&=\left\|\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}\right\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]}+\int_\varepsilon^{N_0}\left|\frac{-1}{r^2\sqrt{1+r^2}}\right|dr\\&\leqslant\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}+\int_\varepsilon^{N_0}\frac{dr}{r^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{N_0}\right)\leqslant C\varepsilon^{-1}.\end{aligned} \tag{3.12.23}$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
G_3 &= \left\| \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \right\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]} + \int_\varepsilon^{N_0} \left| \left(\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \right)' \right| dr \\
&\leqslant 1 + \int_\varepsilon^{N_0} \left| \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} \right| dr = 1 + \int_\varepsilon^{N_0} \left| \frac{1}{(1+r^2)\sqrt{1+r^2}} \right| dr \\
&\leqslant 1 + \int_\varepsilon^{N_0} \frac{1}{r^2\sqrt{1+r^2}} dr \leqslant C\varepsilon^{-1}. \qquad (3.12.24)
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
G_4 &= \left\| \frac{r^2}{1+r^2} \right\|_{L^\infty[\varepsilon,N_0]} + \int_\varepsilon^{N_0} \left| \left(\frac{r^2}{1+r^2} \right)' \right| dr \\
&\leqslant 1 + \int_\varepsilon^{N_0} \frac{2r}{(1+r^2)^2} dr \leqslant 1 + 2\int_\varepsilon^{N_0} \frac{\sqrt{1+r^2}}{(1+r^2)(1+r^2)} dr \\
&= 1 + 2\int_\varepsilon^{N_0} \frac{1}{(1+r^2)\sqrt{1+r^2}} dr \leqslant C\varepsilon^{-1}. \qquad (3.12.25)
\end{aligned}
$$

□

引理 3.12.4 设 $s > \frac{N}{2}$ 和 $\psi \in H^s \cap L^1 \cap DL^2$, 则

$$
\|B(t)\psi\|_{L^\infty} \leqslant C(1+t)^{-\theta}(\|\psi\|_{L^1} + \|\psi\|_{H^s} + \|\psi\|_{DL^2}), \qquad (3.12.26)
$$

其中 $DL^2 = \{f : D^{-1}f = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f \in L^2\}$ 和

$$
\theta = \begin{cases} \dfrac{2s-N}{2N+20+4s}, & \dfrac{N}{2} < s < \dfrac{5N}{2}, \\ \dfrac{N}{3N+5}, & s \geqslant \dfrac{5N}{2}. \end{cases}
$$

证明 直接计算, 有

$$
\begin{aligned}
B(t)\psi &= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi} \frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|} \sin \frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \widehat{\psi}(\xi) d\xi \\
&= C\left(\int_{|\xi|<\varepsilon} + \int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0} + \int_{|\xi|>N_0} \right) e^{ix\cdot\xi} \frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|} \sin \frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \widehat{\psi}(\xi) d\xi \\
&\equiv C(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}), \qquad (3.12.27)
\end{aligned}
$$

其中 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 和 $N_0 > 1$ 是待定的常数.

$t > 1$ 的情况.

应用 Hölder 不等式, Hausdorff-Young 不等式, 引理 3.12.2 和引理 3.12.3 得

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{I}\,| &= \left|\int_{|\xi|<\varepsilon} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\psi}(\xi)d\xi\right| \\ &\leqslant C\int_{|\xi|<\varepsilon}||\xi|^{-1}\widehat{\psi}(\xi)|d\xi \\ &\leqslant C\left(\int_{|\xi|<\varepsilon}1d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\||\xi|^{-1}\widehat{\psi}(\xi)\|_{L^2} \\ &\leqslant C\xi^{\frac{N}{2}}\|\psi\|_{DL^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{II}\,| &= \int\limits_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\psi}(\xi)d\xi \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0} e^{i(x-y)\cdot\xi}\frac{\left(e^{it\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}}-e^{-it\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}}\right)}{2i}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}d\xi\right)\psi(y)dy\right| \\ &\leqslant C\sum_{\pm}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0} e^{it\left(\frac{(x-y)\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}d\xi\right||\psi(y)|dy \\ &\leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}(N_0)^{N-1}\varepsilon^{-1}\max\{(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},(N_0)^2\}\|\psi\|_{L^1}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}|\mathrm{III}| &= \left|\int_{|\xi|>N_0} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}|\xi|^{-s}|\xi|^{s}\widehat{\psi}(\xi)d\xi\right| \\ &\leqslant \sqrt{2}\left(\int_{|\xi|>N_0}|\xi|^{-2s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\||\xi|^{s}\widehat{\psi}(\xi)\|_{L^2} \\ &= \sqrt{2}\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\psi\|_{L^2}\left(\int_{N_0}^{\infty}\int_{\sum^{N-1}} r^{-2s}r^{N-1}drd\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C\|\psi\|_{\dot{H}^s}(N_0)^{\frac{N-2s}{2}}.\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\|B(t)\psi\|_{L^\infty} \leqslant\, & C(\|\psi\|_{L^1}+\|\psi\|_{\dot{H}^s}+\|\psi\|_{DL^2}) \\ & \times\left[\varepsilon^{\frac{N}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}(N_0)^{N-1}\varepsilon^{-1}\max\{(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},(N_0)^2\}+(N_0)^{\frac{N-2s}{2}}\right].\end{aligned} \tag{3.12.28}$$

置 $(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = N_0^2$ 和对于在式 (3.12.28) 中置 $N_0 = t^k$, 则 $N_0 > 1, 0 < \varepsilon = \dfrac{t^{-4k}}{2} <$

$\frac{1}{2}$, 式 (3.12.28) 变为

$$\|B(t)\psi\|_{L^\infty} \leqslant C(\|\psi\|_{L^1}+\|\psi\|_{\dot{H}^s}+\|\psi\|_{DL^2})(t^{-2Nk}+t^{-\frac{1}{2}+(N+5)k}+t^{\frac{N-2s}{2}k}). \tag{3.12.29}$$

(a) 若置

$$-2Nk=-\frac{1}{2}+(N+5)k, \tag{3.12.30}$$

则

$$k=\frac{1}{6N+10}. \tag{3.12.31}$$

于是

$$-\frac{1}{2}+(N+5)k=-2Nk=\frac{-N}{3N+5}<0, \tag{3.12.32}$$

$$\frac{N-2s}{2}k=\frac{N-2s}{12N+20}<0. \tag{3.12.33}$$

注意到 $\frac{-N}{3N+5}=\frac{N-2s}{12N+20}$ 推出 $s=\frac{5N}{2}$, 可知

$$\theta_1=\begin{cases}\dfrac{2s-N}{12N+20}, & \dfrac{N}{2}<s<\dfrac{5N}{2},\\ \dfrac{N}{3N+5}, & s\geqslant\dfrac{5N}{2}.\end{cases} \tag{3.12.34}$$

(b) 若置

$$-\frac{1}{2}+(N+5)k=\frac{N-2s}{2}k, \tag{3.12.35}$$

则

$$k=\frac{1}{N+10+2s}.$$

因此

$$-\frac{1}{2}+(N+5)k=\frac{N-2s}{2}k=\frac{N-2s}{2N+20+4s}<0, \tag{3.12.36}$$

$$-2Nk=\frac{-2N}{N+10+2s}<0. \tag{3.12.37}$$

注意到 $\frac{N-2s}{2N+20+4s}=\frac{-2N}{N+10+2s}$ 推出 $s=\frac{5N}{2}$, 可见

$$\theta_2=\begin{cases}\dfrac{2s-N}{2N+20+4s}, & \dfrac{N}{2}<s<\dfrac{5N}{2},\\ \dfrac{2N}{N+10+2s}, & s\geqslant\dfrac{5N}{2}.\end{cases} \tag{3.12.38}$$

总而言之, 由于

$$0 < \frac{2s-N}{12N+20} < \frac{2s-N}{2N+20+4s} \ \Leftrightarrow\ \frac{N}{2} < s < \frac{5N}{2} \tag{3.12.39}$$

和

$$\frac{N}{3N+5} \geqslant \frac{2N}{N+10+2s} \ \Leftrightarrow\ s \geqslant \frac{5N}{2}, \tag{3.12.40}$$

有

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{2s-N}{2N+20+4s}, & \dfrac{N}{2} < s < \dfrac{5N}{2}, \\ \dfrac{N}{3N+5}, & s \geqslant \dfrac{5N}{2}. \end{cases} \tag{3.12.41}$$

我们断定对于 $t>1$,

$$\begin{aligned} \|B(t)\psi\|_{L^\infty} &\leqslant Ct^{-\theta}(\|\psi\|_{L^1} + \|\psi\|_{\dot{H}^s} + \|\psi\|_{DL^2}) \\ &= C(2t)^{-\theta}2^\theta(\|\psi\|_{L^1} + \|\psi\|_{\dot{H}^s} + \|\psi\|_{DL^2}) \\ &\leqslant C(1+t)^{-\theta}(\|\psi\|_{L^1} + \|\psi\|_{\dot{H}^s} + \|\psi\|_{DL^2}). \end{aligned} \tag{3.12.42}$$

$0 < t \leqslant 1$ 的情况.

在此情况易得

$$\begin{aligned} \|B(t)\psi\|_{L^\infty} \leqslant & C\left|\int_{|\xi|\leqslant 1} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sin\dfrac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}}{\dfrac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}}t\widehat{\psi}(\xi)d\xi\right| \\ &+ C\left|\int_{|\xi|>1} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}|\xi|^{-s}|\xi|^s\widehat{\psi}(\xi)d\xi\right| \\ \leqslant & C(\|\psi\|_{L^1} + \|\psi\|_{\dot{H}^s}) \\ = & C2^\theta(1+1)^{-\theta}(\|\psi\|_{L^1} + \|\psi\|_{\dot{H}^s}) \\ \leqslant & C(1+t)^{-\theta}(\|\psi\|_{L^1} + \|\psi\|_{\dot{H}^s} + \|\psi\|_{DL^2}). \end{aligned} \tag{3.12.43}$$

综合式 (3.12.42) 和式 (3.12.43) 推出式 (3.12.26). □

引理 3.12.5 设 $s > \dfrac{N}{2}$ 和 $\varphi \in H^s \cap L^1$, 则对于由式 (3.12.41) 定义的 θ,

$$\|\partial_t B(t)\varphi\|_{L^\infty} \leqslant C(1+t)^{-\theta}(\|\varphi\|_{L^1} + \|\varphi\|_{\dot{H}^s}). \tag{3.12.44}$$

证明 应用 Euler 公式有

$$\begin{aligned} \partial_t B(t)\varphi &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\left(e^{it\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}} + e^{-it\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}}\right)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= C\sum_{\pm}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}e^{\pm it\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\sum_{\pm}\left(\int_{|\xi|<\varepsilon}+\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0}+\int_{|\xi|>N_0}\right)e^{it\left(\frac{x\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&\equiv C\sum_{\pm}(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}).
\end{aligned}
\tag{3.12.45}
$$

由于 Hölder 不等式, 引理 3.12.2 和引理 3.12.3, 对于 $t>1$ 得

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{|\xi|<\varepsilon}e^{it\left(\frac{(x-y)\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}d\xi\right)\varphi(y)dy\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{|\xi|<\varepsilon}e^{it\left(\frac{(x-y)\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}d\xi\right||\varphi(y)|dy\leqslant\varepsilon^N\|\varphi\|_{L^1}, \\
|\mathrm{II}| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0}e^{it\left(\frac{(x-y)\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}d\xi\right)\varphi(y)dy\right| \\
&\leqslant C\max\{(2\varepsilon)^{-\frac12},(N_0)^2\}t^{-\frac12}N_0^{N-1}\varepsilon^{-1}\|\varphi\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{III}| &= \left|\int_{|\xi|>N_0}e^{it\left(\frac{x\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}|\xi|^{-s}|\xi|^s\widehat{\varphi}(\xi)d\xi\right| \\
&\leqslant\left(\int_{|\xi|>N_0}|\xi|^{-2s}d\xi\right)^{\frac12}\||\xi|^s\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\leqslant C\|\varphi\|_{\dot{H}^s}N_0^{\frac{N-2s}{2}}.
\end{aligned}
$$

另一方面, 若 $t\leqslant 1$, 易知

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t B(t)\varphi\|_{L^\infty} &\leqslant (2\pi)^{-N}\left|\int_{|\xi|\leqslant1}e^{ix\cdot\xi}\cos\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi\right| \\
&\quad+(2\pi)^{-N}\left|\int_{|\xi|>1}e^{ix\cdot\xi}\cos\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}|\xi|^{-s}|\xi|^s\widehat{\varphi}(\xi)d\xi\right| \\
&\leqslant C(\|\varphi\|_{L^1}+\|\varphi\|_{\dot{H}^s}).
\end{aligned}
\tag{3.12.46}
$$

因为对于 $0<\varepsilon<\dfrac12,\varepsilon^N\leqslant\varepsilon^{\frac N2}$, 类似于引理 3.12.4 可得证明. □

引理 3.12.6 设 $s>\dfrac N2$ 和 $g\in H^s\cap L^1$, 则对于由式 (3.12.41) 定义的 θ,

$$
\left\|\int_0^t T(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\right\|_{L^\infty}\leqslant C\int_0^t(1+t-\tau)^{-\theta}(\|g(\cdot,\tau)\|_{L^1}+\|g(\cdot,\tau)\|_{H^s})d\tau. \tag{3.12.47}
$$

证明 注意到

$$
\begin{aligned}
T(t)g &= (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\frac{e^{it\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}}-e^{-it\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}}}{2i}\widehat{g}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2i}(2\pi)^{-N}\sum_{\pm}(\pm)\left(\int_{|\xi|<\varepsilon}+\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0}+\int_{|\xi|>N_0}\right) \\
&\quad \times e^{it(\frac{x\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}})}\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{g}(\xi)d\xi \\
&\equiv \frac{1}{2i}(2\pi)^{-N}\sum_{\pm}(\pm)(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}), \qquad (3.12.48)
\end{aligned}
$$

利用 Hölder 不等式, 引理 3.12.2 和引理 3.12.3, 对 $t>1$ 可得

$$
\begin{aligned}
|\,\mathrm{I}\,| &= \left|\int_{|\xi|<\varepsilon} e^{it\left(\frac{x\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{g}(\xi)d\xi\right| \leqslant C\varepsilon^N\|g\|_{L^1}, \\
|\,\mathrm{II}\,| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant N_0} e^{it\left(\frac{(x-y)\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}d\xi\right)g(y)dy\right| \\
&\leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}N_0^{N-1}\varepsilon^{-1}\max((2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}N_0^2)\|g\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

和

$$
|\mathrm{III}| = \left|\int_{|\xi|>N_0} e^{it\left(\frac{x\cdot\xi}{t}\pm\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)}\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}|\xi|^{-s}|\xi|^s\widehat{g}(\xi)d\xi\right| \leqslant C\|g\|_{\dot{H}^s}N_0^{\frac{N-2s}{2}}.
$$

另一方面, 若 $t\leqslant 1$, 易得

$$
\begin{aligned}
\|T(t)g\|_{L^\infty} &\leqslant (2\pi)^{-N}\left|\int_{|\xi|\leqslant 1} e^{ix\cdot\xi}\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{g}(\xi)d\xi\right| \\
&\quad + (2\pi)^{-N}\left|\int_{|\xi|>1} e^{ix\cdot\xi}\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}|\xi|^{-s}|\xi|^s\widehat{g}(\xi)d\xi\right| \\
&\leqslant C(\|g\|_{L^1}+\|g\|_{\dot{H}^s}). \qquad (3.12.49)
\end{aligned}
$$

因为对于 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}, \varepsilon^N\leqslant\varepsilon^{\frac{N}{2}}$, 类似于引理 3.12.4 的证明方法可证式 (3.12.47). □

定理 3.12.1 设 $s>\dfrac{N}{2}, \varphi\in H^s\cap L^1, \psi\in H^s\cap L^1\cap DL^2$ 和 $g\in L^2([0,T];H^s\cap L^1)$, 则线性化方程的 Cauchy 问题 (3.12.3), (3.12.4) 存在唯一广义解 $u(x,t)\in C^2([0,T];H^s)$. 同时有

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leqslant C_0(1+t)^{-\theta}(\|\varphi\|_{L^1}+\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{L^1}+\|\psi\|_{H^s}+\|\psi\|_{DL^2}) \\
&\quad + C_0\int_0^t(1+t-\tau)^{-\theta}(\|g(\cdot,\tau)\|_{L^1}+\|g(\cdot,\tau)\|_{H^s})d\tau, \qquad (3.12.50)
\end{aligned}
$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant C_0\left(\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{DL^2}+\|\psi\|_{H^s}+\int_0^t\|g(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\right),\tag{3.12.51}$$

$$\begin{aligned}\|u_t(\cdot,t)\|_{L^\infty}\leqslant{}&C_0(1+t)^{-\theta}(\|\varphi\|_{L^1}+\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{L^1}+\|\psi\|_{H^s})\\&+C_0\int_0^t(1+t-\tau)^{-\theta}(\|g(\cdot,\tau)\|_{L^1}+\|g(\cdot,\tau)\|_{H^s})d\tau,\end{aligned}\tag{3.12.52}$$

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant C_0\left(\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^s}+\int_0^t\|g(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\right).\tag{3.12.53}$$

证明 应用 Garlerkin 方法 (见 [25]) 可以证明线性化方程的 Cauchy 问题 (3.12.3), (3.12.4) 存在唯一解 $u(x,t)$. 估计 (3.12.50) 可以立刻由引理 3.12.4–引理 3.12.6 推得.

注意到

$$\|f\|_{H^s}=\|\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)]\|_{L^2}=\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)\|_{L^2},\tag{3.12.54}$$

所以

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant{}&\|\partial_tB(t)\varphi(\cdot)\|_{H^s}+\|B(t)\psi(\cdot)\|_{H^s}+\int_0^t\|T(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\\
={}&\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathscr{F}[\partial_tB(t)\varphi](\xi)\|_{L^2}+\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathscr{F}[B(t)\psi](\xi)\|_{L^2}\\
&+\int_0^t\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathscr{F}[T(t-\tau)g(\cdot,\tau)](\xi)\|_{L^2}d\tau\\
={}&\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\cos\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\varphi}(\xi)\right\|_{L^2}\\
&+\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\psi}(\xi)\right\|_{L^2}\\
&+\int_0^t\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\sin\frac{(t-\tau)|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{g}(\xi)\right\|_{L^2}d\tau\\
\leqslant{}&\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{\varphi}(\xi)\right\|_{L^2}+\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\psi}(\xi)\right\|_{L^2(|\xi|>1)}\\
&+\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\psi}(\xi)\right\|_{L^2(|\xi|\leqslant1)}\\
&+\int_0^t\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{g}(\xi)\|_{L^2}d\tau\\
\leqslant{}&C\left(\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^s}+\int_0^t\|g(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\right)+C\||\xi|^{-1}\widehat{\psi}(\xi)\|_{L^2(|\xi|\leqslant1)}\\
\leqslant{}&C_0\left(\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{DL^2}+\|\psi\|_{H^s}+\int_0^t\|g(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\right),\end{aligned}$$

式 (3.12.51) 成立.

因为

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) =& -(2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\sin\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&+(2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\cos\frac{t|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{\psi}(\xi)d\xi \\
&-(2\pi)^{-N}\int_0^t\left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\frac{|\xi|}{1+|\xi|^2}\cos\frac{(t-\tau)|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\widehat{g}(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau, \quad (3.12.55)
\end{aligned}
$$

类似于建立引理 3.12.2–引理 3.12.6 的方法, 可以获得估计 (3.12.52) 和 (3.12.53). □

3.12.3 非线性估计

引理 3.12.7 设 $f(u)\in C^k(\mathbb{R}), f(0)=0, s\geqslant 0, u\in L^\infty\cap H^s$ 和 $k=[s]+1$, 则对于 $\|u\|_{L^\infty}\leqslant M$,

$$
\|f(u)\|_{H^s}\leqslant C(M)\|u\|_{H^s}, \quad (3.12.56)
$$

其中 $C(M)$ 是依赖于 M 的常数.

证明 $s=0$ 的情况. 由 $f(0)=0$ 有

$$
f(u)=\int_0^1 f'(\lambda u)ud\lambda,
$$

推出

$$
\|f(u)\|_{L^2}\leqslant C(M)\|u\|_{L^2}. \quad (3.12.57)
$$

$s>0$ 是整数的情况. 我们有

$$
\|f(u)\|_{H^s}\leqslant C\left(\|f(u)\|_{L^2}+\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial^s f(u)}{\partial x_i^s}\right\|_{L^2}\right) \quad (3.12.58)
$$

和

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^s f(u)}{\partial x_i^s}\right\|_{L^2} &\leqslant \sum_{l=1}^s\sum_\alpha\left\|f^{(l)}(u)\frac{\partial^{\alpha_1}u}{\partial x_i^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}u}{\partial x_i^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_l}u}{\partial x_i^{\alpha_l}}\right\|_{L^2} \\
&\leqslant \sum_{l=1}^s\sum_\alpha\|f^{(l)}(u)\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial^{\alpha_1}u}{\partial x_i^{\alpha_1}}\right\|_{L^{p_1}}\left\|\frac{\partial^{\alpha_2}u}{\partial x_i^{\alpha_2}}\right\|_{L^{p_2}}\cdots\left\|\frac{\partial^{\alpha_l}u}{\partial x_i^{\alpha_l}}\right\|_{L^{p_l}},
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l), \alpha_k\geqslant 1, \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l=s$ 和 $p_k=\dfrac{2s}{\alpha_k}(k=1,2,\cdots,l)$.

应用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理可得

$$
\left\|\frac{\partial^{\alpha_k}u}{\partial x_i^{\alpha_k}}\right\|_{L^{p_k}}\leqslant C\|u\|_{L^\infty}^{1-\frac{\alpha_k}{s}}\left\|\frac{\partial^s u}{\partial x_i^s}\right\|_{L^2}^{\frac{\alpha_k}{s}},
$$

从而

$$\left\|\frac{\partial^s f(u)}{\partial x_i^s}\right\|_{L^2} \leqslant C(M)\left\|\frac{\partial^s u}{\partial x_i^s}\right\|_{L^2}. \tag{3.12.59}$$

综合式 (3.12.57)–(3.12.59) 推出式 (3.12.56).

$s>0$ 不是整数的情况. 令 $m=[s]$, 由上面的证明有

$$\|f(u)\|_{H^m} \leqslant C(M)\|u\|_{H^m} \tag{3.12.60}$$

和

$$\|f(u)\|_{H^{m+1}} \leqslant C(M)\|u\|_{H^{m+1}}. \tag{3.12.61}$$

在式 (3.12.60) 与式 (3.12.61) 之间插值推出

$$\|f(u)\|_{H^s} \leqslant C(M)\|u\|_{H^s}.$$

□

引理 3.12.8[175] 若 $s>0$, 则 $H^s\cap L^\infty$ 是一代数. 同时, 对于 $f,g\in H^s\cap L^\infty$,

$$\|fg\|_{H^s} \leqslant C(\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^s}+\|g\|_{L^\infty}\|f\|_{H^s}).$$

引理 3.12.9 设 $f\in C^k(\mathbb{R}), k=[s]+1$ 和当 $u\to 0$ 时, $f(u)=O(|u|^{1+\alpha}), \alpha\geqslant 1$ 是一整数. 若 $u\in H^s\cap L^\infty$ 和 $\|u\|_{L^\infty}\leqslant M$, 则

$$\|f(u)\|_{H^s} \leqslant C(M)\|u\|_{H^s}\|u\|_{L^\infty}^\alpha, \tag{3.12.62}$$

$$\|f(u)\|_{L^1} \leqslant C(M)\|u\|_{L^2}^2\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}, \tag{3.12.63}$$

其中 $C(M)$ 是依赖于 M 的常数.

证明 由条件 $f(u)=O(|u|^{1+\alpha})$ 推出

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(\alpha)}(0)=0, \quad f^{(1+\alpha)}(0)\neq 0.$$

于是可写 $f(u)$ 为

$$f(u)=H(u)u^{1+\alpha},$$

其中 $H(0)\neq 0$. 令 $G(u)=H(u)u$, 有 $G(0)=0$ 和

$$f(u)=G(u)u^\alpha. \tag{3.12.64}$$

应用上面的等式, 引理 3.12.7 和引理 3.12.8 得

$$\begin{aligned}\|f(u)\|_{H^s} &\leqslant C(\|G(u)\|_{L^\infty}\|u^\alpha\|_{H^s}+\|G(u)\|_{H^s}\|u^\alpha\|_{L^\infty})\\ &\leqslant C(M)(\|u\|_{L^\infty}\|u^\alpha\|_{H^s}+\|u\|_{H^s}\|u\|_{L^\infty}^\alpha)\\ &\leqslant C(M)\|u\|_{H^s}\|u\|_{L^\infty}^\alpha.\end{aligned}$$

这就完成了式 (3.12.62) 的证明.

利用 Hölder 不等式, 由式 (3.12.64) 有

$$\|f(u)\|_{L^1} \leqslant \|G(u)\|_{L^2}\|u^\alpha\|_{L^2} \leqslant C(M)\|u\|_{L^2}^2\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1},$$

即式 (3.12.63) 成立. □

引理 3.12.10 设 $f \in C^k(\mathbb{R}), k = [s]+1$ 和当 $u \to 0$ 时, $f(u) = O(|u|^{1+\alpha}), \alpha \geqslant 1$ 是一整数. 若 $u, v \in H^s \cap L^\infty$ 和 $\|u\|_{L^\infty} \leqslant M, \|v\|_{L^\infty} \leqslant M$, 则

$$\|f(u)-f(v)\|_{H^s} \leqslant C(M)[\|u-v\|_{L^\infty}(\|u\|_{H^s}+\|v\|_{H^s})(\|u\|_{L^\infty}+\|v\|_{L^\infty})^{\alpha-1} + \|u-v\|_{H^s}(\|u\|_{L^\infty}+\|v\|_{L^\infty})^\alpha], \tag{3.12.65}$$

$$\|f(u)-f(v)\|_{L^1} \leqslant C(M)(\|u\|_{L^\infty}+\|v\|_{L^\infty})^{\alpha-1}(\|u\|_{L^2}+\|v\|_{L^2})\|u-v\|_{L^2}, \tag{3.12.66}$$

其中 $C(M)$ 是依赖于 M 的常数.

证明 因为

$$f(u)-f(v) = \int_0^1 f'(\lambda u+(1-\lambda)v)d\lambda(u-v), \tag{3.12.67}$$

应用引理 3.12.8 和引理 3.12.9, 并注意到

$$f'(\lambda u+(1-\lambda)v) = O(|\lambda u+(1-\lambda)v|^\alpha),$$

推出

$$\begin{aligned}\|f(u)-f(v)\|_{H^s} \leqslant& C\left(\int_0^1 \|f'(\lambda u+(1-\lambda)v)\|_{H^s}d\lambda\|u-v\|_{L^\infty}\right.\\ &\left.+\int_0^1 \|f'(\lambda u+(1-\lambda)v)\|_{L^\infty}d\lambda\|u-v\|_{H^s}\right)\\ \leqslant& C(M)\left[\|u-v\|_{L^\infty}(\|u\|_{H^s}+\|v\|_{H^s})(\|u\|_{L^\infty}+\|v\|_{L^\infty})^{\alpha-1}\right.\\ &\left.+\|u-v\|_{H^s}(\|u\|_{L^\infty}+\|v\|_{L^\infty})^\alpha\right],\end{aligned}$$

即式 (3.12.65) 成立.

利用 Hölder 不等式, 由式 (3.12.67) 可得式 (3.12.66). □

引理 3.12.11 若 a, b 是常数, $b \geqslant a \geqslant 0$, 则

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-a}(1+\tau)^{-b}d\tau \leqslant C(1+t)^{-a}\int_0^t (1+\tau)^{-b}d\tau. \tag{3.12.68}$$

同时, 若 $b > 1$, 有

$$\int_0^t (1+t-\tau)^{-a}(1+\tau)^{-b}d\tau \leqslant \frac{1}{b-1}(1+t)^{-a}. \tag{3.12.69}$$

证明 为了证明式 (3.12.68), 令

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-a}(1+\tau)^{-b}d\tau \\ &\leqslant \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-a}\int_0^{\frac{t}{2}}(1+\tau)^{-b}d\tau \quad (\text{因为}a\geqslant 0) \\ &\leqslant C(1+t)^{-a}\int_0^t (1+\tau)^{-b}d\tau \end{aligned} \tag{3.12.70}$$

和

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-a}(1+\tau)^{-b}d\tau \\ &\leqslant \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-b}\int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-a}d\tau \\ &= 2^b(2+t)^{-b}\int_{t-\frac{t}{2}}^{t-t}(1+s)^{-a}(-ds) \\ &\leqslant 2^b(1+t)^{-b}\int_0^{\frac{t}{2}}(1+\tau)^{-a}d\tau \\ &\leqslant 2^b(1+t)^{-a}\int_0^t \frac{(1+t)^a}{(1+t)^b}\frac{(1+\tau)^b}{(1+\tau)^a}(1+\tau)^{-b}d\tau \\ &\leqslant 2^b(1+t)^{-a}\int_0^t\left(\frac{1+\tau}{1+t}\right)^{b-a}(1+\tau)^{-b}d\tau \\ &\leqslant 2^b(1+t)^{-a}\int_0^t (1+\tau)^{-b}d\tau \quad (\text{因为}b\geqslant a\geqslant 0). \end{aligned} \tag{3.12.71}$$

综合式 (3.12.70) 和 (3.12.71) 给出式 (3.12.68).

若 $b>1$, $\displaystyle\int_0^\infty (1+\tau)^{-b}d\tau = \frac{1}{b-1}$, 所以式 (3.12.69) 成立. □

3.12.4 主要定理

定理 3.12.2 设 k 是一整数, $k\geqslant s>\dfrac{N}{2}$, $f\in C^k(\mathbb{R})$ 满足当 $u\to 0$ 时, $f(u)=O(|u|^{\alpha+1})$, 其中 α 是一整数. 又设 $(\alpha-1)\theta>1$, 其中 θ 由式 (3.12.41) 确定, 则存在一个常数 $\delta>0$, 使得对于任意 $\varphi\in H^s\cap L^1, \psi\in H^s\cap L^1\cap DL^2$ 满足

$$\|\varphi\|_{H^s}+\|\varphi\|_{L^1}+\|\psi\|_{H^s}+\|\psi\|_{L^1}+\|\psi\|_{DL^2}\leqslant\delta, \tag{3.12.72}$$

则 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 有唯一解 $u(x,t)\in C^1([0,\infty);H^s)$. 同时,

$$\sup_{0\leqslant t<\infty}\{(1+t)^\theta[\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}+\|u_t(\cdot,t)\|_{L^\infty}]+\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}\}\leqslant C\delta, \tag{3.12.73}$$

其中常数 C 仅依赖于 f 和初值.

证明 定义一度量空间

$$X = \{u(x,t) \in C^2([0,\infty); H^s) \big| |||u||| \leqslant 5C_0\delta\}, \tag{3.12.74}$$

并赋予范数

$$|||u||| = \sup_{t\geqslant 0}\{\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}+(1+t)^{-\theta}[\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}+\|u_t(\cdot,t)\|_{L^\infty}]\}, \tag{3.12.75}$$

其中 $\delta > 0$ 满足式 (3.12.74) 和 C_0 是定理 3.12.1 中的常数. 易证 X 是一完备的度量空间.

令

$$\mathscr{N}(u) = \partial_t B(t)\varphi + B(t)\psi + \int_0^t T(t-\tau)f[u(\tau)]d\tau. \tag{3.12.76}$$

我们证明, 若 δ 充够小, $\mathscr{N}: X \mapsto X$ 是严格压缩的.

事实上, 应用定理 3.12.1 中的式 (3.12.50), 式 (3.12.52) 和引理 3.12.9, 有

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{N}(u)\|_{L^\infty} + \|\mathscr{N}(u)_t\|_{L^\infty}\\
\leqslant\,& 2C_0(1+t)^{-\theta}(\|\varphi\|_{L^1} + \|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{L^1} + \|\psi\|_{H^s} + \|\psi\|_{DL^2})\\
&+ 2C_0\int_0^t (1+t-\tau)^{-\theta}\{\|f[u(\tau)]\|_{L^1} + \|f[u(\tau)]\|_{H^s}\}d\tau\\
\leqslant\,& 2C_0(1+t)^{-\theta}\delta + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\theta}[\|u(\tau)\|_{L^2}^2\|u(\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\\
&+ \|u(\tau)\|_{H^s}\|u(\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha}]d\tau\\
\leqslant\,& 2C_0(1+t)^{-\theta}\delta + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\theta}[(1+\tau)^{-(\alpha-1)\theta}\\
&+ (1+\tau)^{-\alpha\theta}]d\tau|||u|||^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

因为 $(\alpha-1)\theta > 1 > \theta > 0$, 由引理 3.12.11 推出

$$(1+t)^{\theta}[\|\mathscr{N}(u)\|_{L^\infty} + \|\mathscr{N}(u)_t\|_{L^\infty}] \leqslant 2C_0\delta + C|||u|||^{\alpha+1}. \tag{3.12.77}$$

另一方面, 由于 $\theta\alpha > 1$, 利用式 (3.12.51), (3.12.53) 和引理 3.4.9 得

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{N}(u)\|_{H^s} + \|\mathscr{N}(u)_t\|_{H^s}\\
\leqslant\,& 2C_0(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{DL^2} + \|\psi\|_{H^s}) + 2C_0\int_0^t \|f[u(\tau)]\|_{H^s}d\tau\\
\leqslant\,& 2C_0\delta + C\int_0^t \|u(\tau)\|_{H^s}\|u(\tau)\|_{L^\infty}^{\alpha}d\tau\\
\leqslant\,& 2C_0\delta + C\int_0^t (1+\tau)^{-\theta\alpha}d\tau|||u|||^{\alpha+1}\\
\leqslant\,& 2C_0\delta + C|||u|||^{\alpha+1}.
\end{aligned} \tag{3.12.78}$$

综合式 (3.12.77) 和 (3.12.78) 推出

$$|||\mathscr{N}(u)||| \leqslant 4C_0\delta + C|||u|||^{\alpha+1}.$$

取 δ 充够小, 使得 $C(5C_0\delta)^\alpha < \dfrac{1}{5}$ 知, $\mathscr{N}$ 映 X 到 X.

置 $u, v \in X$, 由式 (3.12.76) 有

$$\mathscr{N}(u) - \mathscr{N}(v) = \int_0^t T(t-\tau)\{f[u(\tau)] - f[v(\tau)]\}d\tau. \tag{3.12.79}$$

应用式 (3.12.50), (3.12.52) 和引理 3.12.10, 由于 $\theta(\alpha-1) > 1 > \theta > 0$ 得

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{N}(u) - \mathscr{N}(v)\|_{L^\infty} + \|\mathscr{N}(u)_t - \mathscr{N}(v)_t\|_{L^\infty}\\
\leqslant& 2C_0\int_0^t (1+t-\tau)^{-\theta}\{\|f[u(\tau)] - f[v(\tau)]\|_{H^s} + \|f[u(\tau)] - f[v(\tau)]\|_{L^1}\}d\tau\\
\leqslant& C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\theta}[\|u-v\|_{L^\infty}(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s})(\|u\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty})^{\alpha-1}\\
&+ \|u-v\|_{H^s}(\|u\|_{L^\infty} + \|u\|_\infty)^\alpha + (\|u\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty})^{\alpha-1}\\
&\times (\|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2})\|u-v\|_{L^2}]d\tau\\
\leqslant& C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\theta}[(1+\tau)^{-\theta\alpha} + (1+\tau)^{-\theta(\alpha-1)}]d\tau(|||u||| + |||v|||)^\alpha |||u-v|||\\
\leqslant& C(1+t)^{-\theta}(|||u||| + |||v|||)^\alpha |||u-v|||.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{-\theta}[\|\mathscr{N}(u) - \mathscr{N}(v)\|_{L^\infty} + \|\mathscr{N}(u)_t - \mathscr{N}(v)_t\|_{L^\infty}]\\
\leqslant& C(|||u||| + |||v|||)^\alpha |||u-v|||.
\end{aligned} \tag{3.12.80}$$

另一方面, 利用式 (3.12.51), (3.12.53) 和引理 3.12.10, 由 $\theta\alpha > 1$ 有

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{N}(u) - \mathscr{N}(v)\|_{H^s} + \|\mathscr{N}(u)_t - \mathscr{N}(v)_t\|_{H^s}\\
\leqslant& 2C_0\int_0^t \|f[u(\tau)] - f[v(\tau)]\|_{H^s}d\tau\\
\leqslant& C\int_0^t [\|u-v\|_{L^\infty}(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s})(\|u\|_{L^\infty} + \|u\|_\infty)^{\alpha-1}\\
&+ \|u-v\|_{H^s}(\|u\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty})^\alpha]d\tau\\
\leqslant& C\int_0^t (1+\tau)^{-\theta\alpha}d\tau(|||u||| + |||v|||)^\alpha |||u-v|||\\
\leqslant& C(|||u||| + |||v|||)^\alpha |||u-v|||.
\end{aligned} \tag{3.12.81}$$

综合式 (3.12.80) 和式 (3.12.81) 推出

$$|||\mathscr{N}(u)-\mathscr{N}(v)|||\leqslant C(|||u|||+|||v|||)^{\alpha}|||u-v|||. \tag{3.12.82}$$

取 δ 充够小, 使得 $C(10C_0\delta)^{\alpha}\leqslant\beta<1$, 由式 (3.12.82) 即知 $\mathscr{N}:X\mapsto X$ 是严格压缩的.

应用压缩映射原理, $\mathscr{N}(u)$ 在 X 中有唯一的不动点 $u(x,t)\in C^2([0,\infty);H^s)$, 且 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 的解.

我们断言 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 的解在 $C^2([0,\infty);H^s)$ 中也是唯一的. 事实上, 令 $u_1,u_2\in C^2([0,\infty);H^s)$ 是 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 的两个解. 若 $u=u_1-u_2$, 则

$$u_{tt}-\Delta u_{tt}-\Delta u=\Delta[f(u_1)-f(u_2)].$$

上面的方程两端乘以 $(-\Delta)^{-1}u_t$ 和对 x 积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\|_{L^2}^2+\|u_t\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2]=-\int_{\mathbb{R}^N}[f(u_1)-f(u_2)]u_t dx.$$

对于任意的 $T>0, s>\dfrac{N}{2}, u_i(x,t)\in C^2([0,\infty);H^s)(i=1,2)$, 根据 Sobolev 嵌入定理, 对于 $i=1,2$ 和 $0\leqslant t\leqslant T$ 推出 $\|u_i(\cdot,t)\|_{L^\infty}\leqslant C$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}[f(u_1)-f(u_2)]u_t dx\right|&\leqslant\|f(u_1)-f(u_2)\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}\\&\leqslant\left\|\int_0^1 f'[\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]d\lambda(u_1-u_2)\right\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}\\&\leqslant\int_0^1\|f'[\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]\|_{L^\infty}d\lambda\|u_1-u_2\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}\\&\leqslant C(\|u_1\|_{L^\infty}^{\alpha}+\|u_2\|_{L^\infty}^{\alpha})\|u_1-u_2\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}\\&\leqslant C(T)\|u\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}.\end{aligned}$$

从而

$$\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\|_{L^2}^2+\|u_t\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2\leqslant C(T)\int_0^t[\|u(\tau)\|_{L^2}^2+\|u_t(\tau)\|_{L^2}^2]d\tau.$$

Gronwall 不等式给出对于 $0\leqslant t\leqslant T$, $\|u_t\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2\equiv0$. 因此对于 $0\leqslant t\leqslant T, u\equiv0$. □

3.12.5 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 小初值的一个非线性散射结果

定理 3.12.3 设 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (3.12.1), (3.12.2) 的解, 则存在一对函数 $(\varphi^+(x),\psi^+(x))\in H^s\times H^s$, 使得

$$\lim_{t\to\infty}[\|u(\cdot,t)-u^+(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)-u_t^+(\cdot,t)\|_{H^s}]=0, \tag{3.12.83}$$

其中 $u^+(x,t)$ 是下列线性齐次方程 Cauchy 问题

$$u_{tt}^+ - \Delta u_{tt}^+ - \Delta u^+ = 0,$$
$$u^+(x,0) = \varphi^+(x), \quad u_t^+(x,0) = \psi^+(x)$$

的唯一解.

证明 由下式

$$\widehat{\varphi}^+(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) + \int_0^\infty \frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \sin \frac{|\xi|\tau}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \widehat{f(u)}(\xi,\tau)d\tau, \tag{3.12.84}$$

$$\widehat{\psi}^+(\xi) = \widehat{\psi}(\xi) - \int_0^\infty \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2} \cos \frac{|\xi|\tau}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \widehat{f(u)}(\xi,\tau)d\tau \tag{3.12.85}$$

定义 (φ^+, ψ^+).

我们考虑线性齐次方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt}^+ - \Delta u_{tt}^+ - \Delta u^+ = 0, \tag{3.12.86}$$

$$u^+(x,0) = \varphi^+(x), \quad u_t^+(x,0) = \psi^+(x). \tag{3.12.87}$$

因为 $u(x,t) \in C^2([0,\infty); H^s)$ 满足

$$\sup_{0 \leqslant t < \infty} [(1+t)^{-\theta} \|u\|_{L^\infty} + \|u(\cdot,t)\|_{H^s}] \leqslant C\delta,$$

所以

$$\begin{aligned}
\|\varphi^+\|_{H^s} &\leqslant \|\varphi\|_{H^s} + \int_0^t \|f(u(\cdot,\tau))\|_{H^s} d\tau \\
&\leqslant \|\varphi\|_{H^s} + C\int_0^\infty \|u(\cdot,\tau)\|_{H^s} \|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^\alpha d\tau \\
&\leqslant \|\varphi\|_{H^s} + C\delta^{\alpha+1} \int_0^\infty (1+\tau)^{-\theta\alpha} d\tau \\
&\leqslant \|\varphi\|_{H^s} + C\delta^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

类似可得

$$\|\psi^+\|_{H^s} \leqslant \|\psi\|_{H^s} + C\delta^{\alpha+1}.$$

因此, $\varphi^+, \psi^+ \in H^s$. 于是推出 Cauchy 问题 (3.12.86), (3.12.87) 有唯一解

$$u^+(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(B(t)\varphi^+(x)) + B(t)\psi^+(x). \tag{3.12.88}$$

由式 (3.12.84), (3.12.85) 和 $B(t)$ 的定义知

$$\frac{\partial}{\partial t}(B(t)\varphi^+(x)) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\cos\frac{|\xi|t}{\sqrt{1+|\xi|^2}}d\xi$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\widehat{f(u)}(\xi,\tau)\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}$$
$$\times\cos\frac{|\xi|t}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\sin\frac{|\xi|\tau}{\sqrt{1+|\xi|^2}}d\xi d\tau, \tag{3.12.89}$$

$$B(t)\psi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\widehat{\psi}(\xi)\frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{|\xi|}\sin\frac{|\xi|t}{\sqrt{1+|\xi|^2}}d\xi$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\widehat{f(u)}(\xi,\tau)\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}$$
$$\times\sin\frac{|\xi|t}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\cos\frac{|\xi|\tau}{\sqrt{1+|\xi|^2}}d\xi d\tau. \tag{3.12.90}$$

将式 (3.12.89) 和 (3.12.90) 代入式 (3.12.88), 得

$$u^+(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(B(t)\varphi(x)) + B(t)\psi(x) + \int_0^\infty T(t-\tau)f(u(x,\tau))d\tau.$$

现在, 指出式 (3.12.83) 成立. 事实上, 由定理 3.12.1 和引理 3.12.9, 因为 $\theta(\alpha-1)>1$, 当 $t\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)-u^+(\cdot,t)\|_{H^s} &= \left\|\int_t^\infty T(t-\tau)f(u(\cdot,\tau))d\tau\right\|_{H^s}\\ &\leqslant C\int_t^\infty \|f(u(\cdot,\tau))\|_{H^s}d\tau\\ &\leqslant C\int_t^\infty \|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}^\alpha d\tau\\ &\leqslant C\delta^{\alpha+1}\int_t^\infty (1+\tau)^{-\theta\alpha}d\tau\\ &\leqslant C\delta^{\alpha+1}(1+t)^{-\theta\alpha+1}\to 0,\end{aligned} \tag{3.12.91}$$

类似地, 可得当 $t\to\infty$ 时,

$$\|u_t(\cdot,t)-u_t^+(\cdot,t)\|_{H^s}\to 0. \tag{3.12.92}$$

综合式 (3.12.91) 和 (3.12.92) 得式 (3.12.83). □

3.12.6 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [30], [253]. 与本节有关的文献见 [25], [26], [32], [33], [35], [53], [69], [150], [151], [160]–[165], [170], [175], [254].

3.13　具有阻尼项的非线性波动方程的 Cauchy 问题

3.13.1　引言

文献 [48] 在对弹塑性微观结构模型进行弱非线性分析时, 研究了一维弹塑性杆的纵振动问题和二维反平面剪切问题, 推导出运动的位移函数 $u(x,t)$ 满足如下形式的非线性波动方程

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} = \beta(u_x^2)_x, \tag{3.13.1}$$

其中 $\alpha > 0, \beta \neq 0$ 为任意实数. 文献 [48] 通过将方程 (3.13.1) 化为 u_x 所满足的 Boussinesq 方程 [36,59,105], 研究了方程 (3.13.1) 的孤立子解, 证明非线性项的积聚效应和色散项的色散效应之间的相互作用, 导致 (3.13.1) 的孤立子解具有局部存在, 但逐渐变为"猛增"的外部轮廓.

方程 (3.13.1) 是描述在具有色散效应的介质中波传播的非线性波动方程. 此类问题所需回答的基本问题之一, 就是粘性的修正效应如何 [163]. 在实际过程中, 粘性对由非线性项引起的能量积聚通常起着重要的耗散作用. 因此, 研究下述具有粘性阻尼项的非线性波动方程

$$u_{tt} - 2bu_{xxt} + \alpha u_{xxxx} = \beta(u_x^n)_x \tag{3.13.2}$$

是有意义的 [255], 其中 $\alpha > 0,\ b > 0,\ \beta \neq 0$ 为任意实数, $n \geqslant 2$ 为自然数.

1994 年, Naumkin P 和 Shishmarëv I 提出了一种基于谱和扰动理论的新的数学方法, 成功地研究了关于 t 具有一阶偏导数的非线性非局部发展方程的初值问题 [256]. 本节将此方法加以改进, 研究关于 t 具有二阶偏导数的方程 (3.13.2) 的 Cauchy 问题

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.13.3}$$

我们证明, 当 $\alpha \neq b^2,\ \ \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R}),\ \psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 时, 问题 (3.13.2), (3.13.3) 存在唯一的整体光滑解. 由此可见, 粘性阻尼对由非线性引起的能量积聚的耗散作用是非常好的.

3.13.2　整体解

在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R})$ 中定义等价范数

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}, \quad s = 0, 1, \cdots.$$

定理 3.13.1　设 $\alpha \neq b^2$, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$, $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, 则对任意给定的 $T > 0$, 问题 (3.13.1), (3.13.3) 存在唯一整体光滑解 $u \in C^\infty((0,T]; H^\infty(\mathbb{R})) \cap C([0,T]; H^2(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$.

证明 分两种情况讨论: $\alpha > b^2$ 和 $\alpha < b^2$.

(1) 设 $\alpha > b^2$. 取 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 中的序列 $\{\varphi^{(s)}\}, \{\psi^{(s)}\}, s = 0, 1, \cdots$, 使得当 $s \to \infty$ 时,

$$\|\varphi^{(s)} - \varphi\| + \|\varphi^{(s)} - \varphi\|_{L^1} \to 0, \quad \|\psi^{(s)} - \psi\|_{L^1} + \|\psi^{(s)} - \psi\| \to 0.$$

记线性问题

$$\begin{aligned} &Lu^{(0)} \equiv u_{tt}^{(0)} - 2bu_{xxt}^{(0)} + \alpha u_{xxxx}^{(0)} + a^2 u^{(0)} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ &u^{(0)}(x, 0) = \varphi^{(0)}(x), \quad u_t^{(0)}(x, 0) = \psi^{(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.13.4}$$

的解为 $u^{(0)}(x, t)$, 其中 $a^2 > 0$ 为一常数. 定义 $u^{(s)}(x, t)(s = 1, 2, \cdots)$ 是线性问题

$$\begin{aligned} &Lu^{(s)} = \beta[(u_x^{(s-1)})^n]_x + a^2 u^{(s-1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ &u^{(s)}(x, 0) = \varphi^{(s)}(x), \quad u_t^{(s)}(x, 0) = \psi^{(s)}(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.13.5}$$

的解. 问题 (3.13.5) 关于 x 取 Fourier 变换解得

$$\begin{aligned} \widehat{u}^{(s)}(\xi, t) = &e^{-b\xi^2 t}[(\cos\omega(\xi)t + \omega^{-1}(\xi)b\xi^2 \sin\omega(\xi)t)\widehat{\varphi}^{(s)}(\xi) \\ &+ \omega^{-1}(\xi)\widehat{\psi}^{(s)}(\xi)\sin\omega(\xi)t] + H(\xi, t) + N(\xi, t), \end{aligned} \tag{3.13.6}$$

$$\begin{aligned} &H(\xi, t) = i\beta\xi\omega^{-1}(\xi)\int_0^t \mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi, \tau)e^{-b\xi^2(t-\tau)}\sin\omega(\xi)(t-\tau)d\tau, \\ &\bar{N}(\xi, t) = a^2\omega^{-1}(\xi)\int_0^t \widehat{u}^{(s-1)}(\xi, \tau)e^{-b\xi^2(t-\tau)}\sin\omega(\xi)(t-\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{3.13.7}$$

其中 $\omega(\xi) = (k\xi^4 + a^2)^{1/2}$, $k = \alpha - b^2 > 0$.

第一步, 先证明对任意给定的 $T > 0$, 有

$$|\widehat{u}^{(s)}(\xi, t)| \leqslant CI^{(s)}(\xi)e^{-b|\xi|t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad s = 0, 1, \cdots, \tag{3.13.8}$$

其中 $I^{(s)}(\xi) = |\widehat{\varphi}^{(s)}(\xi)| + (1+\xi^2)^{-1}|\widehat{\psi}^{(s)}(\xi)| + 1/(1+|\xi|)^{(5+\delta)/2}$, $0 < \delta < 1$. 这里 (及以下)C 表示不依赖于 s, ξ, 但依赖于 T 的正整数.

事实上 (对 s 用归纳法), 当 $s = 0$ 时, 注意到

$$\begin{aligned} &e^{-b\xi^2 t} \leqslant e^{-(b|\xi|t - c)} \leqslant Ce^{-b|\xi|t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ &\xi^2\omega^{-1}(\xi) \leqslant k^{-1/2}, \quad C_1(1+\xi^2) \leqslant \omega(\xi) \leqslant C_2(1+\xi^2), \end{aligned} \tag{3.13.9}$$

其中 C_1, C_2 为正常数. 直接估计 (3.13.6)($s = 0$, $H(\xi, t) = \bar{N}(\xi, t) = 0$) 可得式 (3.13.8) 当 $s = 0$ 时成立. 设当 $s \leqslant s_1$ 时, 式 (3.13.8) 成立. 则当 $s = s_1 + 1$ 时 $(s - 1 = s_1)$, 我们先证明, 当 $n \geqslant 2$ 时,

$$|\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi, t)| \leqslant Ce^{-b|\xi|t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.13.10}$$

首先, 当 $n=2$ 时, 注意到 $|\xi-q|+|q|\geqslant|\xi|$,

$$\|u_x^{(s-1)}(\cdot,t)\|=\|\widehat{u}_x^{(s-1)}(\cdot,t)\|\leqslant C\|\xi I^{(s-1)}(\xi)\|\leqslant C,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.13.11}$$

其中 $\|\xi I^{(s-1)}(\xi)\|=\left(\int_{\mathbb{R}}|\xi I^{(s-1)}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}$, 即 $u_x^{(s-1)}\in L^2(\mathbb{R})$. 利用一般卷积 Young 不等式, 式 (3.13.8)($s\leqslant s_1$) 及 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}|\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^2](\xi,t)|&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|(\xi\widehat{u}^{(s-1)}*\xi\widehat{u}^{(s-1)})(\xi,t)|\\&\leqslant e^{-b|\xi|t}\|(\xi-q)I^{(s-1)}(\xi-q)\|\|qI^{(s-1)}(q)\|\\&\leqslant Ce^{-b|\xi|t},\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned} \tag{3.13.12}$$

设 $n\leqslant n_1$ 时, 式 (3.13.10) 成立. 则此时, $\|(u_x^{(s-1)})^n(\cdot,t)\|=\|\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\cdot,t)\|<\infty$, $0\leqslant t\leqslant T$, 即 $(u_x^{(s-1)})^n\in L^2(\mathbb{R})$. 故当 $n=n_1+1$ 时, 注意到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|q|I^{(s)}(q)dq\leqslant&\left[(\|\varphi^{(s)}\|+\|\psi^{(s)}\|)\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{q^2}{(1+q^2)^2}dq\right)^{1/2}\right.\\&\left.+\int_{\mathbb{R}}\frac{|q|}{(1+|q|)^{(5+\delta)/2}}dq\right]\leqslant C,\end{aligned} \tag{3.13.13}$$

利用式 (3.13.8), (3.13.10) 得到, 在 $[0,T]$ 上,

$$\begin{aligned}|\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,t)|&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|(\xi\widehat{u}^{(s-1)}*\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^{n-1}])(\xi,t)|\\&\leqslant Ce^{-b|\xi|t}\int_{\mathbb{R}}|qI^{(s-1)}(q)|dq\leqslant Ce^{-b|p|t},\end{aligned} \tag{3.13.14}$$

即式 (3.13.10) 成立.

利用式 (3.13.10), 估计 (3.13.7), 注意到 $I^{(s)}(\xi)\leqslant\widetilde{I}$(利用式 (3.13.3) 可知), 其中 $\widetilde{I}$ 是不依赖于 s,ξ 的常数, 得到

$$\begin{cases}|H(\xi,t)|\leqslant|\beta\xi|\omega^{-1}(\xi)\displaystyle\int_0^t e^{-b\xi^2(t-\tau)}|\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,\tau)|d\tau\\ \qquad\leqslant C|\beta\xi|\omega^{-1}(\xi)J(\xi,t),\\ |\bar{N}(\xi,t)|\leqslant a^2\omega^{-1}(\xi)\widetilde{I}J(\xi,t),\end{cases} \tag{3.13.15}$$

其中

$$J(\xi,t)=\int_0^t e^{-b\xi^2(t-\tau)-b|\xi|\tau}d\tau\leqslant\begin{cases}\dfrac{e^{-b|\xi|t}-e^{-b\xi^2t}}{b|\xi|(|\xi|-1)},&|\xi|\geqslant p_0,\\ t,&|\xi|<p_0,\end{cases}$$

$p_0 > 1$ 为特定常数. 取 p_0 充分大, 可使在 $[0,T]$ 上

$$e^{b|\xi|t}(1+|\xi|)^{(5+\delta)/2}H(\xi,t) \leqslant \begin{cases} \dfrac{C|\beta|(1+|\xi|)^{(5+\delta)/2}}{b(|\xi|-1)\omega(\xi)}, & |\xi| \geqslant p_0, \\ Ce^{bp_0T}(1+p_0)^{(5+\delta)/2}T, & |\xi| < p_0 \end{cases}$$

$$\leqslant C, \tag{3.13.16}$$

$$|H(\xi,t)| \leqslant Ce^{-b|\xi|t}(1+|\xi|)^{-(5+\delta)/2} \leqslant Ce^{-b|\xi|t}I^{(s)}(\xi). \tag{3.13.17}$$

同理得到, 在 $[0,T]$ 上

$$|\bar{N}(\xi,t)| \leqslant Ce^{-b|\xi|t}(1+|\xi|)^{-(5+\delta)/2} \leqslant Ce^{-b|\xi|t}I^{(s)}(\xi). \tag{3.13.18}$$

利用式 (3.13.9), (3.13.17), (3.13.18) 和式 (3.13.6), 即得到式 (3.13.8).

由式 (3.13.6) 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\widehat{u}^{(s)}(\xi,t) = &(b\xi^2\omega^{-1}(\xi)h_m(\xi,t)+g_m(\xi,t))\widehat{\varphi}^{(s)}(\xi)+\omega^{-1}(\xi)h_m(\xi,t)\widehat{\psi}^{(s)}(\xi)\\ &+i\beta\xi\omega^{-1}(\xi)\int_0^t h_m(\xi,t-\tau)\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,\tau)d\tau\\ &+a^2\omega^{-1}(\xi)\int_0^t h_m(\xi,t-\tau)\widehat{u}^{(s-1)}(\xi,\tau)d\tau+R_m(\xi,t),\end{aligned} \tag{3.13.19}$$

其中

$$\begin{aligned}h_m(\xi,t) &= \frac{\partial^m}{\partial t^m}(e^{-b\xi^2t}\sin\omega(\xi)t)\\ &= \sum_{l=0}^m C_m^l(-1)^l(b\xi^2)^le^{-b\xi^2t}\omega^{m-l}(\xi)\sin\Big(\omega(\xi)\Big(t-\frac{(m-l)\pi}{2}\Big)\Big),\\ g_m(\xi,t) &= \frac{\partial^m}{\partial t^m}(e^{-b\xi^2t}\cos\omega(\xi)t),\\ R_1(\xi,t) &= 0,\\ R_2(\xi,t) &= \omega^{-1}(\xi)h_1(\xi,0)(i\beta\xi\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,t)+a^2\widehat{u}^{(s-1)}(\xi,t)),\cdots,\\ R_m(\xi,t) &= \omega^{-1}(\xi)h_{m-1}(\xi,0)(i\beta\xi\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,t)+a^2\widehat{u}^{(s-1)}(\xi,t))\\ &\quad+\sum_{l=1}^{m-2}\frac{\partial^l}{\partial t^l}R_{m-l}(\xi,t).\end{aligned} \tag{3.13.20}$$

第二步, 我们证明对 $\forall\varepsilon: 0<\varepsilon<T$, 在 $[\varepsilon,T]$ 上,

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial t^m}\widehat{u}^{(s)}(\xi,t)\right| \leqslant D(1+\xi^2)^me^{-b|\xi|t}I^{(s)}(\xi), \quad m=0,1,\cdots. \tag{3.13.21}$$

此处和以后的 D 为不依赖于 s,ξ, 但是依赖于 m,ε,T 的常数.

事实上, 当 $m=0$ 时, 据式 (3.13.18) 知式 (3.13.21) 成立 ($D=C$). 设当 $m\leqslant m_1$ 时, 式 (3.13.21) 成立. 当 $m=m_1$ 时, 因 $R_m(\xi,t)$ 中包含有 $\dfrac{\partial^l}{\partial t^l}\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n]$ ($l=0,1,\cdots,m-2(<m_1)$), 在 $[\varepsilon,T]$ 上,

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,t)\right|\leqslant D(1+\xi^2)^l e^{-b|\xi|t},\quad l=0,1,\cdots,m-2. \tag{3.13.22}$$

首先, 当 $n=2$ 时, 据式 (3.13.21)($m\leqslant m_1$) 得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^2](\xi,t)\right|&\leqslant\sum_{k=0}^{l}C_l^k\left|(\xi-q)\frac{\partial^k}{\partial t^k}\widehat{u}^{(s-1)}(\xi-q,t)q\frac{\partial^{l-k}}{\partial t^{l-k}}\widehat{u}^{(s-1)}(q,t)\right|dq\\&\leqslant\sum_{k=0}^{l}C_l^kD\int_{\mathbb{R}}|\xi-q|(1+(\xi-q)^2)^ke^{-b|\xi-q|t}I^{(s-1)}(\xi-q)\\&\quad\times|q|(1+q^2)^{l-k}e^{-b|q|t}I^{(s-1)}(q)dq.\end{aligned} \tag{3.13.23}$$

注意到

(i) 当 $|q|\leqslant2|\xi|$ 时, $|\xi-q|\leqslant3|\xi|$,

$$(1+(\xi-q)^2)^k(1+q^2)^{l-k}\leqslant C(1+\xi^2)^l; \tag{3.13.24}$$

(ii) 当 $|q|>2|\xi|$ 时, $|\xi-q|\geqslant|q|-|\xi|>|\xi|$, 并且

$$\begin{aligned}e^{-b|q|t}(1+(\xi-q)^2)^k(1+q^2)^{l-k}&\leqslant C(1+\xi^2)^k(1+q^2)^le^{-b|q|t}\\&\leqslant C(1+\xi^2)^kt^{-2l}\\&\leqslant D(1+\xi^2)^k,\quad t\in[\varepsilon,T].\end{aligned} \tag{3.13.25}$$

将式 (3.13.23) 中的积分分解为在 $[-2|p|,2|p|]$ 和 $\mathbb{R}-[-2|p|,2|p|]$ 上的积分之和, 分别利用 (3.13.24), (3.13.25) 估计得到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^2](\xi,t)\right|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{l}C_l^kD(1+\xi^2)^le^{-b|\xi|t}\int_{\mathbb{R}}|\xi-q|I^{(s-1)}(\xi-q)|q|I^{(s-1)}(q)dq\\&\leqslant D(1+\xi^2)^le^{-b|\xi|t},\quad t\in[\varepsilon,T],\quad l=0,1,\cdots,m-2.\end{aligned} \tag{3.13.26}$$

设 $n\leqslant n_1$ 时, 式 (3.13.22) 成立. 则当 $n=n_1+1$ 时, 利用式 (3.13.22)($n\leqslant n_1$), 式

(3.13.21)($m \leqslant m_1$), 类似于式 (3.13.26) 的估计得到, 在 $[\varepsilon, T]$ 上,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,t)\right| \leqslant & \sum_{k=0}^{l} C_l^k \int_{\mathbb{R}} \left|(\xi-q)\frac{\partial^k}{\partial t^k}\widehat{u}^{(s-1)}(\xi-q,t)\right. \\ & \left.\times \frac{\partial^{l-k}}{\partial t^{l-k}}\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^{n-1}](q,t)\right| dq \\ \leqslant & \sum_{k=0}^{l} C_l^k D \int_{\mathbb{R}} |\xi-q|(1+(\xi-q)^2)^k e^{-b|\xi-q|t} I^{(s-1)}(\xi-q) \\ & \times e^{-b|q|t}(1+q^2)^{l-k} dq \\ \leqslant & D(1+\xi^2)^l e^{-b|\xi|t}, \quad l=0,1,\cdots,m-2, \end{aligned} \tag{3.13.27}$$

即式 (3.13.22) 成立.

利用式 (3.13.21)($m \leqslant m_1$), 式 (3.13.22) 和式 (3.13.21) 得到

$$\begin{aligned}|h_i(\xi,t)|+|g_i(\xi,t)| &\leqslant C(1+\xi^2)^i e^{-b\xi^2 t} \\ &\leqslant C(1+\xi^2)^i e^{-b|\xi|t}, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad i=1,\cdots,m, \end{aligned} \tag{3.13.28}$$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}R_2(\xi,t)\right| \\ \leqslant & C(1+\xi^2)\omega^{-1}(\xi)\left(\left|\xi\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,t)\right|+\left|\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\widehat{u}^{(s-1)}(\xi,t)\right|\right) \\ \leqslant & De^{-b|\xi|t}(1+\xi^2)^{m-1}\omega^{-1}(\xi)(|\xi|+I^{(s-1)}(\xi)) \\ \leqslant & De^{-b|\xi|t}(1+\xi^2)^m[(|\xi|+\widetilde{I})/(1+\xi^2)\omega(\xi)] \\ \leqslant & De^{-b|\xi|t}(1+\xi^2)^m(1/(1+\xi^2)^{3/2}) \\ \leqslant & De^{-b|\xi|t}(1+\xi^2)^m I^{(s)}(\xi), \quad t\in[\varepsilon,T]. \end{aligned} \tag{3.13.29}$$

类似地得到, 在 $[\varepsilon, T]$ 上,

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}R_{m-k}(\xi,t)\right| \leqslant De^{-b|\xi|t}(1+p^2)^m I^{(s)}(\xi), \quad k=1,\cdots,m-3. \tag{3.13.30}$$

进而利用式 (3.13.8) 得到式 (3.13.10), 在 $[\varepsilon, T]$ 上,

$$\begin{aligned}|R_m(\xi,t)| &\leqslant Ce^{-b|\xi|t}(1+\xi^2)(|\xi|+\widetilde{I})/\omega(\xi)(1+\xi^2)+\sum_{k=1}^{m-2}\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}R_{m-k}(\xi,t)\right| \\ &\leqslant D(1+\xi^2)^m e^{-b|\xi|t} I^{(s)}(\xi). \end{aligned} \tag{3.13.31}$$

利用式 (3.13.28), (3.13.8), (3.13.10), (3.13.31) 和式 (3.13.19) 得到, 对式 (3.13.16) 中

取定的 p_0, 关于 $t \in [\varepsilon, T]$ 一致有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^m}{\partial t^m}\widehat{u}^{(s)}(\xi,t)\right| &\leqslant (1+\xi^2)^m I^{(s)}(\xi)e^{-b|\xi|t} \\ &\quad + C(1+\xi^2)^m\omega^{-1}(\xi)(|\beta\xi|+a^2\widetilde{I})J(\xi,t)+|R_m(\xi,t)| \\ &\leqslant D(1+\xi^2)^m e^{-b|\xi|t}I^{(s)}(\xi),\end{aligned} \tag{3.13.32}$$

即式 (3.13.21) 成立.

第三步, 由式 (3.13.8) 和 (3.13.21) 得到, 对任意的自然数 k, m 及 $\forall\varepsilon: 0<\varepsilon<T$, 关于 $t \in [\varepsilon, T]$ 一致有

$$\begin{aligned}\|u^{(s)}(\cdot,t)\|_k^2 &\leqslant C\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^k e^{-2b|\xi|t}(I^{(s)}(\xi))^2 d\xi \\ &\leqslant Ct^{-2k}\int_{\mathbb{R}}(I^{(s)}(\xi))^2 d\xi \leqslant M_1,\end{aligned} \tag{3.13.33}$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^m}{\partial t^m}u^{(s)}(\cdot,t)\right\|_k^2 &\leqslant D\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{m+k}e^{-2b|\xi|t}(I^{(s)}(\xi))^2 d\xi \\ &\leqslant Dt^{-2(m+k)}\int_{\mathbb{R}}(I^{(s)}(\xi))^2 d\xi \leqslant M_2,\end{aligned} \tag{3.13.34}$$

其中 M_1, M_2 分别是依赖于 ε, T, k 和 ε, T, k, m 的常数.

据式 (3.13.33), (3.13.34) 及 Ascoli-Arzelá定理, 可从 $\{u^{(s)}\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{u^{(s)}\}$, 并存在一极限函数 $u \in C^\infty((0,T]; H^\infty)$, 对上述 ε, k, m, 当 $s \to \infty$ 时, 在 $C^m([\varepsilon, T]; H^k)$ 中

$$u^{(s)} \to u. \tag{3.13.35}$$

在迭代方程 (3.13.5) 中令 $s \to \infty$, 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知, 当 $t > 0$ 时, u 满足方程 (3.13.2).

第四步, 我们证明: 从序列 $\{u^{(s)}\}$ 中可抽出子序列, 使该子序列在 $C([0,T]; H^2) \cap C^1([0,T]; L^2)$ 中收敛于 u, 从而 u 满足式 (3.13.3), 即

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad x \in H^2, \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x \in L^2. \tag{3.13.36}$$

为此, 从 $\{\varphi^{(s)}\}, \{\psi^{(s)}\}$ 中抽出子序列仍记为 $\{\varphi^{(s)}\}, \{\psi^{(s)}\}$, 使得

$$\begin{aligned}&\|\varphi^{(s)}-\varphi^{(s-1)}\|_{L^1}+\|\varphi^{(s)}-\varphi^{(s-1)}\|_{H^2} \leqslant 2^{-s}, \\ &\|\psi^{(s)}-\psi^{(s-1)}\|_{L^1}+\|\psi^{(s)}-\psi^{(s-1)}\| \leqslant 2^{-s}.\end{aligned} \tag{3.13.37}$$

则对应地有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\widehat{u}^{(s)}(\xi,t)-\widehat{u}^{(s-1)}(\xi,t)| \leqslant C[2^{1-s}(I^{(s)}(\xi)+I^{(s-1)}(\xi))+H^{(s)}(\xi)], \tag{3.13.38}$$

其中 $H^{(s)}(\xi)=|\widehat{\varphi}^{(s)}(\xi)-\widehat{\varphi}^{(s-1)}(\xi)|+(1+\xi^2)^{-1}|\widehat{\psi}^{(s)}(\xi)-\widehat{\psi}^{(s-1)}(\xi)|$.

事实上, 当 $s=1$ 时, 据式 (3.13.8) 得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\widehat{u}^{(1)}(\xi,t)-\widehat{u}^{(0)}(\xi,t)|\leqslant C(I^{(1)}(\xi)+I^{(0)}(\xi)). \tag{3.13.39}$$

由式 (3.13.39) 知式 (3.13.38) 成立. 设当 $s\leqslant s_1$ 时, 式 (3.13.38) 成立. 则当 $s=s_1+1$ 时, 据式 (3.13.6) 得到

$$\begin{aligned}
&|\widehat{u}^{(s)}(\xi,t)-\widehat{u}^{(s-1)}(\xi,t)|\\
\leqslant& e^{-b\xi^2 t}H^{(s)}(\xi)+|\beta\xi|\omega^{-1}(\xi)\int_0^t e^{-b\xi^2(t-\tau)}G_s(\xi,\tau)d\tau\\
&+a^2\omega^{-1}(\xi)\int_0^t e^{-b\xi^2(t-\tau)}|\widehat{u}^{(s-1)}(\xi,\tau)-\widehat{u}^{(s-2)}(\xi,\tau)|d\tau,
\end{aligned} \tag{3.13.40}$$

其中 $G_s(\xi,t)=|\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,t)-\mathscr{F}[(u_x^{(s-2)})^n](\xi,t)|$. 我们先证明

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}G_s(\xi,t)\leqslant 2^{1-s}C. \tag{3.13.41}$$

首先, 当 $n=2$ 时, 注意到

$$\left(\int_{\mathbb{R}}q^2|H^{(s-1)}(q)|^2dq\right)^{1/2}\leqslant 2(\|\varphi^{(s-1)}-\varphi^{(s-2)}\|_{H^2}+\|\psi^{(s-1)}-\psi^{(s-2)}\|)\leqslant 2\cdot 2^{1-s}, \tag{3.13.42}$$

据式 (3.13.38)($s\leqslant s_1$), 式 (3.13.8) 和 Hölder 不等式估计得到

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leqslant t\leqslant T}G_s(\xi,t)=&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|(\xi\widehat{u}^{(s-1)}*\xi\widehat{u}^{(s-1)}-\xi\widehat{u}^{(s-2)}*\xi\widehat{u}^{(s-2)})(\xi,t)|\\
=&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_{\mathbb{R}}q(\widehat{u}^{(s-1)}-\widehat{u}^{(s-2)})(q,t)(\xi-q)(\widehat{u}^{(s-1)}+\widehat{u}^{(s-2)})(\xi-q,t)dq\right|\\
\leqslant& C\int_{\mathbb{R}}|q|[2^{2-s}(I^{(s-1)}+I^{(s-2)})(q)+H^{(s-1)}(q)]\\
&\times|\xi-q|(I^{(s-1)}+I^{(s-2)})(\xi-q)dq\\
\leqslant& 2^{1-s}C.
\end{aligned} \tag{3.13.43}$$

设当 $n\leqslant n_1$ 时, 式 (3.13.41) 成立. 则当 $n=n_1+1$ 时, 注意到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|q|H^{(s-1)}(q)dq\leqslant&\int_{\mathbb{R}}[(1+q^2)|\widehat{\varphi}^{(s-1)}(q)-\widehat{\varphi}^{(s-2)}(q)|\\
&+|\widehat{\psi}^{(s-1)}(q)-\widehat{\psi}^{(s-2)}(q)|](1+q^2)^{-1/2}dq\\
\leqslant& C(\|\varphi^{(s-1)}-\varphi^{(s-2)}\|_{H^2}+\|\psi^{(s-1)}-\psi^{(s-2)}\|)\\
\leqslant& 2^{1-s}C.
\end{aligned} \tag{3.13.44}$$

利用式 (3.13.38)($s \leqslant s_1$), (3.13.8), (3.13.10) 和式 (3.13.41)($n \leqslant n_1$) 得到

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant T} G_s(\xi,t) = &\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |(\xi\widehat{u}^{(s-1)} * \mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^{n-1}] - \xi\widehat{u}^{(s-2)} * \mathscr{F}[(u_x^{(s-2)})^{n-1}])(\xi,t)|\\ \leqslant &\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |(\xi(\widehat{u}^{(s-1)} - \widehat{u}^{(s-2)}) * \mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^{n-1}]\\ &+ \xi\widehat{u}^{(s-2)} * (\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^{n-1}] - \mathscr{F}[(u_x^{(s-2)})^{n-1}]))(\xi,t)|\\ \leqslant &C\int_{\mathbb{R}} [2^{2-s}|q|(I^{(s-1)}(q) + I^{(s-2)}(q)) + |q|H^{(s-1)}(q)]dq\\ &+ 2^{1-s}C\int_{\mathbb{R}} |q|I^{(s-2)}(q)dq\\ \leqslant &2^{1-s}C, \end{aligned} \tag{3.13.45}$$

即式 (3.13.41) 成立. 据式 (3.13.41), (3.13.38)($s \leqslant s_1$) 估计 (3.13.40) 得到

$$\begin{aligned}|\widehat{u}^{(s)}(\xi,t) - \widehat{u}^{(s-1)}(\xi,t)| \leqslant H^{(s)}(\xi) + C\omega^{-1}(\xi)[2^{1-s}|\beta\xi| + a^2(2^{2-s}(I^{(s-1)}(\xi)\\ + I^{(s-2)}(\xi)) + H^{(s-1)}(\xi)]Z(\xi,t),\end{aligned} \tag{3.13.46}$$

其中

$$Z(\xi,t) = \int_0^t e^{-bp^2(t-\tau)}d\tau \leqslant \begin{cases} \dfrac{1-e^{-b\xi^2 t}}{b\xi^2}, & |\xi| \geqslant \xi_0,\\ t, & |\xi| < \xi_0. \end{cases}$$

取 ξ_0 充分大, 可使在 $[0,T]$ 上

$$|\beta\xi|\omega^{-1}(\xi)Z(\xi,t) \leqslant C(1+|\xi|)^{-(5+\delta)/2} \leqslant CI^{(s)}(\xi). \tag{3.13.47}$$

又由式 (3.13.37) 知, $H^{(s)}(\xi) \leqslant 2^{1-s}$, 由此得到, 在 $[0,T]$ 上

$$\begin{aligned}&a^2\omega^{-1}(\xi)H^{(s-1)}(\xi)Z(\xi,t) \leqslant 2^{2-s}C(1+|\xi|)^{-(5+\delta)/2} \leqslant 2^{1-s}CI^{(s)}(\xi),\\ &a^2\omega^{-1}(\xi)2^{2-s}(I^{(s-1)}(\xi) + I^{(s-2)}(\xi))Z(\xi,t) \leqslant 2^{3-s}a^2\omega^{-1}(\xi)\widetilde{I}Z(\xi,t)\\ &\qquad \leqslant 2^{1-s}CI^{(s)}(\xi).\end{aligned} \tag{3.13.48}$$

将式 (3.13.47), (3.13.48) 代入式 (3.13.46), 即得到式 (3.13.38).

据式 (3.13.38) 得到

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u^{(s)}(\cdot,t) - u^{(s-1)}(\cdot,t)\|_{H^2}\\ =&\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|(1+\xi^2)(\widehat{u}^{(s)} - \widehat{u}^{(s-1)})(\xi,t)\|\\ \leqslant &2^{1-s}C\|(1+\xi^2)(I^{(s)}(\xi) + I^{(s-1)}(\xi))\|\\ &+ \|(1+\xi^2)H^{(s)}(\xi)\| \leqslant 2^{1-s}C.\end{aligned} \tag{3.13.49}$$

故 $\{u^{(s)}\}$ 是 $C([0,T];H^2)$ 中的基本序列, 当 $s\to\infty$ 时, 于 $C([0,T];H^2)$ 中成立

$$u^{(s)}\to u.$$

据式 (3.13.21) 并利用式 (3.13.47), (3.13.48), 类似地得到在 $[0,T]$ 上

$$\begin{aligned}
&|(\widehat{u}_t^{(s)}-\widehat{u}_t^{(s-1)})(\xi,t)|\\
\leqslant& C(1+\xi^2)\left[H^{(s)}(\xi)e^{-b\xi^2t}+|\beta\xi|\omega^{-1}(\xi)\int_0^t e^{-b\xi^2(t-\tau)}G_s(\xi,\tau)d\tau\right.\\
&\left.+a^2\omega^{-1}(\xi)\int_0^t e^{-b\xi^2(t-\tau)}|(\widehat{u}^{(s-1)}-\widehat{u}^{(s-2)})(\xi,\tau)|d\tau\right]\\
\leqslant& C(1+\xi^2)\{H^{(s)}(\xi)+\omega^{-1}(\xi)[2^{1-s}|\beta\xi|+a^2(2^{2-s}(I^{(s-1)}(\xi)+I^{(s-2)}(\xi))\\
&+H^{(s-1)}(\xi))]Z(\xi,t)\}\\
\leqslant& C(1+\xi^2)[2^{1-s}(I^{(s)}(\xi)+I^{(s-1)}(\xi))+H^{(s)}(\xi)],
\end{aligned}\tag{3.13.50}$$

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_t^{(s)}(\cdot,t)-u_t^{(s-1)}(\cdot,t)\|\\
=&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\widehat{u}_t^{(s)}(\cdot,t)-\widehat{u}_t^{(s-1)}(\cdot,t)\|\\
\leqslant& 2^{1-s}C\|(1+\xi^2)[I^{(s)}(\xi)+I^{(s-1)}(\xi)]\|+\|(1+\xi^2)H^{(s)}(\xi)\|\leqslant 2^{1-s}C.
\end{aligned}\tag{3.13.51}$$

据式 (3.13.51) 知 $\{u^{(s)}\}$ 是 $C([0,T];L^2)$ 中的基本序列, 故当 $s\to\infty$ 时, 于 $C([0,T];L^2)$ 中成立

$$u_t^{(s)}\to u_t.$$

综上所述, u 是问题 (3.13.2), (3.13.3) 的解.

第五步, 证唯一性. 设 $u_1,u_2\in C^\infty((0,T];H^\infty)\cap C([0,T];H^2)\cap C^1([0,T];L^2)$ 是问题 (3.13.2), (3.13.3) 的两个解. 令 $w=u_1-u_2$, 则 w 满足问题

$$\begin{aligned}
&w_{tt}-2bw_{xxt}+\alpha w_{xxxx}=\beta[(u_{1x}^n)_x-(u_{2x}^n)_x],\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\\
&w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}\tag{3.13.52}$$

式 (3.13.52) 中的方程两端与 w_t 作内积并分部积分得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|w(\cdot,t)\|^2+\|w_t(\cdot,t)\|^2+\|w_x(\cdot,t)\|^2+\alpha\|w_{xx}(\cdot,t)\|^2)+4b\|w_{xt}(\cdot,t)\|^2\\
=&-2\beta(w_xh(u_{1x},u_{2x}),w_{xt})+2(w_x,w_{xt})+2(w,w_t)\\
\leqslant& 3b\|w_{xt}(\cdot,t)\|^2+C(\|w(\cdot,t)\|^2+\|w_x(\cdot,t)\|^2+\|w_t(\cdot,t)\|^2),
\end{aligned}\tag{3.13.53}$$

其中 $h(u_{1x},u_{2x})=u_{1x}^{n-1}+u_{1x}^{n-2}u_{2x}+\cdots+u_{1x}u_{2x}^{n-2}+u_{2x}^{n-1}$. 这里我们利用了 $u_{1x},u_{2x}\in C([0,T];H^1)$, $\sup_{x\in\mathbb{R},t\in[0,T]}|h(u_{1x},u_{2x})|\leqslant C$. 据式 (3.13.53) 及 Gronwall 不等式得 $w=0$, 即 $u_1=u_2$.

当 $0<\alpha<b^2$ 时, 问题 (3.13.4) 关于 x 取 Fourier 变换, 所得关于 $\widehat{u}^{(0)}(\cdot,t)$ 的常微分方程的特征根为

$$\lambda_1(\xi)=-b\xi^2+\sqrt{\gamma(\xi)},\quad \lambda_2(\xi)=-b\xi^2-\sqrt{\gamma(\xi)},$$

其中 $\gamma(\xi)=(b^2-\alpha)\xi^4-a^2$. 显然, 如果 $\gamma(\xi)>0$, 则 $\lambda_1(\xi)<0,\lambda_2(\xi)<0$; 如果 $\gamma(\xi)<0$, 则 $\lambda_{1,2}(\xi)=-b\xi^2\pm i\sqrt{|\gamma(\xi)|}$.

问题 (3.13.6) 关于 x 取 Fourier 变换解得

$$\begin{aligned}\widehat{u^{(s)}}(\xi,t)=&(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\bigg\{(\lambda_2e^{\lambda_1t}-\lambda_1e^{\lambda_2t})\widehat{\varphi}^{(s)}+(e^{\lambda_2t}-e^{\lambda_1t})\widehat{\psi}^{(s)}\\&+i\beta\xi\int_0^t(e^{\lambda_1(t-\tau)}-e^{\lambda_2(t-\tau)})\mathscr{F}[(u_x^{(s-1)})^n](\xi,\tau)d\tau\\&+a^2\int_0^t(e^{\lambda_1(t-\tau)}-e^{\lambda_2(t-\tau)})\widehat{u}^{(s-1)}(\xi,\tau)d\tau\bigg\},\end{aligned}\tag{3.13.54}$$

其中, 当 $\gamma(\xi)>0$ 时, $\lambda_2-\lambda_1=2\sqrt{\gamma(\xi)}$; 当 $\gamma(\xi)<0$ 时, $\lambda_2-\lambda_1=2i\sqrt{|\gamma(\xi)|}$, 注意到存在常数 $A>0$, 使 $|e^{-\lambda_i(\xi)t}|\leqslant e^{-A\xi^2t}, i=1,2$. 仿照 1 的证明可得到定理 3.13.1 的结论. □

3.13.3 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [257]. 与本节有关的文献见 [36], [48], [59], [105], [163], [255], [256].

3.14 具有组合幂型非线性项的广义 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题

3.14.1 引言

此节研究下列广义 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt}-u_{xx}+u_{xxxx}+f(u)_{xx}=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\tag{3.14.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R},\tag{3.14.2}$$

其中 $f(u)=\sum_{k=1}^{l}a_k|u|^{p_k-1}u$ 或 $\sum_{k=1}^{l}a_k|u|^{p_k-1}u-\sum_{j=1}^{m}b_j|u|^{q_j-1}u$ 和 $a_k(1\leqslant k\leqslant l)$, $b_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 均为正常数. 我们应用位势井方法结合一些分析技巧给出 Cauchy 问题 (3.14.1), (3.14.2) 解的明显的整体适定性条件, 且也刻画解的爆破现象.

引理 3.14.1[258] 设 $f(u)=\pm|u|^{p-1}u,\ p>1$. 又设 $u\in H^1$ 和 $I(u)<0$, 则

$$d<\frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2, \tag{3.14.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
&d=\inf_{u\in\mathcal{N}}J(u),\\
&\mathcal{N}=\{u\in H^1|I(u)=0,\|u\|_{H^1}\neq 0\},\\
&J(u)=\frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2-\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\mathrm{d}x,\\
&I(u)=\|u\|_{H^1}^2-\int_{-\infty}^{\infty}uf(u)\mathrm{d}x,\\
&F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

同时, 我们发现这个引理对于$f(u)=\sum_{k=1}^{l}a_k|u|^{p_k-1}u$或$f(u)=\sum_{k=1}^{l}a_k|u|^{p_k-1}u-\sum_{j=1}^{m}b_j|u|^{q_j-1}u$ 是不成立的. 好事情是在文献 [259] 和 [260] 中有处理这类组合幂型非线性项的经验. 对于半线性双曲型方程 $u_{tt}-\Delta u=f(u)$ 和半线性抛物型方程 $u_t-\Delta u=f(u)$, 文献 [259] 和 [260] 的作者考虑下列形式

$$(\mathrm{H})\begin{cases}
\text{(i) } f(u)=\displaystyle\sum_{k=1}^{l}a_k|u|^{p_k-1}u,\\
a_k>0(1\leqslant k\leqslant l),\ 1<p=p_l<p_{l-1}<\cdots<p_1<\infty\\
\text{或}\\
\text{(ii) } f(u)=\displaystyle\sum_{k=1}^{l}a_k|u|^{p_k-1}u-\sum_{j=1}^{m}b_j|u|^{q_j-1}u,\\
a_k>0(1\leqslant k\leqslant l),b_j>0(1\leqslant j\leqslant m),\\
1<q_m<q_{m-1}<\cdots<q_1<p=p_l<p_{l-1}<\cdots<p_1<\infty
\end{cases}$$

的非线性项取得了成功.

虽然这个经验能帮助解决本节所考虑的一些问题, 但我们不能直接应用这些结论. 因此, 我们的目的是建立解决具有形如 (H) 的非线性项的 Boussinesq 方程的一些有效框架.

现在做一些准备. 正如文献 [261], 将问题 (3.14.1), (3.14.2) 可化为等价问题

$$\begin{cases}
u_t=v_x,\\
v_t=u_x-u_{xxx}-f(u)_x,
\end{cases} \tag{3.14.4}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad v(x,0)=v_0(x). \tag{3.14.5}$$

对于上面的等价问题, 局部解存在定理可以在下面的命题中发现.

命题 3.14.1[261] 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, $f(0)=0$. 又设 $(u_0,v_0)\in H^1\times L^2$, 则问题 (3.14.4), (3.14.5) 存在唯一局部弱解 $(u,v)\in C\left([0,T);H^1\times L^2\right)$ 满足

$$E(u,v)=E(u_0,v_0), \quad \forall t\in[0,T),$$

其中

$$E(u,v)=\frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2+\frac{1}{2}\|v\|^2-\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\mathrm{d}x.$$

同时, 如果 T_m 是 (u,v) 存在的最大时间, 于是或者

(i) $T_m=\infty$ 成立,

或者

(ii) $T_m<\infty$ 和 $\lim_{t\to T_m}(\|u\|_{H^1}+\|v\|)=\infty$ 成立.

由 $u_t=v_x$, 有 $\|v\|=\|\wedge^{-1}u_t\|$, 其中 $\wedge^{-\alpha}\varphi=\mathscr{F}^{-1}\left(|\xi|^{-\alpha}\mathscr{F}(\varphi)\right)$, 因此, 由命题 3.14.1 可得下面的推论.

推论 3.14.1 设 $f(u)$ 满足 (H). 又设 $u_0\in H^1$ 和 $\wedge^{-1}u_1\in L^2$, 则问题 (3.14.1), (3.14.2) 存在唯一局部弱解 $u\in C\left([0,T);H^1\right)$, 且 $\wedge^{-1}u_t\in C\left([0,T);L^2\right)$ 满足

$$E(t)=E(0), \quad 0\leqslant t<T, \tag{3.14.6}$$

其中

$$E(t)=\frac{1}{2}\|\wedge^{-1}u_t\|^2+\frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2-\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\mathrm{d}x.$$

同时, T_m 是 u 存在的最大时间, 则或者

(i) $T_m=\infty$ 成立,

或者

(ii) $T_m<\infty$ 和 $\lim_{t\to T_m}\left(\|u\|_{H^1}+\|\wedge^{-1}u_t\|\right)=\infty$ 成立.

3.14.2 预备结果

现在, 引入一些泛函和相关的集合. 下面的主要任务是描述这些泛函和集合的性质, 并指出它们在力学意义下如何运转. 首先, 对于问题 (3.14.1), (3.14.2), 我们定义起着如"位势能量"的泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|u_x\|^2\right)-\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2-\int_{-\infty}^{\infty}F(u)dx$$

和 Nehari 泛函

$$I(u)=\|u\|_{H^1}^2-\int_{-\infty}^{\infty}uf(u)\mathrm{d}x.$$

下面, 与 I 相关的 Nehari 流形起着关键的作用, 即

$$\mathcal{N} = \{u \in H^1 | I(u) = 0, \|u\|_{H^1} \neq 0\}.$$

现在容易给出由 d 定义的山路水平

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

我们给出上面引入的泛函性质. 虽然两个泛函 $J(u)$ 和 $I(u)$ 对于不同的 $f(u)$ 表现不同, 仅需在 (H) 中考虑情况 (ii) 来完成我们的讨论. 在 (H) 中的情况 (i) 可以容易地包含在对所有的 $1 \leqslant j \leqslant m$ 取 $b_j = 0$ 的情形. 无须进一步的说明, 在这一子节中所有后来的引理对于非线性项 $f(u)$ 满足 (H) 中的 (ii).

下面的引理指出关于泛函 $J(u)$ 和 $I(u)$ 的一些性质.

引理 3.14.2 设 $u \in H^1$ 和 $\|u\|_{H^1} \neq 0$, 则

(i) $\lim_{\lambda \to 0} J(\lambda u) = 0$, $\lim_{\lambda \to \infty} J(\lambda u) = -\infty$;

(ii) 在区间 $0 < \lambda < \infty$ 上, 存在唯一 $\lambda^* = \lambda^*(u)$ 使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} J(\lambda u)\right|_{\lambda = \lambda^*} = 0;$$

(iii) 在 $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ 上 $J(\lambda u)$ 是递增的, 在 $\lambda^* \leqslant \lambda < \infty$ 上是递减的, 且在 $\lambda = \lambda^*$ 处取得最大值;

(iv) 对于 $0 < \lambda < \lambda^*$, $I(\lambda u) > 0$, 对于 $\lambda^* < \lambda < \infty$, $I(\lambda u) < 0$ 和 $I(\lambda^* u) = 0$.

证明 首先, $\|u\|_{H^1} \neq 0$ 给出 $\|u\|_{p_k+1} \neq 0, 1 \leqslant k \leqslant l$ 和 $\|u\|_{q_j+1} \neq 0, 1 \leqslant j \leqslant s$.

(i) 结论由

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k \lambda^{p_k+1}}{p_k+1}\|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} + \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j \lambda^{q_j+1}}{q_j+1}\|u\|_{q_j+1}^{q_j+1}$$

得出.

(ii) 先注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} J(\lambda u) = \lambda \|u\|_{H^1}^2 - \sum_{k=1}^{l} a_k \lambda^{p_k} \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} + \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda^{q_j} \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} = 0, \quad \lambda > 0$$

等价于

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \lambda^{p_k-1} \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} - \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda^{q_j-1} \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} = \|u\|_{H^1}^2. \tag{3.14.7}$$

令

$$h(\lambda) = \sum_{k=1}^{l} a_k \lambda^{p_k - 1} \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} - \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda^{q_j - 1} \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1}$$
$$= \lambda^p \left(\sum_{k=1}^{l} a_k \lambda^{p_k - p} \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} - \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda^{q_j - p} \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} \right) \equiv \lambda^p \bar{h}(\lambda),$$

其中 $\bar{h}(\lambda) = \sum_{k=1}^{l} a_k \lambda^{p_k - p} \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} - \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda^{q_j - p} \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1}$. 注意到在 $0 < \lambda < \infty$ 上 $\bar{h}(\lambda)$ 是递增的和

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \bar{h}(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \bar{h}(\lambda) = \infty.$$

因此, 存在唯一 $\lambda_0 > 0$ 使得 $\bar{h}(\lambda_0) = 0$, 从而 $h(\lambda_0) = 0$, $h(\lambda) < 0$, 对于 $0 < \lambda < \lambda_0$, $h(\lambda) > 0$ 和在 $\lambda_0 < \lambda < \infty$ 上 $h(\lambda)$ 是递增的. 所以对于任意的 $\|u\|_{H^1} > 0$ 存在唯一的 $\lambda^* > \lambda_0$ 使得 (3.14.7) 成立.

(iii) 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} J(\lambda u) = \lambda \left(\|u\|_{H^1}^2 - h(\lambda) \right).$$

从 (ii) 的证明推出, 如果 $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$, 则 $h(\lambda) \leqslant 0$; 如果 $\lambda_0 < \lambda < \lambda^*$, 则 $0 < h(\lambda) < \|u\|_{H^1}^2$; 如果 $\lambda^* < \lambda < \infty$, 则 $h(\lambda) > \|u\|_{H^1}^2$. 所以对于 $0 < \lambda < \lambda^*$ 有 $\dfrac{d}{d\lambda} J(\lambda u) > 0$, 对于 $\lambda^* < \lambda < \infty$ 有 $\dfrac{d}{d\lambda} J(\lambda u) < 0$. 因此 (iii) 的论断成立.

(iv) 的论断由 (iii) 的证明和

$$I(\lambda u) = \lambda^2 \|u\|_{H^1}^2 - \sum_{k=1}^{l} a_k \lambda^{p_k+1} \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} + \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda^{q_j+1} \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} = \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} J(\lambda u)$$

推出. □

其次, 给出泛函 $I(u)$ 和在 H^1 空间中范数 $\|u\|_{H^1}$ 之间关系的一个引理. 这个关系将帮助我们连接 Neheri 泛函和一些有用的估计.

引理 3.14.3 设 $f(u)$ 满足 (H), $u \in H^1$, 则

(i) 如果 $0 < \|u\|_{H^1} < r_0$, 则 $I(u) > 0$;

(ii) 如果 $I(u) < 0$, 则 $\|u\|_{H^1} > r_0$;

(iii) 如果 $I(u) = 0$ 和 $\|u\|_{H^1} \neq 0$, 即 $u \in \mathcal{N}$, 则 $\|u\|_{H^1} \geqslant r_0$, 其中 r_0 是方程 $\varphi(r) = 1$ 的唯一实根,

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{l} a_k C_k^{p_k+1} r^{p_k - 1}, \quad C_k = \sup_{u \in H^1/\{0\}} \frac{\|u\|_{p_k+1}}{\|u\|_{H^1}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant l.$$

证明 (i) 由 $0 < \|u\|_{H^1} < r_0$ 有 $\|u\|_{q_j+1} > 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$ 和由

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l} a_k \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} - \sum_{j=1}^{m} b_j \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} &< \sum_{k=1}^{l} a_k \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{l} a_k C_k^{p_k+1} \|u\|_{H^1}^{p_k+1} \\ &= \varphi\left(\|u\|_{H^1}\right) \|u\|_{H^1}^2 < \|u\|_{H^1}^2\end{aligned}$$

得 $I(u) > 0$.

(ii) 条件 $I(u) < 0$ 给出

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1}^2 &< \sum_{k=1}^{l} a_k \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} - \sum_{j=1}^{m} b_j \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} \\ &< \sum_{k=1}^{l} a_k \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} \leqslant \varphi\left(\|u\|_{H^1}\right) \|u\|_{H^1}^2,\end{aligned}$$

这推出 $\|u\|_{H^1} > r_0$.

(iii) 如果 $I(u) = 0$ 和 $\|u\|_{H^1} \neq 0$, 则由

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1}^2 &= \sum_{k=1}^{l} a_k \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} - \sum_{j=1}^{m} b_j \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} \\ &< \sum_{k=1}^{l} a_k \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} \leqslant \varphi\left(\|u\|_{H^1}\right) \|u\|_{H^1}^2\end{aligned}$$

得 $\|u\|_{H^1} \geqslant r_0$. □

引理 3.14.4 设 $f(u)$ 满足 (H), 则

(i)

$$d \geqslant d_0 = \frac{p-1}{2(p+1)} r_0^2; \tag{3.14.8}$$

(ii) 如果 $u \in H^1$ 和 $I(u) < 0$, 则

$$I(u) < (p+1)\left(J(u) - d\right). \tag{3.14.9}$$

证明 (i) 为了讨论山路水平 d, 因为它的定义, 考虑 $u \in \mathcal{N}$. 根据引理 3.14.3 有 $\|u\|_{H^1} \geqslant r_0$, 这对任意的 $u \in \mathcal{N}$ 成立. 所以

$$\begin{aligned}J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{p_k+1} \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} + \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j}{q_j+1} \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} \\ &> \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{p+1}\left(\sum_{k=1}^{l} a_k \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} + \sum_{j=1}^{m} b_j \|u\|_{q_j+1}^{q_j+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1} I(u) = \frac{p-1}{2(p+1)} \|u\|_{H^1}^2 \\ &\geqslant \frac{p-1}{2(p+1)} r_0^2,\end{aligned}$$

这给出 $d \geqslant d_0$.

(ii) 对于 $u \in H^1$ 满足 $I(u) < 0$, 引理 3.14.2 给出, 存在一个 $\lambda^* \in (0,1)$ 使得 $I(\lambda^* u) = 0$. 由

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{p_k+1}\|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} + \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j}{q_j+1}\|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} \\
&= \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(u) + \sum_{k=1}^{l} a_k\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p_k+1}\right)\|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} b_j\left(\frac{1}{q_j+1} - \frac{1}{p+1}\right)\|u\|_{q_j+1}^{q_j+1}
\end{aligned}$$

和 d 的定义, 得

$$\begin{aligned}
d \leqslant J(\lambda^* u) &= \frac{p-1}{2(p+1)}\|\lambda^* u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(\lambda^* u) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{l} a_k\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p_k+1}\right)\|\lambda^* u\|_{p_k+1}^{p_k+1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} b_j\left(\frac{1}{q_j+1} - \frac{1}{p+1}\right)\|\lambda^* u\|_{q_j+1}^{q_j+1} \\
&= \frac{p-1}{2(p+1)}\lambda^{*2}\|u\|_{H^1}^2 + \sum_{k=1}^{l} a_k\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p_k+1}\right)\lambda^{*p_k+1}\|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} b_j\left(\frac{1}{q_j+1} - \frac{1}{p+1}\right)\lambda^{*q_j+1}\|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} \\
&< \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2 + \sum_{k=1}^{l} a_k\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p_k+1}\right)\|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} b_j\left(\frac{1}{q_j+1} - \frac{1}{p+1}\right)\|u\|_{q_j+1}^{q_j+1} = J(u) - \frac{1}{p+1}I(u),
\end{aligned}$$

这给出式 (3.14.8). □

下面, 令 Nehari 流形分为具有限制 $J(u) < d$ 的两个无界集合如下:

$$W = \{u \in H^1 \mid I(u) > 0,\ J(u) < d\} \cup \{0\},$$
$$V = \{u \in H^1 \mid I(u) < 0,\ J(u) < d\}$$

和没有限制的另外两个无界集合

$$W' = \{u \in H^1 \mid I(u) > 0\} \cup \{0\},$$
$$V' = \{u \in H^1 \mid I(u) < 0\}.$$

在下面两子节, 我们将指出它们如何与问题的解联系起来. 这里如果 $f(u)$ 满足 (H), 根据引理 3.14.3 中的 (ii), 容易发现一个显然的事实, $B_{r_0}=\{u\in H^1|\|u\|_{H^1}<r_0\}$ 是 W' 的一子集, 即 $B_{r_0}\subset W'$; 由引理 3.14.3 中的 (i) 可发现 V' 是 $B_{r_0}^c=\{u\in H^1|\|u\|_{H^1}>r_0\}$ 的一子集, 即 $V'\subset B_{r_0}^c$.

3.14.3 解的不变集

下面, 我们的目的是拓扑地刻画集合 W, V, W' 和 V'. 将指出在问题 (3.14.1), (3.14.2) 流的条件下, 它们所有的是不变的, 进一步在位势井理论基础上讨论问题, 这是基础.

定理 3.14.1 设 $f(u)$ 满足 (H). 又设 $u_0\in H^1$, $\wedge^{-1}u_1\in L^2$ 和 $E(0)<d$, 则在问题 (3.14.1), (3.14.2) 流的条件下, 两集合 W' 和 V' 是不变的.

证明 只证明 W' 的不变性. 对于 V' 的证明是类似的.

令 $u(x,t)\in C\left([0,T_m);H^1\right)$ 满足 $\wedge^{-1}u_t\in C\left([0,T_m);L^2\right)$ 是问题 (3.14.1), (3.14.2) 满足 $u_0\in W'$ 的唯一弱解, T_m 是 $u(x,t)$ 存在的最大时间. 证明对于 $0<t<T_m$, $u(x,t)\in W'$. 如果不对, 假定存在一个 $\bar{t}\in(0,T_m)$, 使得 $u(x,\bar{t})\notin W'$. 按照 $I(u(x,t))$ 对 t 的连续性, 存在一个 t_0, 使得 $u(x,t_0)\in\partial W'$. 注意到 $B_{r_0}\subset W'$ (见下面 W' 的定义), 我们知道 $0\notin\partial W'$. 所以有 $I(u(x,t_0))=0$ 且 $\|u(\cdot,t_0)\|_{H^1}\neq 0$. 由 d 的定义知 $J(u(x,t_0))\geqslant d$, 这与

$$E(t)=\frac{1}{2}\|\wedge^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2+J(u)\equiv E(0)<d,\quad 0\leqslant t<T_m \tag{3.14.10}$$

矛盾. □

由定理 3.14.1 和考虑到式 (3.14.10), 容易推出下列推论.

推论 3.14.2 设 $f(u)$ 满足 (H), $u_0\in H^1$, $\wedge^{-1}u_1\in L^2$. 又假定 $E(0)<d$, 则

(i) 只要 $I(u_0)>0$ 或 $\|u_0\|_{H^1}=0$, 问题 (3.14.1), (3.14.2) 的所有弱解都属于 W;

(ii) 只要 $I(u_0)<0$, 问题 (3.14.1), (3.14.2) 的所有弱解都属于 V.

进一步要给出另一个推论, 说明非正初能量引导问题 (3.14.1), (3.14.2) 的解限制在集合 V 内.

推论 3.14.3 设 $f(u)$ 满足 (H), $u_0\in H^1$, $\wedge^{-1}u_1\in L^2$. 又设 $E(0)<0$ 或 $E(0)=0$, $\|u_0\|_{H^1}\neq 0$, 问题 (3.14.1), (3.14.2) 的所有弱解都属于 V.

证明 由 $d>0$ 和推论 3.14.2 可以看出, 只证 $I(u_0)<0$ 就够了. 从

$$\frac{1}{2}\|\wedge^{-1}u_1\|^2+\frac{p-1}{2(p+1)}\|u_0\|_{H^1}^2+\frac{1}{p+1}I(u_0)\leqslant E(0) \tag{3.14.11}$$

发现 $E(0)<0$ 或 $E(0)=0$ 和 $\|u_0\|_{H^1}\neq 0$, 于是 $I(u_0)<0$. □

3.14.4 解的整体存在性和解在有限时刻爆破

现在建立一些一般的准则, 决定是否以给定的初值在可能低的能量水准给出出现问题 (3.14.1), (3.14.2) 解的整体存在或爆破. 其次, 给出整体存在准则.

定理 3.14.2 设 $f(u)$ 满足 (H), $u_0 \in H^1$, $\wedge^{-1}u_1 \in L^2$ 和 $E(0) < d$. 又设 $I(u_0) > 0$ 或 $\|u_0\|_{H^1} = 0$, 即 $u_0 \in W'$, 则问题 (3.14.1), (3.14.2) 存在唯一整体弱解 $u(x,t) \in C\left([0,\infty); H^1\right)$ 且 $\wedge^{-1}u_t \in C\left([0,\infty); L^2\right)$ 和对于 $0 \leqslant t < \infty$ $u(x,t) \in W$.

证明 首先, 命题 3.14.1 保证了唯一局部解 $u(x,t) \in C\left([0,T_m); H^1\right)$ 的存在性, 且 $\wedge^{-1}u_t \in C\left([0,T_m); L^2\right)$, 其中 T_m 是 $u(x,t)$ 存在的最大时间. 现在需要证明 $T_m = \infty$. 当 $E(0) < d$, $u_0 \in W'$ 时, 在定理 3.14.1 的帮助下, 得到对于 $t \in [0,T_m)$ $u(x,t) \in W'$. 由式 (3.14.10) 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\| \wedge^{-1} u_t\|^2 + \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(u) \\ \leqslant &\frac{1}{2}\| \wedge^{-1} u_t\|^2 + J(u) = E(0) < d, \quad 0 \leqslant t < T_m, \end{aligned} \tag{3.14.12}$$

于是给出

$$\|u\|_{H^1}^2 \leqslant \frac{2(p+1)}{p-1}d, \quad \| \wedge^{-1} u_t\|^2 \leqslant 2d, \quad 0 \leqslant t < T_m.$$

再应用命题 3.14.1 知 $T_m = \infty$. 进一步, 推论 3.14.2 指出对 $0 \leqslant t < \infty$, $u(x,t) \in W$. □

利用 Neheri 泛函 $I(u)$ 和 $\|u\|_{H^1}$ 之间的关系, 可得下面的推论.

推论 3.14.4 如果在定理 3.14.2 中假定"$I(u_0) > 0$ 或 $\|u_0\|_{H^1} = 0$"用"$\|u_0\|_{H^1} < r_0$"替代, 其中 r_0 是在引理 3.14.3 中定义的, 则问题 (3.14.1), (3.14.2) 存在唯一整体弱解 $u(x,t) \in C\left([0,\infty); H^1\right)$ 且 $\wedge^{-1}u_t \in C\left([0,\infty); L^2\right)$ 和对于 $0 \leqslant t < \infty$, $u(x,t) \in W$. 另外下面的界成立

$$\|u\|_{H^1}^2 \leqslant \frac{2(p+1)}{p-1}E(0), \quad \| \wedge^{-1} u_t\|^2 \leqslant 2d, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{3.14.13}$$

证明 不等式 $\|u_0\|_{H^1} < r_0$ 推出 $0 < \|u_0\|_{H^1} < r_0$ 或平凡情况, $\|u_0\|_{H^1} = 0$. 对于非平凡情况, 引理 3.14.3 告知 $I(u_0) > 0$, 这就是定理 3.14.2 的情况和式 (3.14.12) 成立. 现在仅需要验证 $E(0) \geqslant 0$, 这可以由式 (3.14.10) 得到. □

下面的说明指出, 有低能量的初值在 V 中山路水平出现爆破.

定理 3.14.3 设 $f(u)$ 满足 (H), $u_0 \in H^1$, $\wedge^{-1}u_0 \in L^2$, $\wedge^{-1}u_1 \in L^2$ 和 $E(0) < d$. 又设 $I(u_0) < 0$, 即 $u_0 \in V'$, 则问题 (3.14.1), (3.14.2) 的弱解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破, 即 $u(x,t)$ 存在的最大时间 T_m 是有限的和

$$\lim_{t \to T_m} \left(\|u\|_{H^1} + \| \wedge^{-1} u_t\|\right) = \infty. \tag{3.14.14}$$

证明 首先, 命题 3.14.1 给出问题 (3.14.1), (3.14.2) 存在唯一局部弱解 $u(x,t) \in C\left([0,T_m);H^1\right)$, 且 $\wedge^{-1}u_t \in C\left([0,T_m);L^2\right)$ 满足

$$\wedge^{-2}u_{tt} + u - u_{xx} - f(u) = 0, \quad 0 < T < T_m, \tag{3.14.15}$$

其中 T_m 是 $u(x,t)$ 存在的最大时间. 现在证明 $T_m < \infty$. 用反证法证明, 假定 $T_m = \infty$. 由 $\wedge^{-1}u_0 \in L^2$ 推出 $\wedge^{-1}u \in C^1\left([0,\infty);L^2\right)$[183]. 置

$$\phi(t) = \|\wedge^{-1} u\|^2,$$

于是

$$\dot{\phi}(t) = 2(\wedge^{-1}u_t, \wedge^{-1}u)$$

和

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}(t) &= 2\|\wedge^{-1} u_t\|^2 + 2(\wedge^{-1}u_{tt}, \wedge^{-1}u)\\ &= 2\|\wedge^{-1} u_t\|^2 - 2(\wedge^{-2}u_{tt}, u)\\ &= 2\|\wedge^{-1} u_t\|^2 - 2I(u), \quad 0 < t < \infty.\end{aligned} \tag{3.14.16}$$

由 Hölder 不等式得

$$\dot{\phi}^2(t) \leqslant 4\phi(t)\|\wedge^{-1} u_t\|^2.$$

因此,

$$\begin{aligned}\phi(t)\ddot{\phi}(t) - \frac{p+3}{4}\dot{\phi}^2(t) &\geqslant \phi(t)(\ddot{\phi}(t) - (p+3)\|\Lambda^{-1}u_t\|^2)\\ &= \phi(t)(-(p+1)\|\Lambda^{-1}u_t\|^2 - 2I(u)), \quad 0 < t < \infty.\end{aligned} \tag{3.14.17}$$

其次, 处理上面的估计项 $-(p+1)\|\wedge^{-1} u_t\|^2$. 注意到能量等式 $E(t) = E(0)$ 给出

$$\frac{1}{2}\|\wedge^{-1} u_t\|^2 + J(u) = E(0),$$

所以

$$-(p+1)\|\wedge^{-1} u_t\|^2 = 2(p+1)\left(J(u) - E(0)\right).$$

将上式代入式 (3.14.17), 可以得估计

$$\begin{aligned}\phi(t)\ddot{\phi}(t) - \frac{p+3}{4}\dot{\phi}^2(t) &\geqslant 2\phi(t)\left((p+1)\left(J(u) - E(0)\right) - I(u)\right)\\ &> 2\phi(t)\left((p+1)\left(J(u) - d\right)\right) - I(u)).\end{aligned} \tag{3.14.18}$$

由 $u_0 \in V'$ 和推论 3.14.2 有 $u(x,t) \in V$, 即对于 $0 \leqslant t < \infty$, $I(u) < 0$. 这就使得式 (3.14.9) 成立. 于是推出

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t) - \frac{p+3}{4}\dot{\phi}^2(t) > 0, \quad 0 < t < \infty.$$

因而

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\phi^{-\alpha}(t)\right)=\frac{-\alpha}{\phi^{\alpha+2}(t)}\Big(\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(\alpha+1)\dot{\phi}^2(t)\Big)<0, \tag{3.14.19}$$

$$\alpha=\frac{p-1}{4},\quad 0<t<\infty.$$

为了指出矛盾, 仍需要确信, 可以找到 t_1 使得 $\phi(t_1)>0$ 和 $\dot{\phi}(t_1)>0$. 首先, 由式 (3.14.16), (3.14.9) 和 $E(0)<d$, 看出

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}(t)&\geqslant -2I(u)>2(p+1)\left(d-J(u)\right)\\&\geqslant 2(p+1)\left(d-E(0)\right)\equiv\delta_0>0,\quad 0<t<\infty\end{aligned}$$

和

$$\dot{\phi}(t)>\delta_0 t+\dot{\phi}(0),\quad 0<t<\infty.$$

因此存在一个 $t_0\geqslant 0$, 使得对于 $t_0<t<\infty$, $\dot{\phi}(t)>\dot{\phi}(t_0)>0$ 和

$$\phi(t)>\dot{\phi}(t_0)(t-t_0)+\phi(t_0)\geqslant\dot{\phi}(t_0)(t-t_0),\quad t_0<t<\infty.$$

所以存在一个 t_1 使得 $\phi(t_1)>0$ 和 $\dot{\phi}(t_1)>0$. 由此和式 (3.14.19), 可以找到一个 $T_1>0$, 使得

$$\lim_{t\to T_1}\phi^{-\alpha}(t)=0,$$

从而

$$\lim_{t\to T_1}\phi(t)=\infty,$$

这与 $T_m=\infty$ 矛盾. 最后由 $T_m<\infty$ 和命题 3.14.1 得式 (3.14.14). □

考虑到推论 3.14.3, 由定理 3.14.3 得到下面的推论.

推论 3.14.5　设 $f(u)$ 满足 (H), $u_0\in H^1$, $\wedge^{-1}u_0\in L^2$, $\wedge^{-1}u_1\in L^2$. 又设 $E(0)<0$ 或 $E(0)=0$, $\|u_0\|_{H^1}\neq 0$, 则问题 (3.14.1), (3.14.2) 的弱解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破.

现在准备给出描述问题 (3.14.1), (3.14.2) 演化的一个强条件, 当初值有能量低于山路水平 d 时, 如果 u_0 取在 $\mathcal{N}$ $(u_0\in W')$ 内, 解整体存在, 反之, 如果 u_0 取在 $\mathcal{N}$ $(u_0\in V')$ 之外, 解在有限时刻爆破; 且无解位于 Neheri 流形 $\mathcal{N}$ 上.

定理 3.14.4　设 $f(u)$ 满足 (H), $u_0\in H^1$, $\wedge^{-1}u_0\in L^2$, $\wedge^{-1}u_1\in L^2$ 和 $E(0)<d$, 则当 $I(u_0)>0$ 时, 问题 (3.14.1), (3.14.2) 的弱解 $u(x,t)$ 整体存在; 而当 $I(u_0)<0$ 时, 问题 (3.14.1), (3.14.2) 的弱解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破.

通过上述定理可以发现在较强的条件下 Nehari 泛函 $I(u)$ 以及由它派生出的 Nehari 流形 $\mathcal{N}$ 起到了分割初值空间的作用, 即将初值分割为导致整体解存在的空

间和导致局部解在有限时刻爆破的空间. 由定理 3.14.4 可以看出推论 3.14.5 的条件是相对严格的, 而这样的条件也是近几十年来在能量的辅助下证明爆破的经典结论模式. 所以位势井方法使得在正定能量下的爆破成为可能. 另外我们通过定理 3.14.3 发现 $I(u)$ 和 $\|u\|_{H^1}$ 之间有很紧密的关系, 但它们之间的互推关系并不对等, 也就是说不是充分必要的, 即由 $0<\|u\|_{H^1}<r_0$ 推得 $I(u)>0$ 却不能由 $I(u)>0$ 推得 $0<\|u\|_{H^1}<r_0$. 对于 $I(u)<0$ 的情况也是这样的. 所以 $\|u\|_{H^1}$ 无法简单地取代 $I(u)$ 的角色. 然后下面的定理将指出, 只要我们适当降低山路水平, 即用 d_0 代替 $d(d_0<d)$, 则就可以实现这样的替代. 而此替代的意义在于, $\|u\|_{H^1}$ 表示在泛函空间内距零点的距离, 所以它有很直观的拓扑结构.

定理 3.14.5 设 $f(u)$ 满足 (H), $u_0\in H^1$, $\wedge^{-1}u_0\in L^2$, $\wedge^{-1}u_1\in L^2$ 和 $E(0)<d_0$, 则当 $\|u_0\|_{H^1}<r_0$ 时, 问题 (3.14.1), (3.14.2) 的弱解整体存在和对于 $0\leqslant t<\infty$, $\|u(t)\|_{H^1}<r_0$; 当 $\|u_0\|_{H^1}\geqslant r_0$ 时, 问题 (3.14.1), (3.14.2) 的弱解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破, 其中 d_0 和 r_0 分别在引理 3.14.4 和引理 3.14.3 中定义.

证明 引理 3.14.4 说明 d_0 小于 d, 即 $E(0)<d_0\leqslant d$. 那么分别考虑 $\|u_0\|_{H^1}<r_0$ 和 $\|u_0\|_{H^1}\geqslant r_0$ 情况证明这个定理.

(i) 如果 $\|u_0\|_{H^1}<r_0$, 可以忽略平凡情况 $\|u_0\|_{H^1}=0$ 且仅考虑情况 $0<\|u_0\|_{H^1}<r_0$. 于是引理 3.14.3 给出 $I(u_0)>0$, 由定理 3.14.2 显示问题 (3.14.1), (3.14.2) 存在唯一弱解 $u(t)\in C\left([0,\infty);H^1\right)$ 且 $\wedge^{-1}u_t\in\left([0,\infty);L^2\right)$ 和对于 $0\leqslant t<\infty$, $u(x,t)\in W$. 同时由能量等式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\wedge^{-1}u_t\|^2+\frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2+\frac{1}{p+1}I(u)\\ \leqslant&\frac{1}{2}\|\wedge^{-1}u_t\|^2+J(u)=E(0)<d_0=\frac{p-1}{2(p+1)}r_0^2,\quad 0\leqslant t<\infty,\end{aligned}\tag{3.14.20}$$

式 (3.14.20) 与 $I(u)\geqslant 0$ 给出, 对于 $0\leqslant t<\infty$, $\|u(t)\|_{H^1}<r_0$.

(ii) 如果 $\|u_0\|_{H^1}\geqslant r_0$, 于是根据

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\wedge^{-1}u_1\|^2+\frac{p-1}{2(p+1)}\|u_0\|_{H^1}^2+\frac{1}{p+1}I(u_0)\\ \leqslant&E(0)<d_0=\frac{p-1}{2(p+1)}r_0^2,\end{aligned}$$

有 $I(u_0)<0$, 即 $u_0\in V'$. 所以由定理 3.14.3 得问题 (3.14.1), (3.14.2) 的弱解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破. 由于集合 V' 的不变性 (定理 3.14.1) 也有 $u(x,t)\in V'$, 即对于 $0\leqslant t<\infty$, $I(u(t))<0$. 根据反证法可以进一步指出, 对于 $0\leqslant t<T_m$, $\|u\|_{H^1}\geqslant r_0$, 其中 T_m 是最大时间. 假定存在一个 $t_0\in(0,T_m)$ 使得 $\|u(\cdot,t_0)\|_{H^1}<r_0$, 则引理 3.14.3 给出 $I(t_0)>0$, 这与集合 V' 的不变性矛盾.

现在总结这节的结果. 首先引入下列集合.

$\mathcal{G} = \{u_0 \in H^1|$对于所有的$t > 0$, 问题 (3.14.1), (3.14.2) 存在解$u = u(x,t)\}$;

$\mathcal{B} = \{u_0 \in H^1|$问题 (3.14.1), (3.14.2) 的解在有限时刻爆破$\}$;

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^+ &= \{u \in H^1|E(t) < d; I(u) > 0\};\\
\mathcal{B}^+ &= \{u \in H^1|E(t) < d; I(u) < 0\};\\
\mathcal{G}^- &= \{u \in H^1|E(t) < d_0; \|u\|_{H^1} < r_0\};\\
\mathcal{B}^- &= \{u \in H^1|E(t) < d_0; \|u\|_{H^1} \geqslant r_0\};\\
\mathcal{B}^{-+} &= \{u \in H^1|E(t) < d_0; I(u) < 0\}.
\end{aligned}$$

显然 $H^1 = \mathcal{G} \cup \mathcal{B}$. 于是在这一节得到的结果, 可以得出下列论断.

定理 3.14.6 设 $f(u)$ 满足 (H), $u_0 \in H^1$, $\wedge^{-1}u_1 \in L^2$, 则

(i) 在问题 (3.14.1), (3.14.2) 流的条件下, 集合 $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}^+$, $\mathcal{B}^+$, $\mathcal{G}^-$, $\mathcal{B}^-$ 均为不变的.

(ii) 如果 $u_0 \in \mathcal{G}^+$, 则 $u_0 \in \mathcal{G}$. 如果 $u_0 \in \mathcal{B}^+$, 则 $u_0 \in \mathcal{B}$. 因此 $\mathcal{G}^+ \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{B}^+ \subset \mathcal{B}$.

(iii) 如果 $u_0 \in \mathcal{G}^-$, 则 $u_0 \in \mathcal{G}$. 如果 $u_0 \in \mathcal{B}^-$, 则 $u_0 \in \mathcal{B}$. 因此 $\mathcal{G}^- \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{B}^- \subset \mathcal{B}$.

(iv) 如果 $u_0 \in \mathcal{G}^-$, 则 $u_0 \in \mathcal{G}^+$. 如果 $u_0 \in \mathcal{B}^{-+}$, 则 $u_0 \in \mathcal{B}^-$. 因此 $\mathcal{G}^- \subset \mathcal{G}^+ \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{B}^{-+} \subset \mathcal{B}^- \subset \mathscr{B}$.

由 (iv) 的叙述, 可以发现连接 $\mathcal{B}^+$ 和 $\mathcal{B}^-$ 的关系是不容易的, 这是一个未解决的问题.

3.14.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [262]. 与本节有关的文献见 [36], [39], [55], [60], [68], [219], [220], [263]–[269].

第 4 章　非线性高阶抛物型方程

4.1　非线性拟抛物型方程 Cauchy 问题解的整体存在性

4.1.1　引言

本节研究下列非线性拟抛物型方程的 Cauchy 问题

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} + \gamma v_x + f(v)_x = \varphi(v_x)_x + g(v) - \alpha g(v)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{4.1.1}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.1.2}$$

其中 $v(x,t)$ 表示未知函数, $\alpha, \beta > 0$ 是常数, γ 是实数, $f(s), \varphi(s)$ 和 $g(s)$ 是给定的非线性函数, $v_0(x)$ 是已知的初值函数.

我们还研究 Cauchy 问题

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} = g(v) - \alpha g(v)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{4.1.3}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.1.4}$$

其中 $\alpha, \beta, g(s)$ 和 $v_0(x)$ 是由 (4.1.1) 和 (4.1.2) 确定的.

方程 (4.1.1) 包含许多模型. 例如, 如果 $\gamma = 0, \beta = 1$ 和 $f(s) = \varphi(s) = 0$ 时, (4.1.1) 化为方程

$$v_t - \alpha v_{xxt} = v_{xx} + g(v) + F(v), \tag{4.1.5}$$

其中 $F(v) = -\alpha[g''(v)v_x^2 + g'(v)v_{xx}]$ 是给定的非线性函数, $\alpha = \dfrac{h^2}{12}$, h 是晶格间距和 “$'$” 表示对 v 求导数. 方程 (4.1.5) 是在 Padé近似基础上得到的一连续模型. 事实上, 他们研究的一般模型是

$$v_{n,t} = \Delta_2 v_n + F(v_n), \tag{4.1.6}$$

其中 n 表示晶格的位置和 $\Delta_2 v_n = \dfrac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{h^2}$. 这种情况对应一个分量 (离散) 的反应扩散. 利用 Padé方法, 他们获得最一般的形式 (4.1.5). 在文献 [171] 中应用数值方法作者解方程 (4.1.5) 和原离散问题 (4.1.6) 的结果进行了比较. 但是关于方程 (4.1.5) 的定解问题在文献 [171] 中没有任何讨论.

如果 $\varphi(s) = g(s) = 0$, 方程 (4.1.1) 变为广义正则长波-Burgers 方程

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} + \gamma v_x + f(v)_x = 0. \tag{4.1.7}$$

在文献 [270] 中作者研究了方程 (4.1.7) 的 Cauchy 问题具有限能量解, 当 t 趋于无穷大时衰减为零的问题, 其中 $f(s)$ 是一给定的非线性函数和 $\gamma>0$ 是常数.

如果 $\beta=\gamma=0$, $f(s)=\varphi(s)=0$ 和 $g(v)=0$, 但 $g(v)_{xx}\neq 0$, 则方程 (4.1.1) 变为源于人口动力学的粘性扩散方程

$$v_t-\alpha v_{xxt}=\alpha g(v)_{xx}, \tag{4.1.8}$$

其中 $\alpha>0$ 是常数和 $g(s)$ 是给定的非线性函数. 在文献 [271] 中, 对于某一 $\delta>0$ 光滑函数 $\varphi(s)$ 满足

$$\varphi(0)=\varphi(\infty)=0,\quad 0<\varphi(p)\leqslant\varphi(\delta),\quad \forall p>0$$

时, 作者已证明了方程 (4.1.8) 的病态问题解的存在性和稳定性.

如果 $\beta=\gamma=0$, $f(s)=g(s)=0$, 则方程 (4.1.1) 化为 Sobolev-Galpern 型方程

$$v_t-\alpha v_{xxt}=\varphi(v_x)_x. \tag{4.1.9}$$

文献 [272] 证明了方程 (4.1.9) 的初边值问题弱解的整体存在性和唯一性.

形如 (4.1.1) 的方程与著名的 BBM 方程

$$v_t-v_{xxt}+v_x+vv_x=0$$

有紧密的关系. 此方程于 1972 年作为 KdV 方程的改进由 Benjamin T B, Bona J L 和 Mahong J J 提出[273,274]. 其后, 周期边值问题[273], Cauchy 问题[275−280] 和初边值问题[30] 对于不同的广义 BBM 方程进行了研究. 在这些结果中, 对于不同的广义 BBM 方程和在某些假定下所讨论的 Cauchy 问题解的长时间行为最有影响. 上述问题解的 L^2 和 L^∞ 的衰减速度已在文献 [275]–[280] 建立. 例如, 在文献 [277] 中作者研究了 Benjamin-Bona-Mahong-Burgers 方程

$$v_t-v_{xxt}-\alpha v_{xx}+v_x+vv_x=0,\quad \alpha>0,\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0 \tag{4.1.10}$$

关于小初值问题, 文献 [275]–[276] 的作者讨论了下列一维广义 BBM 方程

$$v_t-v_{xxt}+v_x+v^pv_x=0,\quad p>4 \tag{4.1.11}$$

解的衰减.

下面将证明 Cauchy 问题 (4.1.1), (4.1.2), 当 $s\geqslant 2$ 时, 在 $C^1([0,\infty);H^s)$ 中有唯一整体广义解和当 $s>\dfrac{5}{2}$ 时,在 $C^1([0,\infty);H^s)$ 中存在唯一整体古典解. 我们还证明当 $m\geqslant 2$ 时, Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 在 $C^2([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty)$ 中有唯一整体广义解, 且当 $m>2+\dfrac{1}{p}$ 时, Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 在 $C^2([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty)$ 中存在唯一整体古典解.

4.1.2 Cauchy 问题 (4.1.1), (4.1.2) 整体解的存在性和唯一性

在此子节中, 为了讨论方便起见, 作尺度变换

$$v(x,t) = u\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x, t\right), \tag{4.1.12}$$

从而 Cauchy 问题 (4.1.1), (4.1.2) 变为下列 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} & u_t - u_{xxt} - \frac{\beta}{\alpha}u_{xx} + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x + g(u) - g(u)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.1.14}$$

其中 $u_0(x) = v_0(\sqrt{\alpha}x)$. 我们这里仅研究 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 的整体广义解的存在性和唯一性、整体古典解的存在性和唯一性以及解的渐近性质, 因为我们可以利用尺度变换 (4.1.12) 由 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 的解得到 Cauchy 问题 (4.1.1), (4.1.2) 同样的结果.

1. Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) *局部广义解的存在唯一性*

现在, 我们应用一个二阶常微分方程的基本解将 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 化为一积分方程. 利用压缩映射原理证明积分方程有唯一局部广义解, 即证明 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 存在唯一局部广义解.

设 $u \in C^1([0,T]; H^s)(s \geqslant 2)$ 是 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 的广义解. 方程 (4.1.13) 可以写为

$$\begin{aligned} & u_t + \frac{\beta}{\alpha}u - g(u) - \left(u_t + \frac{\beta}{\alpha}u - g(u)\right)_{xx} \\ &= \frac{\beta}{\alpha}u - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x. \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

方程 (4.1.15) 可以再改写为

$$\begin{aligned} u_t + \frac{\beta}{\alpha}u - g(u) &= (I - \partial_x^2)^{-1}\left[\frac{\beta}{\alpha}u - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x\right] \\ &= G * \left[\frac{\beta}{\alpha}u - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x\right]. \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

由式 (4.1.14) 和式 (4.1.16), 我们知道 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 等价于积分方程

$$u(x,t) = u_0(x) - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^t u(x,\tau)d\tau + \int_0^t g(u(x,\tau))d\tau$$

$$+\int_0^t G*\left[\frac{\beta}{\alpha}u-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x\right](x,\tau)d\tau. \quad (4.1.17)$$

定义 4.1.1 对于任意的 $T>0$, 若 $s\geqslant 2, u_0\in H^s, u\in C([0,T];H^s)$ 满足积分方程 (4.1.17), 则 $u(x,t)$ 称为积分方程 (4.1.17) 的连续解或 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 的广义解. 若 $T<\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 的局部广义解. 若 $T=\infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 的整体广义解.

我们将应用压缩映射原理证明积分方程 (4.1.17) 存在唯一局部连续解.

下面假定 $g(0)=0$. 对于 $s>\dfrac{3}{2}$ 和 $u_0\in H^s$, 考虑 Banach 空间

$$X(T)=\{u|u\in C([0,T];H^s\},$$

且赋予范数

$$\|u\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{H^s},\quad \forall u\in X(T).$$

由 Sobolev 嵌入定理知

$$u,u_x\in C([0,T];L^\infty),\quad \forall u\in X(T)$$

和 $\|u\|_\infty\leqslant K_2\|u\|_{H^s}$, $\|u_x\|_\infty\leqslant K_2\|u\|_{H^s}$.

定义映射 S 如下:

$$\begin{aligned}Sv(x,t)=&u_0(x)-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t v(x,\tau)d\tau+\int_0^t g(v(x,\tau))d\tau\\&+\int_0^t G*\left[\frac{\beta}{\alpha}v-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}v_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(v)_x\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x\right)_x\right](x,\tau)d\tau,\quad \forall v\in X(T).\end{aligned}\quad (4.1.18)$$

显然, 若 $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), f\in C^{[s]}(\mathbb{R})$ 和 $\varphi\in C^{[s]}(\mathbb{R})$, 则 $S:X(T)\mapsto X(T)$.

现在, 对于任意初值 $u_0\in H^s$, 令 $\|u_0\|_{H^s}=M$, 定义

$$Q(M,T)=\{u|u\in X(T)|\|u\|_{X(T)}\leqslant M+1\}.$$

显然, 对于每一对 $M,T>0$, $Q(M,T)$ 是 $X(T)$ 的一个不空有界闭凸子集. 我们的目的是证明 S 在 $Q(M,T)$ 中有唯一不动点.

引理 4.1.1 设 $s>\dfrac{3}{2}, u_0\in H^s, g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), g(0)=0, f\in C^{[s]}(\mathbb{R})$ 和 $\varphi\in C^{[s]}(\mathbb{R})$, 则 S 映 $Q(M,T)$ 到 $Q(M,T)$ 和若 T 是相对于 M 适当小, $S:Q(M,T)\mapsto Q(M,T)$ 是严格压缩的.

证明 首先证明, 当 T 充分小时, S 映 $Q(M,T)$ 到自身. 令 $v \in Q(M,T)$ 给定. 由引理 1.8.13 有

$$\|g(v(\cdot,t))\|_{H^s} \leqslant C_1(K_2M+K_2)\|v(\cdot,t)\|_{H^s}, \tag{4.1.19}$$

其中 $C_1(K_2M+K_2)$ 指出 C_1 是依赖于 K_2M+K_2 的常数, C_1 如引理 1.8.13 所述.

直接计算推出

$$\begin{aligned}\|G*v(\cdot,t)\|_{H^s} &= \left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s\left|((I-\partial_x^2)^{-1}v)\,\widehat{}\,(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}}\frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\xi|^2)^2}|\hat{v}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \|v(\cdot,t)\|_{H^{s-2}}.\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

应用式 (4.1.20) 和引理 1.8.13 得

$$\|G*v_x(\cdot,t)\|_{H^s} = \|v_x(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} \leqslant \|v(\cdot,t)\|_{H^s}; \tag{4.1.21}$$

$$\begin{aligned}\|G*f(v(\cdot,t))_x\|_{H^s} &= \|f(v(\cdot,t))_x\|_{H^{s-2}} \leqslant \|f(v(\cdot,t))\|_{H^{s-1}}\\ &\leqslant C_1(K_2M+K_2)\|v(\cdot,t)\|_{H^s};\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

$$\begin{aligned}\left\|G*\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x(\cdot,t)\right)_x\right\|_{H^s} &= \left\|\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x(\cdot,t)\right)_x\right\|_{H^{s-2}}\\ &\leqslant \left\|\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x(\cdot,t)\right)\right\|_{H^{s-1}}\\ &\leqslant C_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\|v_x(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}\\ &\leqslant C_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\|v(\cdot,t)\|_{H^s}.\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

因此, 由式 (4.1.18)—(4.1.23), 引理 1.8.13 和 Minkowski 积分不等式有

$$\begin{aligned}\|Sv\|_{H^s} \leqslant& \|u_0\|_{H^s} + \frac{\beta}{\alpha}\int_0^t\|v(x,\tau)\|_{H^s}d\tau + \int_0^t\|g(v(x,\tau))\|_{H^s}d\tau\\ &+\int_0^t\left\|G*\left[\frac{\beta}{\alpha}v-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}v_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(v)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_x\right)_x\right](\cdot,\tau)\right\|_{H^s}d\tau\\ \leqslant& M+(M+1)\left[\frac{2\beta}{\alpha}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)C_1(K_2M+K_2)+\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}}\right.\\ &\left.+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}C_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\right]T.\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

T 选得充分小, 使得

$$(M+1)\left[\frac{2\beta}{\alpha}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)C_1(K_2M+K_2)+\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}}\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}C_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\Bigg]T<1, \tag{4.1.25}$$

于是可知 $\|Sv\|_{X(T)}\leqslant M+1$, 即 $S:Q(M,T)\mapsto Q(M,T)$.

现在, 证明映射 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 和 $v_1,v_2\in Q(M,T)$ 给定, 则有

$$\begin{aligned}
&Sv_1(x,t)-Sv_2(x,t)\\
=&-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t[v_1(x,\tau)-v_2(x,\tau)]d\tau+\int_0^t[g(v_1(x,\tau))-g(v_2(x,\tau))]d\tau\\
&+\int_0^t G*\left\{\frac{\beta}{\alpha}(v_1-v_2)-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}(v_{1x}-v_{2x})-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}[f(v_1)_x-f(v_2)_x]\right.\\
&\left.+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}\right)_x\right]\right\}(x,\tau)d\tau.
\end{aligned}\tag{4.1.26}$$

应用 Minkowski 积分不等式可知

$$\begin{aligned}
&\|Sv_1-Sv_2\|_{H^s}\\
\leqslant&\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t\|v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau+\int_0^t\|g(v_1(\cdot,\tau))-g(v_2(\cdot,\tau))\|_{H^s}d\tau\\
&+\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t\|G*(v_1-v_2)(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau+\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}}\int_0^t\|G*(v_{1x}-v_{2x})(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\\
&+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^t\|G*[f(v_1)_x-f(v_2)_x](\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau\\
&+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^t\left\|G*\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}\right)_x\right](\cdot,\tau)\right\|_{H^s}d\tau.
\end{aligned}\tag{4.1.27}$$

由引理 1.8.14 得

$$\|g(v_1(\cdot,t))-g(v_2(\cdot,t))\|_{H^s}\leqslant C_2(K_2M+K_2)\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{H^s}. \tag{4.1.28}$$

类似于式 (4.1.20)—(4.1.23) 可见

$$\|G*(v_1-v_2)(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{H^s}, \tag{4.1.29}$$

$$\|G*(v_{1x}-v_{2x})(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{H^s}, \tag{4.1.30}$$

$$\begin{aligned}
\|G*[f(v_1)_x-f(v_2)_x](\cdot,t)\|_{H^s}&\leqslant\|f(v_1(\cdot,t))_x-f(v_2(\cdot,t))_x\|_{H^{s-2}}\\
&\leqslant\|f(v_1(\cdot,t))-f(v_2(\cdot,t))\|_{H^{s-1}}\\
&\leqslant C_2(K_2M+K_2)\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{H^s},
\end{aligned}\tag{4.1.31}$$

$$\left\|G*\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}\right)_x\right](\cdot,t)\right\|_{H^s}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left\| \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}(\cdot,t)\right)_x - \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}(\cdot,t)\right)_x \right\|_{H^{s-2}} \\
&\leqslant \left\| \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{1x}(\cdot,t)\right) - \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{2x}(\cdot,t)\right) \right\|_{H^{s-1}} \\
&\leqslant C_2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\|v_{1x}(\cdot,t) - v_{2x}(\cdot,t)\|_{H^{s-1}} \\
&\leqslant C_2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\|v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t)\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{4.1.32}
$$

将式 (4.1.28)–(4.1.32) 代入式 (4.1.27), 我们断言

$$
\begin{aligned}
\|Sv_1 - Sv_2\|_{X(T)} \leqslant \Bigg[&\frac{2\beta}{\alpha} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)C_2(K_2M + K_2) + \frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}C_2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\Bigg] T\|v_1 - v_2\|_{X(T)}.
\end{aligned}
$$

选择 T 充分小, 使得式 (4.1.25) 成立且

$$
\left[\frac{2\beta}{\alpha} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)C_2(K_2M + K_2) + \frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}C_2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2M + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}K_2\right)\right] T \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4.1.33}
$$

于是 $\|Sv_1 - Sv_2\|_{X(T)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{X(T)}$, 即 S 映 $Q(M,T)$ 到 $Q(M,T)$ 和 S 是严格压缩的. □

定理 4.1.1 设 $s \geqslant 2, u_0 \in H^s, g \in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), g(0) = 0; f \in C^{[s]}(\mathbb{R}), \varphi \in C^{[s]}(\mathbb{R})$, 则 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 存在唯一局部广义解 $u \in C^1([0,T_0); H^s)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 若

$$
\lim_{t\to T_0^-}\sup \|u(\cdot,t)\|_{H^s} < \infty, \tag{4.1.34}
$$

则 $T_0 = \infty$.

证明 根据引理 4.1.1 和压缩映射原理知, 对于适当选择的 $T > 0$, S 有唯一的不动点 $u \in Q(M,T)$, 此 u 显然是积分方程 (4.1.17) 的解. 对于每一 $T' > 0$, 积分方程 (4.1.17) 至多有一个解属于 $X(T')$. 事实上, 令 $u_1, u_2 \in X(T')$ 是积分方程 (4.1.17) 的两个解, 则

$$
\begin{aligned}
&u_1(x,t) - u_2(x,t) \\
&= -\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]d\tau + \int_0^t [g(u_1(x,\tau)) - g(u_2(x,\tau))]d\tau \\
&\quad + \int_0^t G * \left\{\frac{\beta}{\alpha}(u_1 - u_2) - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}(u_{1x} - u_{2x}) - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}[f(u_1)_x - f(u_2)_x]\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_{1x}\right)_x-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_{2x}\right)_x\right]\Bigg\}(x,\tau)d\tau. \tag{4.1.35}$$

应用引理 4.1.1 中的方法, 由 (4.1.35) 可得

$$\|u_1(\cdot,t)-u_2(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant C\int_0^t\|u_1(\cdot,\tau)-u_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau,$$

其中常数 C 依赖于 $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_1(\cdot,t)\|_\infty, \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_2(\cdot,t)\|_\infty, \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{1x}(\cdot,t)\|_\infty$ 和 $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{2x}(\cdot,t)\|_\infty$. Gronwall 不等式推出 $\|u_1-u_2\|_{H^s}=0$, 即积分方程 (4.1.17) 最多有一解属于 $X(T')$.

现在, 令 $[0,T_0)$ 是 $u\in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 余下只需指出, 若式 (4.1.34) 成立, 则 $T_0=\infty$.

设式 (4.1.34) 成立, 且 $T_0<\infty$. 对于任意的 $T'\in[0,T_0)$, 考虑积分方程

$$\begin{aligned}w(x,t)=&u(x,T')-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t w(x,\tau)d\tau+\int_0^t g(w(x,\tau))d\tau\\&+\int_0^t G*\left[\frac{\beta}{\alpha}w-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}w_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(w)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}w_x\right)_x\right](x,\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{4.1.36}$$

根据式 (4.1.34), $\|u(\cdot,T')\|_{H^s}$ 关于 $T'\in[0,T_0)$ 是一致有界的, 这就允许我们选择 $T^*\in(0,T_0)$, 使得对于每一个 $T'\in[0,T_0)$, 积分方程 (4.1.36) 有唯一解 $w\in X(T^*)$. 如此 T^* 的存在性是从引理 4.1.1 和压缩映射原理得来的. 特别地, 式 (4.1.25) 和 (4.1.33) 显示 T^* 的选择不依赖于 $T'\in[0,T_0)$. 置 $T'=T_0-\dfrac{T^*}{2}$, 令 $w(x,t)$ 表示积分方程 (4.1.36) 对应的解, 且定义 $\tilde{u}(x,t)$ 如下:

$$\tilde{u}(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & t\in[0,T'],\\ w(x,t-T'), & t\in\left[T',T_0+\dfrac{T^*}{2}\right].\end{cases} \tag{4.1.37}$$

根据构造, $\tilde{u}(x,t)$ 是积分方程 (4.1.17) 的解在 $\left[0,T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]$ 的延拓, 且根据局部解的唯一性, $\tilde{u}(x,t)$ 是 $u(x,t)$ 的延拓. 这样就破坏了 $[0,T_0)$ 的最大性. 因此, 若 (4.1.34) 成立, 则 $T_0=\infty$. □

2. Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 整体解的存在性和唯一性

定理 4.1.2 设下列条件成立:

(1) $s\geqslant 2, u_0\in H^s$;

(2) $f\in C^{[s]}(\mathbb{R})$;

(3) $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R}), g(0)=0$, 且存在常数 C_0, 使得对任意的 $s\in\mathbb{R}, \dfrac{d}{ds}g(s)=g'(s)\leqslant C_0$;

(4) $\varphi \in C^{[s]}(\mathbb{R})$ 和对任意的 $s \in \mathbb{R}, \varphi(s)s \geqslant 0$ 或存在常数 C_3, 使得 $\varphi'(s) \geqslant C_3$, 则 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 存在唯一整体广义解 $u \in C^1([0,\infty); H^s)$.

证明 依据定理 4.1.1, 我们只需证明条件 (4.1.34) 成立. 方程 (4.1.13) 两端乘以 $u(x,t)$ 且在 $\mathbb{R}$ 上对 x 分部积分, 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2]+\frac{\beta}{\alpha}\|u_x(\cdot,t)\|^2+\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}u(x,t)u_x(x,t)dx\\&+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}f(u(x,t))_xu(x,t)dx-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)_xu(x,t)dx\\=&\int_{\mathbb{R}}g(u(x,t))u(x,t)dx-\int_{\mathbb{R}}g(u(x,t))_{xx}u(x,t)dx.\end{aligned}\tag{4.1.38}$$

应用引理 1.7.6 并分部积分推出

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}u(x,t)u_x(x,t)dx=\frac{\gamma}{2\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dx}u^2(x,t)dx=0;\tag{4.1.39}$$

$$\int_{\mathbb{R}}f(u(x,t))_xu(x,t)dx=-\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dx}\left(\int_0^{u(x,t)}f(s)ds\right)dx=0.\tag{4.1.40}$$

若对任意的 $s\in\mathbb{R},\varphi(s)s\geqslant 0$, 进行分部积分, 得

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)_xu(x,t)dx=\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)dx\geqslant 0.\tag{4.1.41}$$

若 $\varphi'(s)\geqslant C_3$, 应用积分中值定理, 发现

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)_xu(x,t)dx\\=&-\int_{\mathbb{R}}\left[\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)-\varphi(0)\right]_x\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u(x,t)dx\\=&\int_{\mathbb{R}}\varphi'\left(\frac{\theta_1}{\sqrt{\alpha}}u_x(x,t)\right)\frac{1}{\alpha}u_x^2(x,t)dx\\\geqslant&\frac{C_3}{\alpha}\|u_x(\cdot,t)\|^2,\end{aligned}\tag{4.1.42}$$

其中 $0<\theta_1<1$. 还有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}g(u(x,t))u(x,t)dx&=\int_{\mathbb{R}}[g(u(x,t))-g(0)]u(x,t)dx\\&=\int_{\mathbb{R}}g'(\theta_2u(x,t))u^2(x,t)dx\leqslant C_0\|u(\cdot,t)\|^2,\end{aligned}\tag{4.1.43}$$

其中 $0<\theta_2<1$;

$$-\int_{\mathbb{R}}g(u(x,t))_{xx}u(x,t)dx=\int_{\mathbb{R}}g'(u(x,t))u_x^2(x,t)dx\leqslant C_0\|u_x(\cdot,t)\|^2.\tag{4.1.44}$$

将式 (4.1.39)–(4.1.41), 式 (4.1.43) 和式 (4.1.44) 代入式 (4.1.38) 或将式 (4.1.39), (4.1.40) 和式 (4.1.42)–(4.1.44) 代入式 (4.1.38), 我们总可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2]\leqslant |C_0|\|u(\cdot,t)\|^2+\left(|C_0|+\frac{|C_3|}{\alpha}\right)\|u_x(\cdot,t)\|^2.$$

Gronwall 不等式推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{H^1}\leqslant C_4(T). \tag{4.1.45}$$

由 Sobolev 嵌入定理知 $\|u(\cdot,t)\|_\infty\leqslant C_4(T)$.

从积分方程 (4.1.17) 可见

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant{}&\|u_0\|_{H^s}+\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau+\int_0^t\|g(u(\cdot,\tau))\|_{H^s}d\tau\\&+\int_0^t\left\|G*\left[\frac{\beta}{\alpha}u-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}u_x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f(u)_x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x\right](\cdot,\tau)\right\|_{H^s}d\tau.\end{aligned} \tag{4.1.46}$$

根据引理 4.1.1 中的同样的方法并利用式 (4.1.45), 由式 (4.1.46) 断言

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\|u_0\|_{H^s}+C_5(T)\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau.$$

Gronwall 不等式给出式 (4.1.34). 由定理 4.1.1 知 $T_0=\infty$. □

3. Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 解的渐近性质

定理 4.1.3 设 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (4.1.13), (4.1.14) 的整体广义解或是整体古典解. 若 $u_0\in H^1, f\in C^1(\mathbb{R}), g\in C^2(\mathbb{R}), g(0)=0,\ s\in\mathbb{R}, g'(s)\leqslant C_6<0; \varphi(s)s\geqslant 0$ 或 $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$, 且存在一常数 $C_7\geqslant-\beta$, 使得 $\varphi'(s)\geqslant C_7, \forall s\in\mathbb{R}$, 则 $u(x,t)$ 满足

$$\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2\leqslant(\|u_0\|^2+\|u_{0x}\|^2)e^{2C_6t},\quad t\geqslant 0. \tag{4.1.47}$$

证明 或者 $\forall s\in\mathbb{R},\varphi(s)s\geqslant 0$ 或者 $C_7\geqslant-\beta$, 由式 (4.1.38)–(4.1.44) 导出

$$\frac{d}{dt}(\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2)\leqslant 2C_6(\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2).$$

上式推得式 (4.1.47) 成立. □

4.1.3 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 整体解的存在性和唯一性

在这一子节我们将证明 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 存在唯一整体广义解和唯一整体古典解. 为此, 应用尺度变换 (4.1.2), Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 变为下列问题

$$u_t-\frac{\beta}{\alpha}u_{xx}-u_{xxt}=g(u)-g(u)_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{4.1.48}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.1.49}$$

1. Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 局部广义解的存在性和唯一性

现在, 应用二阶常微分方程的基本解化 Cauchy 问题 (4.1.48), (4.1.49) 为一个积分方程. 为此假定 $u \in C^1([0,T];W^{2,p} \cap L^\infty)$ 为 Cauchy 问题 (4.1.48), (4.1.49) 的广义解. 方程 (4.1.48) 可以改写为

$$\left[u_t + \frac{\beta}{\alpha}u - g(u)\right] - \left[u_t + \frac{\beta}{\alpha}u - g(u)\right]_{xx} = \frac{\beta}{\alpha}u. \tag{4.1.50}$$

假定 $g(0) = 0$. 因此根据引理 1.8.16, 如果 $g \in C^2(\mathbb{R})$, 有 $g(u) \in W^{2,p}$. 由式 (4.1.50) 得

$$u_t + \frac{\beta}{\alpha}u - g(u) = G * \frac{\beta}{\alpha}u, \tag{4.1.51}$$

其中 $G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ 是二阶常微分方程

$$y(x) - y(x)_{xx} = \delta(x)$$

的基本解.

由式 (4.1.51) 和式 (4.1.49) 知, Cauchy 问题 (4.1.48), (4.1.49) 与下列积分方程等价

$$u(x,t) = u_0(x) - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^t u(x,\tau)d\tau + \int_0^t g(u(x,\tau))d\tau + \frac{\beta}{\alpha}\int_0^t G * u(x,\tau)d\tau. \tag{4.1.52}$$

类似于定义 4.1.1, 给出如下定义.

定义 4.1.2 对于任意的 $T > 0$, 若 $u_0 \in W^{m,p} \cap L^\infty$ 和 $u \in C([0,T];W^{m,p} \cap L^\infty)(m \geqslant 2)$ 满足积分方程 (4.1.52), 其中 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $u(x,t)$ 称为积分方程 (4.1.52) 的连续解或是 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 的广义解. 若 $T < \infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 的局部广义解. 若 $T = \infty$, 则 $u(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 的整体广义解.

现在, 应用压缩映射原理证明积分方程 (4.1.52) 存在局部唯一连续解. 为此, 我们定义函数空间

$$X(T) = C([0,T];W^{m,p} \cap L^\infty),$$

且赋予范数

$$\|u\|_{X(T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{m,p} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_\infty.$$

显然 $X(T)$ 是一 Banach 空间.

定义映射 $S : X(T) \mapsto X(T)$ 如下:

$$Sv(x,t) = u_0(x) - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^t v(x,\tau)d\tau + \int_0^t g(v(x,\tau))d\tau$$

$$+\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t G*v(x,\tau)d\tau, \quad \forall v\in X(T). \tag{4.1.53}$$

显然, 若 $g\in C^m(\mathbb{R})(m\geqslant 2)$, $g(0)=0$, 由引理 1.8.16 知, S 是有意义的.

对于初值 $u_0\in W^{m,p}\cap L^\infty$, 令 $M=\|u_0\|_{m,p}+\|u_0\|_\infty$. 定义集合

$$K(M,T)=\{v|v\in X(T),\|v\|_{X(T)}\leqslant M+1\}. \tag{4.1.54}$$

明显地, 对于每一对 $M,T>0$, $K(M,T)$ 是 $X(T)$ 的一不空有界闭凸子集. 我们的目的是证明 S 在 $K(M,T)$ 中有唯一不动点.

引理 4.1.2 设 $u_0\in W^{m,p}\cap L^\infty$, $g\in C^{m+1}(\mathbb{R})(m\geqslant 0)$ 和 $g(0)=0$, 若 T 相对于 M 适当小, 映射 $S:K(M,T)\mapsto K(M,T)$ 是严格压缩的.

证明 令 $v\in K(M,T)$. 应用引理 1.8.16 和 Young 不等式, 由式 (4.1.53) 有

$$\begin{aligned}\|Sv(\cdot,t)\|_\infty\leqslant&\|u_0\|_\infty+\frac{\beta}{\alpha}T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_\infty+TC_8(M+1)\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_\infty\\&+\frac{\beta}{\alpha}T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_\infty\\=&\|u_0\|_\infty+\left(\frac{2\beta}{\alpha}+C_8(M+1)+1\right)T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_\infty,\end{aligned} \tag{4.1.55}$$

$$\begin{aligned}\|Sv(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant&\|u_0\|_{m,p}+\frac{\beta}{\alpha}T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_{m,p}+T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|g(v(\cdot,t))\|_{m,p}\\&+\frac{\beta}{\alpha}T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|G*v(\cdot,t)\|_\infty\\\leqslant&\|u_0\|_{m,p}+\left(\frac{2\beta}{\alpha}+C_8(M+1)+1\right)T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_{m,p}.\end{aligned} \tag{4.1.56}$$

所以由式 (4.1.55) 和式 (4.1.56) 导出

$$\begin{aligned}\|Sv\|_{X(T)}&\leqslant M+\left(\frac{2\beta}{\alpha}+C_8(M+1)+1\right)T\|v\|_{X(T)}\\&\leqslant M+\left(\frac{2\beta}{\alpha}+C_8(M+1)+1\right)(M+1)T.\end{aligned} \tag{4.1.57}$$

若 T 满足

$$T\leqslant\left[\frac{2\beta}{\alpha}+C_8(M+1)+1)(M+1)\right]^{-1}, \tag{4.1.58}$$

则 $\|Sv\|_{X(T)}\leqslant M+1$. 因此若式 (4.1.58) 成立, 映射 S 映 $K(M,T)$ 到 $K(M,T)$.

进一步, 证明映射 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 和 $v_1,v_2\in K(M,T)$ 给定, 则有

$$Sv_1(x,t)-Sv_2(x,t)=-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t[v_1(x,\tau)-v_2(x,\tau)]d\tau$$

$$+\int_0^t [g(v_1(x,\tau)) - g(v_2(x,\tau))]d\tau$$
$$+\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t G*(v_1-v_2)(x,\tau)d\tau. \tag{4.1.59}$$

利用中值定理得

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sv_1(\cdot,t)-Sv_2(\cdot,t)\|_\infty\\
\leqslant&\left(\frac{2\beta}{\alpha}+1\right)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_\infty\\
&+T\max_{|\eta|\leqslant M+1}|g'(\eta)|\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_\infty\\
=&\left(\frac{2\beta}{\alpha}+1+\max_{|\eta|\leqslant M+1}|g'(\eta)|\right)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_\infty.
\end{aligned}\tag{4.1.60}$$

应用引理 1.8.15, 由式 (4.1.59) 推出

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sv_1(\cdot,t)-Sv_2(\cdot,t)\|_{m,p}\\
\leqslant&\left(\frac{2\beta}{\alpha}+1\right)T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{m,p}+T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|g(v_1(\cdot,t))-g(v_2(\cdot,t))\|_{m,p}.
\end{aligned}\tag{4.1.61}$$

利用 Minkowski 积分不等式, 推论 1.8.1 和引理 1.8.16, 可知

$$\begin{aligned}
&\|g(v_1(\cdot,t))-g(v_2(\cdot,t))\|_{m,p}\\
=&\left\|\int_0^1(v_1-v_2)g'(v_2+\tau(v_1-v_2))d\tau\right\|_{m,p}\\
\leqslant&\int_0^1\|(v_1-v_2)g'(v_2+\tau(v_1-v_2))\|_{m,p}d\tau\\
\leqslant&C_9(M+1)\int_0^1[\|v_1-v_2\|_{m,p}\|g'(v_2+\tau(v_1-v_2))\|_\infty\\
&+\|v_1-v_2\|_\infty\|g'(v_2+\tau(v_1-v_2))\|_{m,p}]d\tau\\
\leqslant&C_{10}(M+1)\int_0^1[\|v_1-v_2\|_{m,p}\|g'(v_2+\tau(v_1-v_2))\|_\infty\\
&+\|v_1-v_2\|_\infty\|v_2+\tau(v_1-v_2)\|_{m,p}]d\tau\\
\leqslant&C_{11}(M+1)[\|v_1-v_2\|_{m,p}+\|v_1-v_2\|_\infty].
\end{aligned}\tag{4.1.62}$$

将式 (4.1.62) 代入式 (4.1.61), 有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Sv_1(\cdot,t)-Sv_2(\cdot,t)\|_{m,p}$$

$$
\leqslant \left(\frac{2\beta}{\alpha}+1+C_{11}(M+1)\right)T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{m,p}
$$
$$
+C_9(M+1)T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|_{\infty}. \tag{4.1.63}
$$

从而由式 (4.1.60) 和式 (4.1.63) 推出

$$
\|Sv_1-Sv_2\|_{X(T)}\leqslant\left(\frac{2\beta}{\alpha}+1+\max_{|\eta|\leqslant M+1}|g'(\eta)|+C_9(M+1)\right)T\|v_1-v_2\|_{X(T)}. \tag{4.1.64}
$$

若 T 满足式 (4.1.58) 和

$$
T\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{2\beta}{\alpha}+1+\max_{|\eta|\leqslant M+1}|g'(\eta)|+C_9(M+1)\right]^{-1},
$$

于是 $\|Sv_1-Sv_2\|_{X(T)}\leqslant\frac{1}{2}\|v_1-v_2\|_{X(T)}$. □

定理 4.1.4 设 $u_0\in W^{m,p}\cap L^\infty$, $g\in C^{m+1}(\mathbb{R})(m\geqslant 2)$ 和 $g(0)=0$, 则 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 有唯一局部广义解 $u\in C([0,T_0);W^{m,p}\cap L^\infty)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$
\sup_{t\in[0,T_0)}(\|u(\cdot,t)\|_{m,p}+\|u(\cdot,t)\|_\infty)<\infty, \tag{4.1.65}
$$

则 $T_0=\infty$.

证明 应用压缩映射原理和证明定理 4.1.1 的同样方法, 由引理 4.1.2 可证明此定理. □

注 4.1.1 若 $u\in C([0,T_0);W^{m,p}\cap L^\infty)$ 是 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 的广义解, 由式 (4.1.52) 和引理 4.1.2 知 $u\in C^1([0,T_0);W^{m,p}\cap L^\infty)$ 和方程 (4.1.51) 成立.

2. Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 整体广义解的存在性和唯一性

定理 4.1.5 设下列条件成立:

(1) $u_0\in W^{m,p}\cap L^\infty(m\geqslant 2)$;

(2) $g\in C^{m+1}(\mathbb{R}), g(0)=0$ 且对任意的 $s\in\mathbb{R}, g(s)s\leqslant 0$ 或者存在常数 C_{12} 使得 $g'(s)\leqslant C_{12},\forall s\in\mathbb{R}$,

则 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 存在唯一整体广义解 $u\in C^2([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty)$.

证明 按照定理 4.1.4, 我们只需证明式 (4.1.65) 成立. 式 (4.1.51) 两端乘以 $u(x,t)$, 得

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2+\frac{\beta}{\alpha}u^2-g(u)u=\left(G*\frac{\beta}{\alpha}u\right)u. \tag{4.1.66}
$$

显然,

$$\left(G*\frac{\beta}{\alpha}u\right)u\leqslant\frac{\beta}{\alpha}\|u\|_{\infty}^{2}. \tag{4.1.67}$$

若 $g'(s)\leqslant C_{12},\forall s\in\mathbb{R}$, 有

$$g(u)u=(g(u)-g(0))u=g'(\theta u)u^{2}\leqslant C_{12}u^{2}, \tag{4.1.68}$$

其中 $0<\theta<1$.

注意到式 (4.1.67) 和式 (4.1.68), 当 $g(s)s\leqslant 0$ 或 $g'(s)\leqslant C_{12}$ 时, 由式 (4.1.66) 知

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^{2}(x,t)+\frac{\beta}{\alpha}u^{2}(x,t)\leqslant|C_{12}|u^{2}(x,t)+\frac{\beta}{\alpha}\|u(\cdot,t)\|_{\infty}^{2}.$$

对 t 积分以上不等式, 导出

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty}^{2}\leqslant 2\left(\frac{\beta}{\alpha}+|C_{12}|\right)\int_{0}^{t}\|u(\cdot,\tau)\|_{\infty}^{2}d\tau+\|u_{0}\|_{\infty}^{2}.$$

由上述不等式得

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty}\leqslant C_{13}(T),\quad\forall\, t\in[0,T]. \tag{4.1.69}$$

应用式 (4.1.69), 式 (4.1.52) 和引理 1.8.16 易知

$$\|u(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant C_{14}(T),\quad\forall\, t\in[0,T]. \tag{4.1.70}$$

所以式 (4.1.65) 成立, 且

$$u\in C([0,\infty);W^{m,p}\cap L^{\infty}). \tag{4.1.71}$$

由式 (4.1.51) 和式 (4.1.70) 推知 $u_{t}\in C([0,\infty);W^{m,p}\cap L^{\infty})$.

式 (4.1.51) 对 t 求导, 得

$$u_{tt}=-\frac{\beta}{\alpha}u_{t}+g'(u)u_{t}+\frac{\beta}{\alpha}G*u_{t} \tag{4.1.72}$$

和 $u_{tt}\in C([0,\infty);W^{m,p}\cap L^{\infty})$. 所以, $u\in C^{2}([0,\infty);W^{m,p}\cap L^{\infty})$. □

引理 4.1.3 设定理 4.1.5 的条件成立, $g\in C^{k+m+1}(\mathbb{R})$, 其中 $k\geqslant 0$ 是任意整数, 则 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 的广义解 $u(x,t)$ 属于 $C^{k+2+l}([0,T];W^{m-l,p}\cap L^{\infty})(\forall T>0)$, $0\leqslant l\leqslant m$.

证明 首先证明 $u\in C^{k+2}([0,T];W^{m,p}\cap L^{\infty})$. 我们应用数学归纳法证明. 当 $k=0$ 时, 由定理 4.1.5 知 $u\in C^{2}([0,T];W^{m,p}\cap L^{\infty})$. 假定

$$u\in C^{k+2}([0,T];W^{m,p}\cap L^{\infty}),\quad 0\leqslant k<s. \tag{4.1.73}$$

当 $k=s$ 时, 式 (4.1.72) 关于 t 求导 s 次, 得到

$$\begin{aligned}u_{t^{s+2}}=&-\frac{\beta}{\alpha}u_{t^{s+1}}+\partial_{t^{s+1}}(g(u))+\frac{\beta}{\alpha}G*u_{t^{s+1}}\\=&-\frac{\beta}{\alpha}u_{t^{s+1}}+\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\frac{(s+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_{s+1}!}\left(\frac{\partial_t u}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial_{t^{s+1}}u}{(s+1)!}\right)^{i_{s+1}}g^{(i_1+\cdots+i_{s+1})}(u)\\&+\frac{\beta}{\alpha}G*u_{t^{s+1}},\end{aligned}\tag{4.1.74}$$

其中 $i_1+i_2+\cdots+i_{s+1}=\rho, i_1+2i_2+\cdots+(s+1)i_{s+1}=s+1, i_j(j=1,\cdots,s+1)$ 是非负整数. 利用推论 1.8.1 和式 (4.1.73), 有 $u\in C^{s+2}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty)$.

从上面的证明可知 $u\in C^{k+2}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty),\forall\, k\geqslant 0, m\geqslant 2$. 下面, 证明

$$u\in C^{k+2+l}([0,T];W^{m-l,p}\cap L^\infty),\quad 0<l\leqslant m.\tag{4.1.75}$$

式 (4.1.72) 对 t 求导 $k+1$ 次, 有

$$\begin{aligned}u_{t^{k+3}}=&-\frac{\beta}{\alpha}u_{t^{k+2}}+\partial_{t^{k+2}}(g(u))+\frac{\beta}{\alpha}G*u_{t^{k+2}}\\=&-\frac{\beta}{\alpha}u_{t^{k+2}}+\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\frac{(k+2)!}{i_1!i_2!\cdots i_{k+2}!}\left(\frac{\partial_t u}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial_{t^{k+2}}u}{(k+2)!}\right)^{i_{k+2}}g^{(i_1+\cdots+i_{k+2})}(u)\\&+\frac{\beta}{\alpha}G*u_{t^{k+2}},\end{aligned}\tag{4.1.76}$$

其中 $i_1+i_2+\cdots+i_{k+2}=\rho, i_1+2i_2+\cdots+(k+2)i_{k+2}=k+2$. 应用推论 1.8.1, 式 (4.1.76) 和 $u\in C^{k+2}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty)$ 得 $u\in C^{k+3}([0,T];W^{m-1,p}\cap L^\infty)$. 式 (4.1.76) 对 t 求导, 得 $u\in C^{k+4}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty)$. 重复这个过程 $m-2$ 次, 即得式 (4.1.75). □

定理 4.1.6　设引理 4.1.3 的条件成立和 $k=0, l=0, m>2+\dfrac{1}{p}$, 则 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 存在唯一整体古典解 $u\in C^2([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty)$, 即 $u\in C^2([0,\infty);C^2(\mathbb{R})\cap L^\infty)$.

3. Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 解的渐近性质

类似于定理 4.1.3, 可证如下定理.

定理 4.1.7　设 $u(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (4.1.3), (4.1.4) 的整体广义解或整体古典解. 若 $u_0\in H^1, g\in C^2(\mathbb{R}), g(0)=0$ 和对任意的 $s\in\mathbb{R}$, $g'(s)\leqslant C_0<0$, 则 $u(x,t)$ 满足

$$\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_x(\cdot,t)\|^2\leqslant(\|u_0\|^2+\|u_{0x}\|^2)e^{2C_0t},\quad t\geqslant 0.$$

4.1.4　与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [281]. 与本节有关的文献见 [25], [30], [167], [171], [175], [242], [270]–[280].

4.2 广义 BBM-Burgers 方程的 Cauchy 问题

4.2.1 引言

本节研究下列广义 BBM-Burgers 方程的 Cauchy 问题

$$v_t-\alpha\Delta v_t-\beta\Delta v+\gamma\Delta^2 v+\sum_{j=1}^{N} f_j(v)_{x_j}=\Delta g(v)+G(v),\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0,\qquad(4.2.1)$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^N,\qquad(4.2.2)$$

其中 $v(x,t)$ 表示未知函数, $G(s),g(s),f_j(s)(j=1,2,\cdots,N)$ 是给定的非线性函数, $\alpha>0,\beta>0,\gamma>0$ 均为常数, $v_0(x)$ 是给定的初值函数, 我们将证明 N 维 Cauchy 问题 (4.2.1), (4.2.2) 存在唯一的局部广义解和唯一局部古典解, 且证明当 $N=3,2,1$ 时, Cauchy 问题存在唯一的整体广义解和唯一整体古典解, 同时讨论解的衰减性质.

为了讨论简单起见, 作尺度变换

$$v(x,t)=u(y,\tau)=u\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x,\frac{\gamma}{\alpha^2}\tau\right),$$

于是方程 (4.2.1) 可以写成

$$u_\tau-\Delta u_\tau-\Delta u+\Delta^2 u+\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\gamma}\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}=\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}-1\right)\Delta u+\frac{\alpha}{\gamma}\Delta g(u)+\frac{\alpha^2}{\gamma}G(u).$$

不失一般性, 我们研究下列 Cauchy 问题

$$u_t-\Delta u_t-\Delta u+\Delta^2 u+a\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}=\Delta h(u)+G(u),\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0,\qquad(4.2.3)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^N,\qquad(4.2.4)$$

其中 $a>0$ 是常数, 为了证明 Cauchy 问题 (4.2.3), (4.2.4) 存在唯一广义解, 我们可以形式地将方程 (4.2.3) 写为

$$\begin{aligned}u_t-\Delta u=&L[h(u)]-a(I-\Delta)^{-1}\sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j}\\&+(I-\Delta)^{-1}G(u),\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0,\end{aligned}\qquad(4.2.5)$$

其中 $L=(I-\Delta)^{-1}\Delta$.

定义 4.2.1　对于任意的 $T>0, s\geqslant 2$, 如果函数

$$u\in C([0,T];H^s)\cap C^1([0,T];H^{s-2})$$

是 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 的广义解, 则称 $u(x,t)$ 为 Cauchy 问题 (4.2.3), (4.2.4) 的局部弱解, 如果 $T<\infty$, 则称 $u(x,t)$ 为 Cauchy 问题 (4.2.3), (4.2.4) 的局部弱解, 如果 $T=\infty$, 则称 $u(x,t)$ 为 Cauchy 问题 (4.2.3), (4.2.4) 的整体弱解.

4.2.2　Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 局部弱解的存在性和唯一性

现在在 N 维空间中证明 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 存在唯一局部弱解. 为此, 先证明线性抛物型方程的 Cauchy 问题存在唯一解.

引理 4.2.1　设 $s\in\mathbb{R}$. 对于任意的 $T>0$, 设 $\varphi\in H^s, f\in L^1((0,T);H^s)$, 则下列线性抛物型方程的 Cauchy 问题

$$u_t-\Delta u=f(x,t),\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0, \tag{4.2.6}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^N \tag{4.2.7}$$

有唯一解

$$u(x,t)\in C([0,T];H^s) \tag{4.2.8}$$

且满足

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\Phi(x,t)*\varphi(x)+\int_0^t\Phi(x,t-\tau)*f(x,\tau)d\tau\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(x-y,t)\varphi(y)dy+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

和以下估计

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\|\varphi\|_{H^s}+\int_0^t\|f(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau,\quad t\in[0,T], \tag{4.2.10}$$

其中 $\Phi(x,t)=\dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ 称为 $x\in\mathbb{R}^N,\ t>0$ 的对于热传导方程的基本解.

证明　首先假定 $\varphi\in\mathscr{S}$ 和 $f\in C^\infty([0,T];\mathscr{S})$. 方程 (4.2.6) 的 Fourier 变换是

$$\hat{u}_t(\xi,t)+|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi,t) \tag{4.2.11}$$

和式 (4.2.7) 的 Fourier 变换是

$$\hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi), \tag{4.2.12}$$

其中 $\hat{u}(\xi,t)=\mathscr{F}u(\xi,t)=\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}u(x,t)e^{-ix\cdot\xi}dx$. 解常微分方程的 Cauchy 问题 (4.2.11), (4.2.12), 得

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t)&=\left(\hat{\varphi}(\xi)+\int_0^t\hat{f}(\xi,\tau)e^{|\xi|^2\tau}d\tau\right)e^{-|\xi|^2t}\\&=\hat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|^2t}+\int_0^t\hat{f}(\xi,\tau)e^{|\xi|^2(\tau-t)}d\tau.\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

因为 $e^{-|\xi|^2t}$ 是关于 $|\xi|$ 的有界光滑函数, 它对 ξ 的导数也是有界光滑函数, 而且它对 t 的导数也是 $|\xi|$ 的有界光滑函数. 所以由式 (4.2.13) 得到的 $\hat{u}\in C^\infty([0,T];\mathscr{S})$ 是 Cauchy 问题 (4.2.11), (4.2.12) 的唯一解. 我们知道 $\hat{u}(\xi,t)$ 的 Fourier 逆变换是 $u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}\hat{u}(\xi,t)=\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\hat{u}(\xi,t)e^{ix\cdot\xi}d\xi$. 所以式 (4.2.11) 的 Fourier 逆变换为

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|^2t}d\xi\\&+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_0^td\tau\int_{\mathbb{R}^N}e^{ix\cdot\xi}e^{-|\xi|^2(t-\tau)}\hat{f}(\xi,\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{4.2.14}$$

下面估计式 (4.2.14) 右端的两项. 应用 Minkowski 积分不等式有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|^2t}d\xi\right\|_{H^s}&=\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|^2t}\right\|\\&\leqslant\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)\right\|=\|\varphi\|_{H^s};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_0^td\tau\int_{\mathbb{R}^N}e^{ix\cdot\xi}e^{-|\xi|^2(t-\tau)}\hat{f}(\xi,\tau)d\tau\right\|_{H^s}\\=&\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\int_0^te^{|\xi|^2(\tau-t)}\hat{f}(\xi,\tau)d\tau\right\|\\\leqslant&\int_0^t\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{f}(\xi,\tau)|\right\|d\tau\\=&\int_0^t\|f(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau.\end{aligned}$$

由式 (4.2.14) 和上面两式知, 估计 (4.2.10) 对 $u\in C^\infty([0,T];\mathscr{S})$ 成立.

下面证明对于任意的 $\varphi\in H^s$ 和 $f\in L^1([0,T];H^s)$, Cauchy 问题 (4.2.6), (4.2.7) 存在唯一解 $u(x,t)$, 且满足式 (4.2.8) 和能满足估计 (4.2.10). 因为 $\mathscr{S}$ 在 H^s 中稠密且 $C^\infty([0,T];\mathscr{S})$ 在 $L^1([0,T];H^s)$ 中稠密, 对于任意的 $\varphi\in H^s$ 和 $f\in L^1([0,T];H^s)$, 选择序列 $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^\infty\subset\mathscr{S}$ 和 $\{f_j(x,t)\}_{j=1}^\infty\subset C^\infty([0,T];\mathscr{S})$, 使得当 $j\longrightarrow\infty$ 时,

$$\|\varphi_j-\varphi\|_{H^s}\longrightarrow0,\quad\|f_j-f\|_{L^1([0,T];H^s)}\longrightarrow0.$$

令 $u_j(x,t)$ 是分别相对应于初值函数 $\varphi_j(x)$ 和右端项 $f_j(x,t)(j=1,2,\cdots)$ 的 Cauchy 问题 (4.2.6), (4.2.7) 的解. 置 $X(T)=C([0,T];H^s)$, 则 $X(T)$ 是一个赋予范数 $\|u\|_{X(T)}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}$ 的 Banach 空间. 由于式 (4.2.10) 对于光滑函数成立, 有

$$\|u_j(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant\|\varphi_j\|_{H^s}+\int_0^t\|f_j(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau,\quad j=1,2,\cdots.$$

上式用于 $u_j(x,t)-u_k(x,t)$, 可见

$$\|u_j-u_k\|_{X(T)}\leqslant\|\varphi_j-\varphi_k\|_{H^s}+\|f_j-f_k\|_{X(T)}T,$$

于是 $\{u_j(x,t)\}$ 是 $X(T)$ 中的 Cauchy 序列, 因此这个序列在 $X(T)$ 中收敛于极限函数 $u(x,t)$. 所以由式 (4.2.14) 表示的是 Cauchy 问题 (4.2.6), (4.2.7) 的解, 且满足估计式 (4.2.10).

现在证明 Cauchy 问题 (4.2.6), (4.2.7) 解的唯一性. 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是 Cauchy 问题 (4.2.6), (4.2.7) 的两个解, 令 $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$, 则 $u(x,t)$ 满足

$$u_t-\Delta u=0,\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

因为 $u_1,u_2\in C([0,T];H^s)$, 应用式 (4.2.10), 得 $\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant 0$. 于是 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$.

利用式 (4.2.14), 我们证明 $u(x,t)$ 的表达式是式 (4.2.9). 由于

$$(e^{-A|x|^2})\hat{}=\frac{1}{(\sqrt{2A})^N}e^{-\frac{|\xi|^2}{4A}},$$

其中 $A>0$ 是一参数, 因此有

$$e^{-\frac{|\xi|^2}{4A}}=(\sqrt{2A})^N(e^{-A|x|^2})\hat{}.$$

置 $\dfrac{1}{4A}=t$, 从而

$$e^{-|\xi|^2t}=\frac{1}{(\sqrt{2t})^N}(e^{-\frac{|x|^2}{4t}})\hat{}. \tag{4.2.15}$$

显然

$$e^{-|\xi|^2(t-\tau)}=\frac{1}{(\sqrt{2(t-\tau)})^N}(e^{-\frac{|x|^2}{4(t-\tau)}})\hat{}. \tag{4.2.16}$$

把式 (4.2.15) 和式 (4.2.16) 代入式 (4.2.13) 后取 Fourier 逆变换, 得

$$u(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y)dy+\int_0^t\frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{N}{2}}}d\tau\int_{\mathbb{R}^N}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}}f(y,\tau)dy$$

$$= \Phi(x,t) * \varphi(x) + \int_0^t \Phi(x,t-\tau) * f(x,\tau)d\tau,$$

其中 $\Phi(x,t) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. □

引理 4.2.2

$$\hat{\Phi}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-t|\xi|^2}. \tag{4.2.17}$$

证明

$$\hat{\Phi}(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} (e^{-\frac{|x|^2}{4t}})\hat{} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{2t}}\right)^N} e^{-t|\xi|^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-t|\xi|^2}.$$ □

引理 4.2.3 对于所有的 $s \geqslant 0$, 算子 L 在 H^s 中是有界的, 且

$$\|Lu\|_{H^s} \leqslant \|u\|_{H^s}, \quad \forall u \in H^s.$$

证明 $\forall\, u \in H^s$ 和 $s \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\|Lu\|_{H^s} &= \|(I-\Delta)^{-1}\Delta u\|_{H^s} \\
&= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}((I-\Delta)^{-1}\Delta u)\hat{}\,\| \\
&= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \frac{-|\xi|^2}{1+|\xi|^2} \hat{u}\| \\
&\leqslant \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\| = \|u\|_{H^s}.
\end{aligned}$$ □

对于 $s > \dfrac{N}{2}, \varphi \in H^s$, 定义函数空间

$$X(T) = \{w | w \in C([0,T]; H^s)\},$$

并赋予范数

$$\|w\|_{X(T)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|w(\cdot,t)\|_{H^s}, \quad \forall w \in X(T).$$

易知 $X(T)$ 是一 Banach 空间. 根据 Sobolev 嵌入定理, 如果 $w \in X(T)$, 则有

$$w \in C([0,T]; L^\infty), \quad \|w\|_{L^\infty} \leqslant C_1 \|w\|_{H^s},$$

其中 C_1 是一常数. 令 $M = \|\varphi\|_{H^s}$ 和 $T > 0$, 定义集合

$$K(M,T) = \{w | w \in X(T), \|w\|_{X(T)} \leqslant M+1\}.$$

显然, 对于每一对 $M, T > 0, K(M,T)$ 是 $X(T)$ 的一不空有界闭凸子集.

对于 $w \in K(M,T)$, 考虑下列线性抛物型方程 Cauchy 问题

$$u_t - \Delta u = L[h(w)] - a(I-\Delta)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N} f_j(w)_{x_j}\right) + (I-\Delta)^{-1}G(w), \quad (4.2.18)$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \quad (4.2.19)$$

定义由 w 到 Cauchy 问题 (4.2.18), (4.2.19) 唯一解的映射 S. 我们的目的是指出对于适当选择的 T 映射 S 在 $K(M,T)$ 中有唯一不动点.

引理 4.2.4 设 $s > \dfrac{N}{2}$, $\varphi \in H^s$, $h, f_j (j=1,2,\cdots,n)$, $G \in C^k(\mathbb{R})$, $k=[s]+1$, 且 $h(0)=G(0)=f_j(0)=0 (j=1,2,\cdots,n)$, 则如果 T 相对于 M 充分小, 那么 S 映 $K(M,T)$ 到自己是严格压缩的.

证明 首先证明如果 T 相对于 M 充分小, 则 S 映 $K(M,T)$ 到自身. 令 $w \in K(M,T)$ 给定, 定义 $H(x,t)$ 如下

$$H(x,t) = L[h(w)] - a(I-\Delta)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N} f_j(w)_{x_j}\right) + (I-\Delta)^{-1}G(w), \quad (4.2.20)$$

则 $H \in L^1([0,T];H^s)$. 事实上, 由引理 4.2.3 和引理 1.8.13 推出

$$\begin{aligned}\|H(\cdot,t)\|_{H^s} &\leqslant \|L[h(w)]\|_{H^s} + a\sum_{j=1}^{N}\|(I-\Delta)^{-1}f_j(w)_{x_j}\|_{H^s} \\ &\quad + \|(I-\Delta)^{-1}G(w)\|_{H^s} \\ &\leqslant \|h(w)\|_{H^s} + a\sum_{j=1}^{N}\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\frac{-i\xi_j}{1+|\xi|^2}\hat{f}_j(w)\right\| \\ &\quad + \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{1+|\xi|^2}\hat{G}(w)\right\| \\ &\leqslant K_3(M)\|w\|_{H^s}, \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

其中 $K_3(M)$ 是依赖于 M 的常数. 由式 (4.2.21) 看出

$$H(x,t) \in L^1([0,T];H^s).$$

由引理 4.2.1 知, Cauchy 问题 (4.2.18), (4.2.19) 的解 $u = Sw$ 属于 $C([0,T];H^s)$, 且

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant \|\varphi\|_{H^s} + \int_0^T \|H(\cdot,t)\|_{H^s}dt \leqslant M + K_3(M)(M+1)T.$$

如果 T 满足

$$T \leqslant \frac{1}{K_3(M)(M+1)}, \quad (4.2.22)$$

则

$$\|Sw\|_{X(T)} \leqslant M+1.$$

所以 $S(K(M,T)) \subset K(M,T)$.

现在, 证明 $S: K(M,T) \mapsto K(M,T)$ 是严格压缩的. 令 $w_1, w_2 \in K(M,T)$ 给定, 置 $u_1 = Sw_1$, $u_2 = Sw_2$, $u = u_1 - u_2$ 和 $w = w_1 - w_2$, 则 u 满足下列 Cauchy 问题

$$u_t - \Delta u = F(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{4.2.23}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.2.24}$$

其中

$$\begin{aligned} F(x,t) =& L[h(w_1) - h(w_2)] - a(I-\Delta)^{-1}\left(\sum_{j=1}^N (f_j(w_1)_{x_j} - f_j(w_2)_{x_j})\right) \\ &+ (I-\Delta)^{-1}(G(w_1) - G(w_2)). \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

显然, $F(x,t)$ 由引理 4.2.1 应用到 Cauchy 问题 (4.2.23), (4.2.24) 所需的光滑性, 事实上,

$$\begin{aligned} \|F(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant& \|L[h(w_1) - h(w_2)]\|_{H^s} + a\sum_{j=1}^N \|(I-\Delta)^{-1}(f_j(w_1)_{x_j} - f_j(w_2)_{x_j})\|_{H^s} \\ &+ \|(I-\Delta)^{-1}(G(w_1) - G(w_2))\|_{H^s} \\ \leqslant& \|h(w_1) - h(w_2)\|_{H^s} \\ &+ a\sum_{j=1}^N \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}[(I-\Delta)^{-1}(f_j(w_1)_{x_j} - f_j(w_2)_{x_j})]\hat{}\,\| \\ &+ \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}[(I-\Delta)^{-1}(G(w_1) - G(w_2))]\hat{}\,\| \\ \leqslant& \|h(w_1) - h(w_2)\|_{H^s} + a\sum_{j=1}^N \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\frac{-i\xi}{1+|\xi|^2}(f_j(w_1) - f_j(w_2))\hat{}\,\right\| \\ &+ \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{1+|\xi|^2}(G(w_1) - G(w_2))\hat{}\,\right\| \\ \leqslant& \|h(w_1) - h(w_2)\|_{H^s} + a\sum_{j=1}^N \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}}(f_j(w_1) - f_j(w_2))\hat{}\,\right\| \\ &+ \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-2}{2}}(G(w_1) - G(w_2))\hat{}\,\| \\ =& \|h(w_1) - h(w_2)\|_{H^s} + a\sum_{j=1}^N \|f_j(w_1) - f_j(w_2)\|_{H^{s-1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\|G(w_1)-G(w_2)\|_{H^{s-2}}\\
&\leqslant K_4(M)(\|w_1-w_2\|_{H^s}+\|w_1-w_2\|_{H^{s-1}}+\|w_1-w_2\|_{H^{s-2}})\\
&\leqslant K_5(M)\|w_1-w_2\|_{H^s},\quad \forall\, w_1,w_2\in K(M,T).
\end{aligned}\tag{4.2.26}
$$

因此 $F(x,t)\in L^1([0,T];H^s)$. 利用引理 4.2.1, 由式 (4.2.10), (4.2.26) 推出, 如果 T 满足式 (4.2.22) 和

$$
T\leqslant\frac{1}{2K_5(M)},\tag{4.2.27}
$$

从而 S 是严格压缩的. □

定理 4.2.1 设 $s>2+\dfrac{N}{2},\varphi\in H^s,h,f_j(j=1,2,\cdots,N),G\in C^k(\mathbb{R}),k=[s]+1,h(0)=G(0)=f_j(0)=0(j=1,2,\cdots,N)$, 那么 Cauchy 问题 (4.2.23), (4.2.24) 存在唯一局部广义解

$$
u(x,t)\in C([0,T_0);H^s)\cap C^1([0,T_0);H^{s-2}),
$$

其中 $[0,T_0)$ 是 $u(x,t)$ 存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$
\limsup_{t\to T_0^-}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}<\infty,\tag{4.2.28}
$$

则 $T_0=\infty$.

证明 由引理 4.2.4 和压缩映射原理知, 对于适当选择的 $T>0$, S 有唯一不动点 $u\in K(M,T)$, 且它是 Cauchy 问题 (4.2.23), (4.2.24) 的广义解. 易证对于每一个 $T'>0$, Cauchy 问题 (4.2.23), (4.2.24) 最多有一解属于 $X(T')$. 事实上, 令 $u_1(x,t),u_2(x,t)\in X(T')$ 是 Cauchy 问题 (4.2.23), (4.2.24) 的两个解, 则 $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ 满足

$$
\begin{aligned}
u_t-\Delta u=&L[h(u_1)-h(u_2)]-a(I-\Delta)^{-1}\left(\sum_{j=1}^N(f_j(u_1)_{x_j}-f_j(u_2)_{x_j})\right)\\
&+(I-\Delta)^{-1}(G(u_1)-G(u_2)),
\end{aligned}
$$

$$
u(x,0)=0.
$$

类似于引理 4.2.4 可得

$$
\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant K_6(M)\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau.
$$

Gronwall 不等式给出

$$
\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant 0,
$$

即

$$u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

由方程 (4.2.5) 和引理 4.2.3, 引理 1.8.13 和引理 1.8.14 断言

$$\begin{aligned}\|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} \leqslant & \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-2}{2}}\widehat{\Delta u}\right\| + \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-2}{2}}\widehat{[Lh(u(\cdot,t))]}\right\| \\ & + a\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-2}{2}}\widehat{\left[(I-\Delta)^{-1}\left(\sum_{j=1}^N f_j(u(\cdot,t))_{x_j}\right)\right]}\right\| \\ & + \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-2}{2}}\widehat{[(I-\Delta)^{-1}G(u(\cdot,t))]}\right\| \\ \leqslant & C(M)\|u(\cdot,t)\|_{H^s},\end{aligned}$$

即

$$u(x,t) \in C^1([0,T_0);H^{s-2}).$$

现在令 $[0,T_0)$ 是 $u \in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 余下仅需指出, 如果式 (4.2.28) 成立, 则 $T_0=\infty$. 类似于定理 2.1.1 的方法可以证明此事实成立. □

注 4.2.1 在定理 4.2.1 的条件下, 如果 $s > 4+\frac{N}{2}$, 则 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 存在唯一局部古典解 $u \in C([0,T_0);\ C^4(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0,T_0);C^2(\mathbb{R}^N))$.

4.2.3 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 整体解的存在性和唯一性

定理 4.2.2 设 $s > 2+\frac{N}{2}$, $\varphi \in H^s$, h, $f_j(j=1,2,\cdots,N)$, $G \in C^k(\mathbb{R})$, $k = [s]+1$, $h(0)=G(0)=f_j(0)=0\ (j=1,2,\cdots,N)$ 和 $[0,T_0)$ 是 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 解存在的最大时间区间. 如果

$$\limsup_{t\to T_0^-}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} < \infty, \tag{4.2.29}$$

则 $T_0=\infty$.

证明 如果 $\sup_{t\in[0,T_0)}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} < \infty$, 类似于引理 4.2.4 可得

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s} \leqslant \|\varphi\|_{H^s} + K_7(M)\int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}d\tau.$$

Gronwall 不等式给出

$$\sup_{t\in[0,T_0)}\|u(\cdot,t)\|_{H^s} < \infty.$$

根据定理 4.2.1 得 $T_0=\infty$. □

4.2.4 $N=3$ 的情况

定理 4.2.3 设 $s \geqslant 6$, $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^3)$, h, G, $f_j \in C^k(\mathbb{R}^3)$, $j=1,2,3$, $k=[s]+1$, $h(0)=G(0)=f_j(0)=0$ $(j=1,2,3)$, $h'(\xi) \geqslant C$, $|h'(\xi)| \leqslant C_1|\xi|^2$, $|h''(\xi)| \leqslant C_2|\xi|$, $|f'(\xi)| \leqslant C_3|\xi|^2 (j=1,2,3)$, $G'(\xi) < C_4$ 和 $|G(\xi)| \leqslant C_5|\xi|^q$ $(1<q<7)$, 其中 $C, C_1, C_2, C_3, C_5 > 0$ 均为常数, 且 C_4 是常数, 那么 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 存在唯一整体古典解

$$u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2}(\mathbb{R}^3)).$$

证明 根据定理 4.2.2, 只需证明式 (4.4.27) 成立即可. 式 (4.2.3) 两端同乘以 $u(x,t)$, 在 $\mathbb{R}^3$ 上对 x 积分, 应用引理 1.7.6 并分部积分得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}) + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ =& a\sum_{j=1}^{3}(f_j(u), u_{x_j}) - (h'(u)\nabla u, \nabla u) + b(G(u), u).\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

利用定理 4.2.3 和引理 1.7.6 有

$$a\sum_{j=1}^{3}(f_j(u), u_{x_j}) = a\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_0^{u(x,t)} f_j(y)dy\right)dx = 0, \tag{4.2.31}$$

$$-(h'(u)\nabla u, \nabla u) \leqslant 0, \tag{4.2.32}$$

$$(G(u), u) = (G(u)-G(0), u) \leqslant |C_4|\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.2.33}$$

将式 (4.2.31)–(4.2.33) 代入式 (4.2.30) 推出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}) + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ \leqslant& |C_4|\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

式 (4.2.34) 对 t 积分并利用 Gronwall 不等式, 可知

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_0^t(\|\nabla u(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta u(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})d\tau\\ \leqslant& e^{2|C_4|t}(\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \leqslant C_6(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.\end{aligned} \tag{4.2.35}$$

式 (4.2.3) 两端同乘以 $\Delta^2 u(x,t)$, 在 $\mathbb{R}^3$ 上对 x 积分, 应用引理 1.7.6 并分部积分, 再应用 Hölder 不等式有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}) + \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$
\begin{aligned}
&= -a\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} f_j(u(x,t))_{x_j}\Delta^2 u(x,t)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3}\Delta h(u(x,t))\Delta^2 u(x,t)dx + \int_{\mathbb{R}^3} G(u(x,t))\Delta^2 u(x,t)dx \\
&\leqslant a\sum_{j=1}^{3}\|f_j'(u(\cdot,t))\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\|u_{x_j}(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\quad + \frac{1}{8}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 4\|\Delta h(u(\cdot,t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 4\|G(u(\cdot,t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
\tag{4.2.36}
$$

根据引理 1.7.6, 当 $s\geqslant 6$ 时, 易证

$$
\|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},
$$

$$
\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \sum_{|\alpha|=3}\|D^\alpha u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}
$$

和

$$
\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \sum_{|\alpha|=4}\|D^\alpha u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},
$$

其中 α 是一多重指数. Gagliardo-Nirenberg 插值定理给出

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_7\|u(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_8(T),
\tag{4.2.37}
$$

$$
\begin{aligned}
\|f_j'(u(\cdot,t))\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} &\leqslant C_9\|u(\cdot,t)\|^2_{L^8(\mathbb{R}^3)} \\
&\leqslant C_{10}\left(\|u(\cdot,t)\|^{\frac{23}{32}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^{\frac{9}{32}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^2 \\
&\leqslant C_{11}(T)\left(1+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^{\frac{9}{16}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right),
\end{aligned}
\tag{4.2.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} &\leqslant C_{12}\left(\|\nabla u(\cdot,t)\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right) \\
&\leqslant C_{13}(T)\left(1+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right).
\end{aligned}
\tag{4.2.39}
$$

由式 (4.2.38) 和式 (4.2.39) 得

$$
\begin{aligned}
&a\sum_{j=1}^{3}\|f_j'(u(\cdot,t))\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\|u_{x_j}(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
\leqslant{}& C_{14}(T)\Bigg(\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^{\frac{25}{16}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}
$$

$$+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{5}{4}}+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{29}{16}}\Big)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+C_{15}(T). \tag{4.2.40}$$

易知

$$\begin{aligned}\|\Delta h(u(\cdot,t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2&=\|h''(u(\cdot,t))(\nabla u(\cdot,t))^2+h'(u(\cdot,t))\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\\&\leqslant 2\Big\{\|h''(u(\cdot,t))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^4\\&\quad+\|h'(u(\cdot,t))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\Big\},\end{aligned} \tag{4.2.41}$$

$$\|G(u(\cdot,t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\leqslant C_5^2\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{2(q-1)}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \tag{4.2.42}$$

Gagliardo-Nirenberg 插值定理给出

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}&\leqslant C_{16}\|u(\cdot,t)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^{\frac{5}{6}}\|u(\cdot,t)\|_{H^4(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{6}}\\&\leqslant C_{17}(T)\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\&\quad+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big)^{\frac{1}{6}},\end{aligned} \tag{4.2.43}$$

$$\begin{aligned}\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}&\leqslant C_{18}(T)\left(\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}+\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)\\&\leqslant C_{19}(T)\left(1+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{4.2.44}$$

把式 (4.2.43), (4.2.39) 和式 (4.2.44) 代入 (4.2.41), 并利用 Young 不等式推出

$$\begin{aligned}4\|\Delta h(u(\cdot,t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2&\leqslant 8\Big\{C_2^2C_{17}^2(T)\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\&\quad+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big)^{\frac{1}{3}}C_{13}^4(T)\Big(1+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\Big)^4\\&\quad+C_1^4C_{17}^4(T)\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\&\quad+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big)^{\frac{2}{3}}C_{19}^2(T)\Big(1+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\Big)^2\Big\}\\&\leqslant C_{20}(T)\Big\{\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\&\quad+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big)^{\frac{4}{3}}+\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left.\left.+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{5}{3}}\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{8}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+C_{21}(T)\Big(\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\quad+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\Big)+C_{22}(T).
\end{aligned}\tag{4.2.45}
$$

由式 (4.2.32) 和式 (4.2.43) 得

$$
\begin{aligned}
4\|G(u(\cdot,t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leqslant C_{23}(T)\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\quad+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big)^{\frac{q-1}{3}} \\
&\leqslant \frac{1}{8}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+C_{24}(T)\Big(\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\quad+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\Big)+C_{25}(T).
\end{aligned}\tag{4.2.46}
$$

把式 (4.2.40), (4.2.45) 和式 (4.2.46) 代入式 (4.2.36) 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\Big)+2\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\leqslant C_{26}(T)\Big(\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\Big)+C_{27}(T).
\end{aligned}\tag{4.2.47}
$$

式 (4.2.47) 对 t 积分, 知

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\quad+\int_0^t\Big(2\|\nabla\Delta u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\Delta^2 u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\Big)d\tau \\
&\leqslant C_{26}(T)\int_0^t\Big(\|\Delta u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\nabla\Delta u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\Big)d\tau \\
&\quad+\|\Delta\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\nabla\Delta\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+C_{28}(T).
\end{aligned}\tag{4.2.48}
$$

Gronwall 不等式给出

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\
&\quad+\int_0^t\Big(2\|\nabla\Delta u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\Delta^2 u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\Big)d\tau \\
&\leqslant\Big(C_{28}(T)+\|\Delta\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2+\|\nabla\Delta\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\Big)e^{C_{26}(T)T} \\
&=C_{29}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T.
\end{aligned}\tag{4.2.49}
$$

因此应用式 (4.2.35)(4.2.49) 和嵌入定理, 得式 (4.2.29). □

4.2.5　$N = 2$ 的情况

定理 4.2.4　设 $s \geqslant 6$, $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, h, G, $f_j \in C^k(\mathbb{R})$, $j = 1,2$, $k = [s] + 1$, $h(0) = G(0) = f_j(0) = 0$ $(j = 1,2)$, $h'(\xi) \geqslant C_{30}$, $|h'(\xi)| \leqslant C_{31}|\xi|^{\frac{3q_1-2}{4}}$, $|h''(\xi)| \leqslant c_{32}|\xi|^{\frac{3q_1+2}{4}}$, $|f_j'(\xi)| \leqslant C_{33}|\xi|^{\frac{q_1}{4}}$ $(j = 1,2)$, $G'(\xi) < C_{34}$ 和 $|G(\xi)| \leqslant C_{35}|\xi|^{\frac{q_1}{2}}$ 和 $2 < q_1 < \infty$, $C_{30}, C_{31}, C_{32}, C_{33}, C_{35} > 0$ 均为常数, 且 C_{34} 也是常数, 那么 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 存在唯一整体古典解

$$u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2}(\mathbb{R}^2)).$$

证明　方程 (4.2.3) 两端同乘以 $u(x,t)$, 在 $\mathbb{R}^2$ 上对 x 积分, 应用引理 1.7.6 并进行分部积分, 像在 $N = 3$ 的情况推出

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\int_0^t \left(\|\nabla u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\Delta u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right) d\tau \\ &\leqslant e^{2|C_{34}|t}(\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2) \leqslant C_{36}(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.\end{aligned} \tag{4.2.50}$$

式 (4.2.3) 两端同乘以 $\Delta^2 u(x,t)$, 在 $\mathbb{R}^2$ 上对 x 积分, 应用引理 1.7.6 并分部积分, 再应用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right) + \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leqslant a\sum_{j=1}^2 \|f_j'(u(\cdot,t))\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\|u_{x_j}(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad + \frac{1}{6}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 3\|\Delta h(u(\cdot,t))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 3\|G(u(\cdot,t))\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.\end{aligned} \tag{4.2.51}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 插值定理给出

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^2)} &\leqslant C_{37}\left(\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2}{q_1}}\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\frac{2}{q_1}} + \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right) \\ &\leqslant C_{38}(T), \quad 2 < q_1 < \infty,\end{aligned} \tag{4.2.52}$$

$$\|f_j'(u(\cdot,t))\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_{39}\|u(\cdot,t)\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^2)}^{\frac{q_1}{4}} \leqslant C_{40}, \quad j = 1,2, \tag{4.2.53}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} &\leqslant C_{41}\left(\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{5}{6}}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{6}} + \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right) \\ &\leqslant C_{42}(T)\left(1 + \|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{6}}\right).\end{aligned} \tag{4.2.54}$$

利用 Young 不等式, 由式 (4.2.53) 和式 (4.2.54) 有

$$a\sum_{j=1}^2 \|f_j'(u(\cdot,t))\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\|u_{x_j}(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leqslant \frac{1}{6}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C_{43}(T). \tag{4.2.55}$$

易见

$$\begin{aligned}\|\Delta h(u(\cdot,t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant 2\Big\{&\|h''(u(\cdot,t))\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\|\nabla u(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \\ &+ \|h'(u(\cdot,t))\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big\},\end{aligned} \tag{4.2.56}$$

$$\|G(u(\cdot,t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_{35}^2\|u(\cdot,t)\|^{q_1}_{L^{q_1}(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_{44}(T). \tag{4.2.57}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 插值定理知

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leqslant C_{45}\|u(\cdot,t)\|^{1-\frac{2}{3q_1+2}}_{L^{q_1}(\mathbb{R}^2)}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{2}{3q_1+2}}_{H^4(\mathbb{R}^2)} \\ &\leqslant C_{46}(T)\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad + \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)^{\frac{2}{3q_1+2}},\end{aligned} \tag{4.2.58}$$

$$\begin{aligned}\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leqslant C_{47}\left(\|u(\cdot,t)\|^{\frac12}_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^{\frac12}_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right) \\ &\leqslant C_{48}(T)\left(1+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^{\frac12}_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right).\end{aligned} \tag{4.2.59}$$

把式 (4.2.58), (4.2.54) 和式 (4.2.59) 代入式 (4.2.56), 并应用 Young 不等式导出

$$\begin{aligned}3\|\Delta h(u(\cdot,t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant\ & 6\Big\{C_{32}^2 C_{46}^{\frac{3q_1+2}{2}}(T)\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &+ \|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)C_{42}^4(T)\Big(1+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^{\frac16}_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)^4 \\ &+ C_{31}^2 C_{46}^2(T)\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &+ \|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)^{\frac{3q_1-2}{3q_1+2}} C_{48}^2(T)\Big(1+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^{\frac12}_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)^2\Big\} \\ \leqslant\ & C_{49}(T)\Big\{\Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &+ \|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)^{\frac53} + \Big(1+\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &+ \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big)^{\frac{6q_1}{3q_1+2}}\Big\} \\ \leqslant\ & \frac16\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C_{50}(T)\Big(\|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &+ \|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big) + C_{51}(T).\end{aligned} \tag{4.2.60}$$

将式 (4.2.55), (4.2.60) 和式 (4.2.57) 代入式 (4.2.51), 断言

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right)\\&+2\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2+\|\Delta^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\\\leqslant& C_{52}(T)\left(\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right)+C_{53}(T).\end{aligned}\tag{4.2.61}$$

Gronwall 不等式给出

$$\begin{aligned}&\|\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2+\|\nabla\Delta u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\\&+\int_0^t\left(2\|\nabla\Delta u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2+\|\Delta^2 u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right)d\tau\\\leqslant&\left(C_{53}(T)+\|\Delta\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2+\|\nabla\Delta\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right)e^{C_{52}(T)T}\\=&C_{54}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned}\tag{4.2.62}$$

所以应用式 (4.2.60), (4.2.62) 和 Sobolev 嵌入定理知, 式 (4.2.27) 成立. □

4.2.6 $N=1$ 的情况

定理 4.2.5 设 $s\geqslant 4,\varphi\in H^s(\mathbb{R}),h,f,G\in C^k(\mathbb{R}),k=[s]+1,h(0)=f(0)=G(0)=0,h'(\xi)\geqslant C_{58}>0$ 和 $G'(\xi)\leqslant C_{59}$, 其中 C_{58},C_{59} 是常数, 则 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 存在唯一整体古典解

$$u\in C([0,\infty);H^s(\mathbb{R}))\cap C^1([0,\infty);H^{s-2}(\mathbb{R})).$$

证明 方程 (4.2.3) 两端同乘以 $u(x,t)$, 在 $\mathbb{R}$ 上对 x 积分, 应用引理 1.7.6 并进行分部积分, 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right)+\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\\=&a(f(u),u_x)-(h'(u)u_x,u_x)+(G(u),u).\end{aligned}\tag{4.2.63}$$

类似于定理 4.2.3, 由式 (4.2.63) 有

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+2\int_0^t\left(\|u_x(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\|u_{xx}(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right)d\tau\\\leqslant& C_{55}(T)(\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2+\|\varphi_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2)=C_{56}(T).\end{aligned}\tag{4.2.64}$$

应用式 (4.2.65) 和 Sobolev 嵌入定理导出式 (4.2.28) 成立. □

注 4.2.2 在定理 4.2.5 的条件下, 如果 $s>\dfrac{9}{2}$, Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 存在唯一整体古典解

$$u\in C([0,\infty);C^4(\mathbb{R}))\cap C^1([0,\infty);C^2(\mathbb{R})).\tag{4.2.65}$$

4.2.7 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 解的衰减性质

定理 4.2.6 设 $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^N)$, h, G, $f_j \in C^1(\mathbb{R})$ $(j=1,2,3)$, $h'(\xi) \geqslant A > 0$ 和 $G'(\xi) \leqslant -B < 0$, 则 Cauchy 问题 (4.2.5), (4.2.4) 的整体广义解或整体古典解有衰减性质

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \left(\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) e^{-2\lambda t}, \quad t > 0, \tag{4.2.66}$$

其中 $\lambda = \min\{A, bB\}$ 是常数.

证明 方程 (4.2.3) 两端同乘以 $u(x,t)$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= -\left(h'(u)\nabla u, \nabla u\right) + a\left(\sum_{j=1}^N f_j(u), u_{x_j}\right) + (G'(\theta u)u, u) \\
&\leqslant -A\|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - B\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, 则

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \leqslant -2\lambda\left(\|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right). \tag{4.2.67}$$

由式 (4.2.67) 推出式 (4.2.66) 成立. □

4.2.8 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [282]. 与本节内容有关的文献见 [30], [175], [242], [283]–[287].

4.3 人口问题中的三维 Ginzburg-Landau 模型方程的 Cauchy 问题

4.3.1 引言

当研究人口问题中的增长和弥散时, 出现了下列广义 Ginzburg-Landau 模型方程 [288]

$$u_t = -a_1\nabla^4 u + a_2\nabla^2 u + a\nabla^2 u^3 + G(u),$$

其中 u 是依赖于空间变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 和时间 t 的未知函数, 表示人口密度, $G(s)$ 是给定的非线性函数, 表示动力或反应项, $a_1, a > 0$ 和 $a_2 \neq 0$ 都是物理常

数. 本节讨论三维 Ginzburg-Landau 模型方程的 Cauchy 问题

$$u_t = -a_1\nabla^4 u + a_2\nabla^2 u + a\nabla^2 u^3 + G(u),\ x\in\mathbb{R}^3,\quad t>0, \tag{4.3.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^3, \tag{4.3.2}$$

其中 $u_0(x)$ 是给定在 $\mathbb{R}^3$ 上的函数. 为了证明 Cauchy 问题 (4.3.1), (4.3.2) 解的存在性, 首先在柱形域 $\overline{Q}_T$ 上考虑方程 (4.3.1) 的周期边值问题

$$u(x,t)=u(x_1+2D,x_2,x_3)=u(x_1,x_2+2D,x_3)=u(x_1,x_2,x_3+2D), \tag{4.3.3}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \tag{4.3.4}$$

其中 $\overline{Q}_T=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\overline{\Omega},0\leqslant t\leqslant T\},\overline{\Omega}=\{-D\leqslant x_1,x_2,x_3\leqslant D\},D>0$ 和 $u_0(x)$ 是给定在 $\overline{\Omega}$ 上的函数且满足周期边值条件 (4.3.3). 我们应用 Galerkin 方法证明周期边值问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 整体广义解和整体古典解的存在性和唯一性, 然后通过周期边值问题取极限方法证明 Cauchy 问题 (4.3.1), (4.3.2) 存在唯一的整体广义解和整体古典解, 还证明当 $t\to\infty$ 时解的渐近性质.

4.3.2 周期边值问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4)

为了应用 Galerkin 方法证明问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 解的存在性, 需要建立 $L^2(\Omega)$ 的一个标准正交基.

考虑常微分方程的特征值问题 $y''+\lambda y=0,\ y(x_1+2D)=y(x_1)$, 可得到特征值 $\lambda_{1i}=\alpha_i^2=\left(\dfrac{i\pi}{D}\right)^2\ (i=0,1,\cdots)$ 和对应的特征函数系

$$\{y_i(x_1)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2D}},\frac{1}{\sqrt{D}}\cos\alpha_i x_1,\frac{1}{\sqrt{D}}\sin\alpha_i x_1,\ i=1,2,\cdots,\right\}.$$

它组成 $L^2(-D,D)$ 的一个标准正交基. 用同样方法可构造 x_2 轴上 $L^2(-D,D)$ 的一个标准正交基

$$\{z_j(x_2)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2D}},\frac{1}{\sqrt{D}}\cos\beta_j x_2,\frac{1}{\sqrt{D}}\sin\beta_j x_2,\ j=1,2,\cdots\right\},$$

其中 $\lambda_{2j}=\beta_j^2=\left(\dfrac{j\pi}{D}\right)^2$ 和 x_3 轴上的 $L^2(-D,D)$ 的一个标准正交基

$$\{w_k(x_3)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2D}},\frac{1}{\sqrt{D}}\cos\gamma_k x_3,\ \frac{1}{\sqrt{D}}\sin\gamma_k x_3,\ k=1,2,\cdots\right\},$$

其中 $\lambda_{3k}=\gamma_k^2=\left(\dfrac{k\pi}{D}\right)^2$. 根据引理 1.8.11 知, 函数系 $\{y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3),i,j,k=0,1,\cdots\}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 的一个标准正交基.

设问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 的 Galerkin 近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 可表为

$$u_{N_0}(x,t)=\sum_{i,j,k=0}^{N_0}p_{N_0ijk}(t)y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3),\tag{4.3.5}$$

其中 $p_{N_0ijk}(t)$ 是待定函数, N_0 是自然数, 初值函数 $u_0(x)$ 可表为

$$u_0(x)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}q_{ijk}y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3).$$

将近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 和初值函数的近似

$$u_{0N_0}(x)=\sum_{i,j,k=0}^{N_0}q_{ijk}y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3)$$

代入 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4), 可得近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 满足下列方程和初边值条件

$$u_{N_0t}+a_1\nabla^4u_{N_0}-a_2\nabla^2u_{N_0}-a\nabla^2u_{N_0}^3-G(u_{N_0})=0,\tag{4.3.6}$$

$$u_{N_0}(x,t)=u_{N_0}(x_1+2D,x_2,x_3)=u_{N_0}(x_1,x_2+2D,x_3)=u_{N_0}(x_1,x_2,x_3+2D),\tag{4.3.7}$$

$$u_{N_0}(x,0)=u_{0N_0}(x).\tag{4.3.8}$$

(4.3.6) 和 (4.3.8) 两端分别乘以 $y_i(x_1)z_j(x_2)w_k(x_3)$ 并在 Ω 上积分, 得

$$(u_{N_0t}+a_1\nabla^4u_{N_0}-a_2\nabla^2u_{N_0}-a\nabla^2u_{N_0}^3-G(u_{N_0}),y_iz_jw_k)=0,\tag{4.3.9}$$

$$p_{N_0ijk}(0)=q_{ijk},\tag{4.3.10}$$

其中 $i,j,k,=0,1,\cdots,N_0$.

下面对近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 作积分估计.

引理 4.3.1 设 $G(s)\in C^1(\mathbb{R})$, $G(0)=0$, 对于任意的 $s\in\mathbb{R}$, $G'(s)\leqslant\gamma$, 其中 $\gamma<0$ 为常数, $u_0\in L^2(\Omega)$, 则对于任意的 N_0, 常微分方程组 Cauchy 问题 (4.3.9), (4.3.10) 至少有一解 $p_{N_0ijk}(t)\in C^1[0,T](i,j,k=0,1,\cdots,N_0)$, 并有估计

$$\|u_{N_0}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla^2u_{N_0}\|_{L^2(Q_t)}^2\leqslant C_1(T)\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2,\quad t\in[0,T],\tag{4.3.11}$$

其中 $C_1(T)$ 及下面的 $C_i(T)$ 是依赖于 T 但不依赖于 N_0 和 Ω 的常数, C_i 是不依赖于 N_0 和 Ω 的常数.

证明 式 (4.3.9) 两端乘以 $p_{N_0ijk}(t)$, 对 $i,j,k=0,1,\cdots,N_0$ 求和, 得

$$(u_{N_0t}+a_1\nabla^4u_{N_0}-a_2\nabla^2u_{N_0}-a\nabla^2u_{N_0}^3-G(u_{N_0}),u_{N_0})=0.\tag{4.3.12}$$

利用分部积分有

$$(a_1\nabla^4 u_{N_0}, u_{N_0}) = a_1\sum_{i,j=1}^{3}\|u_{N_0x_ix_j}\|_{L^2(\Omega)}^2 = a_1\|\nabla^2 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{4.3.13}$$

$$a(\nabla^2 u_{N_0}^3, u_{N_0}) = -3a(u_{N_0}^2\nabla u_{N_0}, \nabla u_{N_0}) \leqslant 0, \tag{4.3.14}$$

$$(G(u_{N_0}), u_{N_0}) \leqslant \gamma\|u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 < 0, \tag{4.3.15}$$

$$2(a_2\nabla^2 u_{N_0}, u_{N_0}) \leqslant a_1\|\nabla^2 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{a_2^2}{a_1}\|u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.3.16}$$

将式 (4.3.13)–(4.3.16) 代入式 (4.3.12), 由 Gronwall 不等式可得估计 (4.3.11).

应用 Leray-Schauder 不动点定理可以证明问题 (4.3.9), (4.3.10) 解的存在性. □

引理 4.3.2　设引理 4.3.1 条件成立, $G\in C^2(\mathbb{R})$, $|G(s)|\leqslant d|s|^p, 1<p<7, d>0$ 为常数, $\psi(s)G(s)\leqslant 0$, 其中 $\psi(s)=as^3+a_2s$. 如果 $u_0\in H^6(\Omega), a_2>0$, 则成立下列估计

$$\|u_{N_0}(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_2(T), \quad t\in[0,T], \tag{4.3.17}$$

$$\|(\nabla u_{N_0})^2\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_3(T), \quad t\in[0,T], \tag{4.3.18}$$

$$\|u_{N_0t}(\cdot,t)\|_{H^2}^2 + \|\nabla^4 u_{N_0t}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_4(T), \quad t\in[0,T]. \tag{4.3.19}$$

证明　令

$$B(u_{N_0}) = \int_0^{u_{N_0}}\psi(s)ds = \frac{a}{4}u_{N_0}^4 + \frac{a_2}{2}u_{N_0}^2$$

和

$$E_{N_0}(t) = \int_\Omega\left[B(u_{N_0}) + \frac{a_1}{2}(\nabla u_{N_0})^2\right]dx.$$

$E_{N_0}(t)$ 对 t 求导和对 x 分部积分得

$$\frac{dE_{N_0}(t)}{dt} = \int_\Omega(\psi(u_{N_0})u_{N_0t} - a_1u_{N_0t}\nabla^2 u_{N_0})dx. \tag{4.3.20}$$

利用方程 (4.3.6) 和对 x 进行分部积分, 由式 (4.3.20) 得

$$\begin{aligned}\frac{dE_{N_0}(t)}{dt} =& -\int_\Omega[a_1\nabla^3 u_{N_0} - \nabla\psi(u_{N_0})]^2dx\\ &+\int_\Omega[\psi(u_{N_0})G(u_{N_0}) + a_1\nabla u_{N_0}\nabla G(u_{N_0})]dx.\end{aligned} \tag{4.3.21}$$

易知 $a_1\nabla u_{N_0}\nabla G(u_{N_0})<0$. 由式 (4.3.21) 得 $\frac{dE_{N_0}(t)}{dt}\leqslant 0$, 所以

$$E_{N_0}(t)\leqslant E_{N_0}(0) = \int_\Omega\left[B(u_{N_0}(x,0)) + \frac{a_1}{2}(\nabla u_{N_0}(x,0))^2\right]dx$$

$$\leqslant \frac{a}{4}\|u_0\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{a_2}{2}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_5, \quad t \in [0,T]. \quad (4.3.22)$$

由式 (4.3.22) 和式 (4.3.11) 得

$$\|u_{N_0}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\nabla^2 u_{N_0}\|_{L^2(Q_t)}^2 + \|u_{N_0}\|_{L^4(\Omega)}^4 \leqslant C_6(T), \quad t \in [0,T]. \quad (4.3.23)$$

式 (4.3.9) 两端乘以 $(\alpha_i^2+\beta_j^2+\gamma_k^2)^2 p_{N_0ijk}(t)$, 对 $i,j,k=0,1,\cdots,N_0$ 求和, 分部积分并利用 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\nabla^2 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_1\|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2\\ \leqslant&\frac{3}{a_1}\{a_2^2\|\nabla^2 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a^2\|\nabla^2 u_{N_0}^3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|G(u_{N_0})\|_{L^2(\Omega)}^2\}. \quad (4.3.24)\end{aligned}$$

容易验证 $\|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i,j,k,l=1}^3 \|u_{N_0x_ix_jx_kx_l}\|_{L^2(\Omega)}^2$. 根据 Sobolev 嵌入定理和式 (4.3.23) 得

$$\|u_{N_0}\|_{L^6(\Omega)} \leqslant C_7\|u_{N_0}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_8(T), \quad t \in [0,T]. \quad (4.3.25)$$

根据 Gagliardo-Nirenberg 插值定理有

$$\|u_{N_0}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_9\|u_{N_0}\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{5}{6}}(\|u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{6}}, \quad (4.3.26)$$

$$\|\nabla u_{N_0}\|_{L^4(\Omega)} \leqslant C_{10}\|\nabla u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}(\|u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{4}}, \quad (4.3.27)$$

$$\|\nabla^2 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{11}\|u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}(\|u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3.28)$$

利用式 (4.3.26)–(4.3.28) 可得

$$\|\nabla^2 u_{N_0}^3\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_{12}(T)(\|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{3}} + \|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{3}}) + C_{13}(T), \quad (4.3.29)$$

$$\begin{aligned}\|G(u_{N_0})\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leqslant d^2\|u_{N_0}\|_{L^\infty(\Omega)}^{2(p-1)}\|u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &\leqslant C_{14}(T)\|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{p-1}{3}} + C_{15}(T). \quad (4.3.30)\end{aligned}$$

将式 (4.3.28)–(4.3.30) 代入式 (4.3.24) 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\nabla^2 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_1\|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2\\ \leqslant& C_{16}(T)\{\|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{3}}\\ &+ \|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{3}} + \|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{p-1}{3}}\} + C_{17}(T). \quad (4.3.31)\end{aligned}$$

于是

$$\|\nabla^2 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla^4 u_{N_0}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_{18}(T), \quad t \in [0,T]. \quad (4.3.32)$$

由式 (4.3.32) 和式 (4.3.31) 知式 (4.3.17) 成立. 由式 (4.3.17) 和 Sobolev 嵌入定理, 得

$$u_{N_0} \in C([0,T]; C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})), \tag{4.3.33}$$

其中 $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}$. 由式 (4.3.27), (4.3.17) 有

$$\int_0^t \|(\nabla u_{N_0})^2\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau = \int_0^t \|\nabla u_{N_0}\|_{L^4(\Omega)}^4 d\tau \leqslant C_3(T),$$

所以式 (4.3.18) 成立. 式 (4.3.9) 两端乘以 $\dot{p}_{N_0ijk}(t)$, 对 $i,j,k = 0,1,\cdots,N_0$ 求和后, 取 $t=0$, 可得

$$\|u_{N_0t}(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_{19}. \tag{4.3.34}$$

式 (4.3.9) 对 t 求导, 有

$$(u_{N_0tt} + a_1\nabla^4 u_{N_0t}, y_iz_jw_k) = (a_2\nabla^2 u_{N_0t} + a(\nabla^2 u_{N_0}^3)_t + G(u_{N_0})_t, y_iz_jw_k). \tag{4.3.35}$$

式 (4.3.35) 两端乘以 $\dot{p}_{N_0ijk}(t)$, 对 $i,j,k = 0,1,\cdots,N_0$ 求和, 分部积分和利用 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_1\|\nabla^2 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2\\ \leqslant&\frac{2a^2}{a_1}\|(u_{N_0}^3)_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|G(u_{N_0})_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1+\frac{2a_2^2}{a_1}\right)\|u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

注意到式 (4.3.33), 由式 (4.3.36) 推得

$$\frac{d}{dt}\|u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_1\|\nabla^2 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_{20}(T)\|u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{21}(T). \tag{4.3.37}$$

由于式 (4.3.34), 从式 (4.3.36) 利用 Gronwall 不等式有

$$\|u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla^2 u_{N_0t}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_{22}(T), \quad t \in [0,T]. \tag{4.3.38}$$

式 (4.3.29) 两端乘以 $(\alpha_i^2+\beta_j^2+\gamma_k^2)^2\dot{p}_{N_0ijk}(t)$, 对 $i,j,k = 0,1,\cdots,N_0$ 求和, 分部积分, 取 $t=0$, 可得

$$\|\nabla^2 u_{N_0t}(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_{23}. \tag{4.3.39}$$

式 (4.3.35) 两端乘以 $(\alpha_i^2+\beta_j^2+\gamma_k^2)^2\dot{p}_{N_0ijk}(t)$, 对 $i,j,k = 0,1,\cdots,N_0$ 求和, 并利用 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\nabla^2 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_1\|\nabla^4 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2\\ \leqslant&\frac{3}{a_1}\{a_2^2\|\nabla^2 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a^2\|(\nabla^2 u_{N_0}^3)_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|G(u_{N_0})_t\|_{L^2(\Omega)}^2\}.\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理, 式 (4.3.38), (4.3.17), Young 不等式和式 (4.3.37), 然后式 (4.3.40) 两端对 t 积分得

$$\|\nabla^2 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla^4 u_{N_0t}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_{24}(T) + C_{25}(T)\int_0^t \|\nabla^2 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (4.3.41)$$

注意到式 (4.3.38), 利用 Gronwall 不等式, 由式 (4.3.40) 可得 (4.3.19). □

定理 4.3.1 在引理 4.3.2 的条件下, 问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 有唯一整体广义解 $u(x,t)$, 即 $u \in H^4(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$, $u_t \in L^2([0,T];H^2(\Omega))$, $u(x,t)$ 满足恒等式

$$\int_0^T\int_\Omega \{u_t + a_1\nabla^4 u - a_2\nabla^2 u - a\nabla^2 u^3 - G(u)\}\varphi(x,t)dxdt = 0, \quad \forall\varphi\in L^2(Q_T)$$

和在古典意义下满足初边值条件 (4.3.3), (4.3.4).

证明 由引理 4.3.2 和 Sobolev 嵌入定理知

$$\|u_{N_0}\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} \leqslant C_{26}(T), \quad \|u_{N_0t}\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} \leqslant C_{27}(T), \quad t\in[0,T], \quad (4.3.42)$$

其中 $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. 由式 (4.3.34) 和 Ascoli-Arzelá 定理推出, 存在函数 $u(x,t)$ 并可从 $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 中选出子序列, 仍记为 $\{u_{N_0}(x,t)\}$, 使得当 $N_0\to\infty$ 时, $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 在 $\overline{Q}_T$ 上一致收敛于 $u(x,t)$. 由引理 4.3.2 还知道, 子序列 $\{u_{N_0}(x,t)\}$, $\{u_{N_0x_i}(x,t)\}$, $\{u_{N_0x_ix_j}(x,t)\}$, $\{u_{N_0x_ix_jx_k}(x,t)\}$, $\{u_{N_0x_ix_jx_kx_l}(x,t)\}$, $\{u_{N_0t}(x,t)\}$, $\{u_{N_0x_it}(x,t)\}$, $\{u_{N_0x_ix_jt}(x,t)\}$ 和 $\{u^2_{N_0x_i}\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中分别弱收敛于 $u(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)$, $u_{x_ix_j}(x,t)$, $u_{x_ix_jx_k}(x,t)$, $u_{x_ix_jx_kx_l}(x,t)$, $u_t(x,t)$, $u_{x_it}(x,t)$, $u_{x_ix_jt}(x,t)$ 和 $u^2_{x_i}(x,t)$, 其中 $i,j,k,l=1,2,3$. 所以 $u(x,t)$ 是问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 的整体广义解.

类似于证明估计 (4.3.11) 的方法, 可证明广义解的唯一性. □

为了证明问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 存在古典解, 需要对近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 作进一步的估计.

引理 4.3.3 在引理 4.3.2 的条件下, 如果 $G\in C^5(\mathbb{R})$, $u_0\in H^{10}(\Omega)$, 则有下列估计

$$\|u_{N_0}\|_{H^6(\Omega)}^2 + \|\nabla^8 u_{N_0}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_{28}(T), \quad t\in[0,T], \quad (4.3.43)$$

$$\|u_{N_0t}\|_{H^6(\Omega)}^2 + \|\nabla^8 u_{N_0t}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_{29}(T), \quad t\in[0,T], \quad (4.3.44)$$

$$\|u_{N_0tt}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leqslant C_{30}(T), \quad t\in[0,T]. \quad (4.3.45)$$

证明 式 (4.3.9) 乘以 $(\alpha_i^2+\beta_j^2+\gamma_k^2)^6 p_{N_0ijk}(t)$, 对 $i,j,k=0,1,\cdots,N_0$ 求和, 分部积分和利用 Cauchy 不等式有

$$\frac{d}{dt}\|\nabla^6 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_1\|\nabla^8 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leqslant \frac{3}{a_1}(a_2^2\|\nabla^6 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a^2\|\nabla^6 u_{N_0}^3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla^4 G(u_{N_0})\|_{L^2(\Omega)}^2). \tag{4.3.46}$$

由于 $\|\nabla^6 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=6}\|D^\alpha u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2$, 根据引理 1.8.17, 由式 (4.3.46) 推得

$$\|\nabla^6 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla^8 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leqslant \|\nabla^6 u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{31}(T) + \int_0^t \|\nabla^6 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|\nabla^6 u_{N_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla^8 u_{N_0}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_{32}(T), \quad t \in [0,T]. \tag{4.3.47}$$

式 (4.3.49) 结合式 (4.3.11) 得估计 (4.3.43).

式 (4.3.35) 乘以 $(\alpha_i^2+\beta_j^2+\gamma_k^2)^6 \dot{p}_{N_0ijk}(t)$, 对 $i,j,k=0,1,\cdots,N_0$ 求和, 分部积分, 利用 Cauchy 不等式和引理 1.8.17 可得

$$\begin{aligned}&\|\nabla^6 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla^8 u_{N_0t}\|_{L^2(Q_t)}^2\\ \leqslant&\|\nabla^6 u_{N_0t}(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{33}(T) + C_{34}(T)\int_0^t \|\nabla^6 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.\end{aligned} \tag{4.3.48}$$

应用前面的方法易知

$$\|\nabla^6 u_{N_0t}(\cdot,0)\|^2 \leqslant C_{35}. \tag{4.3.49}$$

注意到式 (4.3.49), 利用 Gronwall 不等式, 由式 (4.3.48) 推得

$$\|\nabla^6 u_{N_0t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla^8 u_{N_0t}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant C_{36}(T), \quad t \in [0,T]. \tag{4.3.50}$$

式 (4.3.50) 结合式 (4.3.19) 可得式 (4.3.44).

式 (4.3.35) 两端乘以 $\ddot{p}_{N_0ijk}(t)$, 对 $i,j,k=0,1,\cdots,N_0$ 求和, 得

$$(u_{N_0tt}, u_{N_0tt}) = (-a_1\nabla^4 u_{N_0t} + a_2\nabla^2 u_{N_0t} + a(\nabla^2 u_{N_0}^3)_t + G(u_{N_0})_t, u_{N_0tt}). \tag{4.3.51}$$

利用 Cauchy 不等式, 引理 1.8.17 和估计 (4.3.43), (4.3.44), 由式 (4.3.51) 可得

$$\|u_{N_0tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_{37}(T), \quad t \in [0,T]. \tag{4.3.52}$$

同理可证

$$\|\nabla^2 u_{N_0tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_{38}(T), \quad t \in [0,T]. \tag{4.3.53}$$

式 (4.3.52) 结合式 (4.3.53) 得估计 (4.3.45). □

定理 4.3.2　在引理 4.3.3 的条件下, 问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)$.

证明 由估计 (4.3.43)–(4.3.45) 和 Sobolev 嵌入定理知

$$\begin{aligned}\|u_{N_0}\|_{C^{4,\lambda}(\overline{\Omega})} &\leqslant C_{39}(T)\|u_{N_0t}\|_{C^{4,\lambda}(\overline{\Omega})}\\ &\leqslant C_{40}(T), \|u_{N_0tt}\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} \leqslant C_{41}(T), \quad t\in[0,T],\end{aligned} \tag{4.3.54}$$

其中 $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. 由式 (4.3.54) 和 Ascoli-Arzelá 定理, 可以证明问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 存在整体古典解 $u(x,t)$. 显然, 问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 的古典解是唯一的. □

注 4.3.1 在问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 中满足定理 4.3.1 和定理 4.3.2 条件的 $G(s)$ 是存在的, 例如

$$G(s)=bs^5+b_1s^3+b_2s-|s|^qs,$$

其中 $b,b_1,b_2<0$ 为常数, $1<q<6$, 就是一例.

4.3.3 Cauchy 问题 (4.3.1), (4.3.2)

现在讨论 Cauchy 问题 (4.3.1), (4.3.2). 通过周期边值问题取极限的方法可以证明 Cauchy 问题 (4.3.1), (4.3.2) 存在唯一整体广义解和整体古典解, 即利用 3.9 节多变量广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题中类似的方法, 可证明以下定理.

定理 4.3.3 设 $G\in C^2(\mathbb{R})$, $G(0)=0$, 对于任意的 $s\in\mathbb{R}, G'(s)\leqslant\gamma$, 其中 $\gamma<0$ 为常数, $|G(s)|\leqslant d|s|^p$, 其中 $d>0$, $1<p<7$ 为常数, $\psi(s)G(s)\leqslant 0$, $a_2>0$, 如果 $u_0\in H^6(\mathbb{R}^3)$, 则 Cauchy 问题 (4.3.1), (4.3.2) 存在唯一整体广义解 $u(x,t)$; 如果 $G\in C^5(\mathbb{R})$, $u_0\in H^{10}(\mathbb{R}^3)$, 则 Cauchy 问题 (4.3.1), (4.3.2) 存在唯一整体古典解 $u(x,t)$.

4.3.4 解的渐近性质

定理 4.3.4 设 $G\in C^1(\mathbb{R})$, $G(0)=0$ 且对于任意的 $s\in\mathbb{R}$, $G'(s)\leqslant\gamma$, 其中 $\gamma<0$ 为常数, $a_2>0$, 则周期边值问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 的广义解和古典解 $u(x,t)$ 有渐近性质 $\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}=0$; Cauchy 问题 (4.3.1), (4.3.2) 的广义解和古典解 $u(x,t)$ 有渐近性质 $\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L_2(R^3)}=0$.

证明 只证周期边值问题 (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) 的情形, 因为同理可证 Cauchy 问题 (4.3.1), (4.3.2) 的情形. 方程 (4.3.1) 乘以 $u(x,t)$, 然后在 $Q_t(0<t<\infty)$ 上积分, 对 x 分部积分可得

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+2a_1\|\nabla^2u\|^2_{L^2(\Omega)}=-2a_2(\nabla u,\nabla u)-6a(u^2\nabla u,\nabla u)+2(G(u),u). \tag{4.3.55}$$

注意到对 G 的假定, 由式 (4.3.55) 推得

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant 2\gamma\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.3.56}$$

由 (4.3.56) 分离变量可得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{2\gamma t}. \qquad \square$$

4.3.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [289]. 与本节内容有关的文献见 [24], [28], [31], [53], [129], [237], [290]–[292].

4.4 人口问题中一广义 Ginzburg-Landau 模型方程的时间周期解

4.4.1 引言

在 4.3 节中已经研究了人口问题中的三维 Ginzburg-Landau 模型方程的 Cauchy 问题.

本节研究下列广义 Ginzburg-Landau 模型方程的时间周期问题

$$u_t = -a_1 u_{xxxx} + a_2 u_{xx} + F(u)_{xx} + G(u) + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.4.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.4.2}$$

$$u(x,t+\omega) = u(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.4.3}$$

其中 a_1, a_2 和 ω 都是正常数, $f(x,t)$ 是关于变量 x 以及变量 t 以 ω 为周期的函数, $F(s)$ 和 $G(s)$ 为已知的非线性函数. 我们将证明问题 (4.4.1)–(4.4.3) 时间周期解 $u(x,t)$ 的存在性与唯一性.

设 X 为 Banach 空间, $C_\omega^k(\mathbb{R},X)$ 表示定义在 $\mathbb{R}$ 上具有 k 阶连续导数以 ω 为周期且取值于 X 的函数构成的集合, 其范数定义为

$$\|u\|_{C_\omega^k(\mathbb{R},X)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\left\{\sum_{t=0}^{k}\|D_t^i u\|_X\right\},$$

其中 $\|\cdot\|_X$ 表示 X 中的范数.

用 $L_\omega^p(\mathbb{R},X)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 表示定义在 $\mathbb{R}$ 上以 ω 为周期取值于 X 的并且满足

$$\|u\|_{L_\omega^p(\mathbb{R},X)} = \left(\int_0^\omega \|u\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$\|u\|_{L_\omega^\infty(\mathbb{R},X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u\|_X < \infty \quad (p = \infty)$$

的可测函数集.

$W_\omega^{k,p}(\mathbb{R},X)$ 表示关于 t 的直到 k 阶偏导数都属于 $L_\omega^p(\mathbb{R},X)$ 的函数集合 [24].

4.4.2 问题 (4.4.1)–(4.4.3) 的近似解的积分估计

设 $\{y_j(x)\}(j=1,2,\cdots)$ 是特征值问题

$$y''+\lambda y=0,\quad y(0)=y(1)=0 \tag{4.4.4}$$

相应于特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots)$ 的特征函数构成的 $L^2(0,1)$ 中的标准正交基.

令 $u_{N_0}(x,t)=\sum_{j=1}^{N_0}\alpha_{N_0j}(t)y_j(x)$ 是问题 (4.4.1)–(4.4.3) 的 Galerkin 近似解, 其中 $\alpha_{N_0j}(t)(j=1,2,\cdots,N_0)$ 是待定系数, N_0 是正整数. 根据 Galerkin 方法, $\alpha_{N_0j}(t)(j=1,2,\cdots,N_0)$ 应满足如下常微分方程组的时间周期问题

$$(u_{N_0t}+a_1u_{N_0x^4}-a_2u_{N_0xx}-F(u_{N_0})_{xx}-G(u_{N_0}),y_j)=(f,y_j), \tag{4.4.5}$$

$$(u_{N_0}(x,t+\omega),y_j)=(u_{N_0}(x,t),y_j),\quad j=1,2,\cdots,N_0. \tag{4.4.6}$$

引理 4.4.1 假定

(1) $F\in C^2(\mathbb{R})$ 和 $\forall s\in\mathbb{R},F'(s)\geqslant -b$, 其中 $b\geqslant 0$ 是常数;

(2) $G\in C^1(\mathbb{R}),G(0)=0,\forall s\in\mathbb{R},G'(s)<d$, 其中 $d>0$ 是常数, 且 $b+d<a_2$;

(3) $f\in C_\omega(\mathbb{R};L^2(0,1))$. 记 $M_1=\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|f\|_{L^2(0,1)}$, 则问题 (4.4.5), (4.4.6) 存在解 $\alpha(t)=(\alpha_{N_01}(t),\cdots,\alpha_{N_0N_0}(t))\in C^1_\omega[0,\omega]$, 其中

$$C^1_\omega[0,\omega]=\{r(t)|r(t+\omega)=r(t),\forall t\in\mathbb{R},\ r(t)\in C^1[0,\omega]\},$$

并且问题 (4.4.1)–(4.4.3) 的近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 满足估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{N_0}\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant C_0M_1^2, \tag{4.4.7}$$

其中 $C_0>0$ 是与 N_0,M_1 都无关的常数.

证明 式 (4.4.5) 两端同乘以 $\alpha_{N_0j}(t)$, 并对 $j=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 利用 Hölder 不等式以及 Poincaré 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{N_0}\|^2_{L^2(0,1)}+a_1\|u_{N_0x^2}\|^2_{L^2(0,1)}+a_2\|u_{N_0x}\|^2_{L^2(0,1)}\\=&-\int_0^1F'(u_{N_0})u^2_{N_0x}dx+\int_0^1G'(\delta u_{N_0})u^2_{N_0}dx+\int_0^1f(u_{N_0})dx\\\leqslant&(b+d)\|u_{N_0x}\|^2_{L^2(0,1)}+\|f\|_{L^2(0,1)}\|u_{N_0x}\|_{L^2(0,1)},\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

其中 $0<\delta<1$. 利用 Cauchy 不等式, 由式 (4.4.8) 可得

$$\frac{d}{dt}\|u_{N_0}\|^2_{L^2(0,1)}+2a_1\|u_{N_0x^2}\|^2_{L^2(0,1)}+(a_2-b-d)\|u_{N_0x}\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant\frac{M_1^2}{a_2-b-d}. \tag{4.4.9}$$

式 (4.4.9) 在 $[0,\omega]$ 上积分, 得

$$\int_0^\omega \|u_{N_0x}\|^2_{L^2(0,1)}dt \leqslant \frac{M_1^2\omega}{(a_2-b-d)^2}. \tag{4.4.10}$$

利用积分中值定理, 由式 (4.4.10) 推得, 存在 $t_1 \in [0,\omega]$, 使得

$$\|u_{N_0x}(\cdot,t_1)\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{M_1^2}{(a_2-b-d)^2}. \tag{4.4.11}$$

再在 $[t_1,t+\omega](\forall t\in[0,\omega])$ 上对式 (4.4.9) 积分, 应用式 (4.4.11) 和 Poincaré 不等式, 可见

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{N_0}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} &\leqslant \|u_{N_0}(\cdot,t_1)\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{2\omega M_1^2}{a_2-b-d}\\ &\leqslant \frac{2\omega}{(a_2-b-d)^2}\left(a_2-b-d+\frac{1}{2\omega}\right)M_1^2\\ &= C_0M_1^2,\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

其中 $C_0>0$ 是不依赖于 N_0 和 M_1 的常数.

利用 Leray-Schauder 不动点定理, 可以证明问题 (4.4.5), (4.4.6) 解的存在性. □

为了对近似解作进一步估计, 需要下面的引理.

引理 4.4.2　假定下面的条件成立:

(1) $H(z)$ 关于变量 z 是 $k(k\geqslant 1)$ 次连续可导的, 且存在常数 $p\geqslant 1$ 和 $Q>0$, 使得

$$|D_z^m H| \leqslant Q|z|^{p-m},$$

其中 $0\leqslant m\leqslant p$ 是整数.

(2) $z(x,t)\in L^\infty([0,\omega]\times[0,1])\cap L^\infty_\omega(\mathbb{R};H^k(0,1))$; 并且存在常数 $J>0$, 使得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|z(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant J,$$

则成立估计式

$$\int_0^1 |D_x^k H(z(x,t))|^2dx \leqslant KJ^\rho\|z\|^2_{H^k(0,1)},\quad 0\leqslant t\leqslant\omega,$$

其中 $K>0$ 和 $\rho\geqslant 0$ 是常数, $D_z=\dfrac{d}{dz}, D_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$.

应用文献 [129] 中证明引理 4 的方法可以证明此引理.

引理 4.4.3　假定引理 4.4.1 的条件和以下条件成立:

(1) $F \in C^4(\mathbb{R}), F(0) = F''(0) = 0$, 并且 $\forall s \in \mathbb{R}, |F(s)| \leqslant A|s|^{\xi_1+1}$, 其中 $1 \leqslant \xi_1 < 4$ 和 $A > 0$ 是常数;

(2) $G \in C^2(\mathbb{R})$, 并且存在常数 $B > 0, 1 \leqslant \xi_2 < 8$, 使得 $\forall s \in \mathbb{R}, |G(s)| \leqslant B|s|^{\xi_2+1}$;

(3) $f \in C_\omega(\mathbb{R}; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)), f_t \in C_\omega(\mathbb{R}; L^2(0,1))$ 和

$$M_2 = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} (\|f\|_{H^2(0,1)} + \|f_t\|_{L^2(0,1)}),$$

则

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} (\|u_{N_0 t}(\cdot, t)\|^2_{H^2(0,1)} + \|u_{N_0}(\cdot, t)\|^2_{H^4(0,1)}) \leqslant C_1(M_2). \tag{4.4.13}$$

这里及下面出现的 $C_i(s)(i = 1, 2, \cdots)$ 是关于 s 的齐次多项式, 并且与 N_0 无关.

证明 式 (4.4.5) 两端同乘以 $-\lambda_j \alpha_{N_0 j}(t)$, 并对 $j = 1, 2, \cdots, N_0$ 求和, 通过分部积分和应用 Hölder 不等式推得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{N_0 x}\|^2_{L^2(0,1)} + a_1\|u_{N_0 x^3}\|^2_{L^2(0,1)} + a_2\|u_{N_0 x^2}\|^2_{L^2(0,1)} \\
&= (F'(u_{N_0})u_{N_0 x}, u_{N_0 x^3}) - (G'(\delta u_{N_0})u_{N_0}, u_{N_0 x^2}) - (f, u_{N_0 x^2}) \\
&\leqslant A\|u_{N_0}\|^{\xi_1}_{L^\infty(0,1)}\|u_{N_0 x}\|_{L^2(0,1)}\|u_{N_0 x^3}\|_{L^2(0,1)} \\
&\quad + B\|u_{N_0}\|^{\xi_2}_{L^\infty(0,1)}\|u_{N_0}\|_{L^2(0,1)}\|u_{N_0 x^2}\|_{L^2(0,1)} \\
&\quad + \|f\|_{L^2(0,1)}\|u_{N_0 x^2}\|_{L^2(0,1)},
\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

其中 $0 < \delta < 1$.

利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理和式 (4.4.7), 并且注意到 $M_1 < M_2$, 有

$$\begin{aligned}
\|u_{N_0}\|_{L^\infty(0,1)} &\leqslant C_2\|u_{N_0}\|^{\frac{5}{6}}_{L^2(0,1)}\|u_{N_0 x^3}\|^{\frac{1}{6}}_{L^2(0,1)} + C_2\|u_{N_0}\|_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant C_3 M_2^{\frac{5}{6}}\|u_{N_0 x^3}\|^{\frac{1}{6}}_{L^2(0,1)} + C_3 M_2;
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

$$\|u_{N_0 x}\|_{L^2(0,1)} \leqslant C_4 M_2^{\frac{2}{3}}\|u_{N_0 x^3}\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(0,1)} + C_4 M_2; \tag{4.4.16}$$

$$\|u_{N_0 x^2}\|_{L^2(0,1)} \leqslant C_5 M_2^{\frac{1}{3}}\|u_{N_0 x^3}\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(0,1)} + C_5 M_2. \tag{4.4.17}$$

把式 (4.4.15)–(4.4.17) 代入式 (4.4.14), 利用 Young 不等式, 得到

$$\frac{d}{dt}\|u_{N_0 x}\|^2_{L^2(0,1)} + a_1\|u_{N_0 x^3}\|^2_{L^2(0,1)} + a_2\|u_{N_0 x^2}\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_6(M_2). \tag{4.4.18}$$

式 (4.4.18) 两端在 $[0, \omega]$ 上积分, 利用积分中值定理, 存在 $t_2 \in [0, \omega]$ 使得

$$\|u_{N_0 x^3}(\cdot, t_2)\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{C_6(M_2)}{a_1}. \tag{4.4.19}$$

由式 (4.4.16) 和式 (4.4.19), 知

$$\|u_{N_0x}(\cdot,t_2)\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_7(M_2). \tag{4.4.20}$$

再对式 (4.4.18) 两端在 $[t_2, t+\omega](\forall t\in[0,\omega])$ 上积分, 则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{N_0x}\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_8(M_2). \tag{4.4.21}$$

因为 $H^1(0,1)$ 嵌入 $C[0,1]$, 成立

$$\|u_{N_0}(\cdot,t)\|_{C[0,1]} \leqslant C_9\|u_{N_0}\|_{H^1(0,1)} \leqslant C_{10}(M_2),\quad t\in[0,\omega]. \tag{4.4.22}$$

式 (4.4.5) 两端同乘以 $\lambda_j^4\alpha_{N_0j}(t)$, 并对 $j=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 通过分部积分, 利用 Hölder 不等式和引理 4.4.2, 并注意到式 (4.4.22), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{N_0x^4}\|^2_{L^2(0,1)} + a_1\|u_{N_0x^6}\|^2_{L^2(0,1)} + a_2\|u_{N_0x^5}\|^2_{L^2(0,1)}\\&=(F(u_{N_0})_{x^4}+G(u_{N_0})_{xx}+f_{xx}, u_{N_0x^6})\\&\leqslant C_{11}(C_{10}(M_2))^{\rho_1}\|u_{N_0}\|_{H^4(0,1)}\|u_{N_0x^6}\|_{L^2(0,1)}\\&\quad+\|f_{xx}\|_{L^2(0,1)}\|u_{N_0x^6}\|_{L^2(0,1)}.\end{aligned} \tag{4.4.23}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 插值定理, 得

$$\|u_{N_0x^4}\|_{L^2(0,1)} \leqslant C_{12}M_2^{\frac{1}{3}}\|u_{N_0x^6}\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(0,1)} + C_{12}M_2. \tag{4.4.24}$$

由式 (4.4.23), (4.4.24) 和利用 Young 不等式, 推出

$$\frac{d}{dt}\|u_{N_0x^4}\|^2_{L^2(0,1)} + a_1\|u_{N_0x^6}\|^2_{L^2(0,1)} + 2a_2\|u_{N_0x^5}\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_{13}(M_2). \tag{4.4.25}$$

类似于前面的方法, 由式 (4.4.25) 可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{N_0x^4}\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_{14}(M_2). \tag{4.4.26}$$

由式 (4.4.7) 和式 (4.4.26) 知

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{N_0}\|^2_{H^4(0,1)} \leqslant C_{15}(M_2),\quad \sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{N_0}\|_{C^3[0,1]} \leqslant C_{16}(M_2). \tag{4.4.27}$$

式 (4.4.5) 两端同乘以 $\alpha'_{N_0j}(t)$, 并对 $j=1,2,\cdots,N_0$ 求和, 利用 Cauchy 不等式和引理 4.4.2, 同时注意到式 (4.4.22), (4.4.27), 推得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{N_0t}\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_{17}(M_2). \tag{4.4.28}$$

式 (4.4.5) 两端对 t 求导, 于是

$$(u_{N_0tt} + a_1 u_{N_0x^4t} - a_2 u_{N_0x^2t}, y_j) = (F(u_{N_0})_{xxt} + G(u_{N_0})_t + f_t, y_j),$$
$$j = 1, 2, \cdots, N_0. \tag{4.4.29}$$

式 (4.4.29) 两端同乘以 $\lambda_j^2 \alpha'_{N_0j}(t)$, 并对 $j = 1, 2, \cdots, N_0$ 求和, 利用分部积分和 Hölder 不等式, 注意到式 (4.4.27), 可知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{N_0x^2t}\|^2_{L^2(0,1)} + a_1\|u_{N_0x^4t}\|^2_{L^2(0,1)} + a_2\|u_{N_0x^3t}\|^2_{L^2(0,1)} \\
=&(F(u_{N_0})_{xxt} + G(u_{N_0})_t + f_t, u_{N_0x^4t}) \\
=&\int_0^1 \{F'''(u_{N_0})u^2_{N_0x}u_{N_0t} + 2F''(u_{N_0})u_{N_0x}u_{N_0xt} + F''(u_{N_0})u_{N_0t}u_{N_0xx} \\
&+ F'(u_{N_0})u_{N_0xxt} + G'(u_{N_0})u_{N_0t} + f_t\}u_{N_0x^4t}dx \\
\leqslant& C_{18}(M_2)\int_0^1 (|u_{N_0t}| + |u_{N_0xt}| + |u_{N_0xxt}| + |f_t|)|u_{N_0x^4t}|dx \\
\leqslant& C_{18}(M_2)(\|u_{N_0t}\|_{L^2(0,1)} + \|u_{N_0xt}\|_{L^2(0,1)} \\
&+ \|u_{N_0xxt}\|_{L^2(0,1)} + \|f_t\|_{L^2(0,1)})\|u_{N_0x^4t}\|_{L^2(0,1)}.
\end{aligned} \tag{4.4.30}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理, 有

$$\begin{aligned}
&\|u_{N_0xt}\|_{L^2(0,1)} \leqslant C_{19}\|u_{N_0t}\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(0,1)}\|u_{N_0x^4t}\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(0,1)} + C_{19}\|u_{N_0t}\|_{L^2(0,1)}, \\
&\|u_{N_0xxt}\|_{L^2(0,1)} \leqslant C_{20}\|u_{N_0t}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,1)}\|u_{N_0x^4t}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,1)} + C_{20}\|u_{N_0t}\|_{L^2(0,1)}.
\end{aligned} \tag{4.4.31}$$

把式 (4.4.31) 代入式 (4.4.30), 并利用 Young 不等式, 得到

$$\frac{d}{dt}\|u_{N_0x^2t}\|^2_{L^2(0,1)} + a_1\|u_{N_0x^4t}\|^2_{L^2(0,1)} + 2a_2\|u_{N_0x^3t}\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_{21}(M_2). \tag{4.4.32}$$

利用前面的方法, 由式 (4.4.32) 可推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant \omega} \|u_{N_0xxt}(\cdot, t)\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_{22}(M_2). \tag{4.4.33}$$

由式 (4.4.27), 式 (4.4.28) 和式 (4.4.33), 可知估计 (4.4.13) 成立. □

利用上面的方法, 可以证明下述引理.

引理 4.4.4 假定引理 4.4.3 的条件及下面的条件成立:

(1) $F \in C^6(\mathbb{R}), F^{(4)}(0) = 0; G \in C^4(\mathbb{R}), G''(0) = 0$.

(2) $f \in C_\omega(\mathbb{R}; H^4[0,1]), f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t) = 0; f_t \in C_\omega(\mathbb{R}; H^3(0,1) \cap H^1_0(0,1))$,

$$f_{txx}(0,t) = f_{txx}(1,t) = 0, M = \sup_{0\leqslant t\leqslant \omega}(\|f\|_{H^4(0,1)} + \|f_t\|_{H^3(0,1)}),$$

则近似解 $u_{N_0}(x,t)$ 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}(\|u_{N_0tt}(\cdot,t)\|^2_{H^1(0,1)}+\|u_{N_0t}(\cdot,t)\|^2_{H^5(0,1)}+\|u_{N_0}(\cdot,t)\|^2_{H^6(0,1)})\leqslant C_{23}(M). \tag{4.4.34}$$

4.4.3 问题 (4.4.1)–(4.4.3) 解的存在性和唯一性

定理 4.4.1 在引理 4.4.3 的条件下, 问题 (4.4.1)–(4.4.3) 存在广义时间周期解

$$u(x,t)\in L^2_\omega(\mathbb{R};H^4[0,1]),\quad u_t(x,t)\in L^2_\omega(\mathbb{R};H^2[0,1]) \tag{4.4.35}$$

和满足

$$\int_0^\omega\int_0^1\{u_t+a_1u_{x^4}-a_2u_{xx}-F(u)_{xx}-G(u)-f\}\phi dxdt=0,\quad \forall\phi\in L^2_\omega(\mathbb{R};L^2(0,1)). \tag{4.4.36}$$

特别地, 当 M_2 充分小时, 上述广义解是唯一的.

证明 由式 (4.4.13) 和 Sobolev 嵌入定理知道, 下面的估计成立

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}(\|u_{N_0t}(\cdot,t)\|_{C^1[0,1]}+\|u_{N_0}(\cdot,t)\|_{C^3[0,1]})\leqslant C_{24}(M_2). \tag{4.4.37}$$

由 Ascoli-Arzelá 定理和式 (4.4.37) 知道, 存在函数 $u(x,t)$ 和 $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 的子序列, 仍记为 $\{u_{N_0}(x,t)\}$, 使得当 $N_0\to\infty$ 时, $\{u_{N_0x^i}(x,t)\}(i=0,1)$ 在 $[0,\omega]\times[0,1]$ 上一致收敛于 $u_{x^i}(x,t)(i=0,1)$. 利用式 (4.4.13) 推出当 $N_0\to\infty$ 时, 子序列 $\{u_{N_0x^i}(x,t)\}(i=2,3,4)$ 和 $\{u_{N_0x^it}(x,t)\}(i=0,1,2)$ 在 $L^2_\omega(\mathbb{R};L^2(0,1))$ 中分别弱收敛于 $u_{x^i}(x,t)(i=2,3,4)$ 和 $u_{x^it}(x,t)(i=0,1,2)$. 由式 (4.4.13) 看出

$$\|u_{N_0}\|_{L^2_\omega(\mathbb{R};H^4(0,1))}\leqslant C_{25}(M_2)\omega,\quad \|u_{N_0t}\|_{L^2_\omega(\mathbb{R};H^2(0,1))}\leqslant C_{25}(M_2)\omega. \tag{4.4.38}$$

显然

$$H^4(0,1)\hookrightarrow H^3(0,1)\hookrightarrow H^2(0,1),$$

且 $H^4(0,1)\hookrightarrow H^3(0,1)$ 是紧的. 记

$$W=\{u|u\in L^2_\omega(\mathbb{R};H^4(0,1)),\ u_t\in L^2_\omega(\mathbb{R};H^2(0,1))\}.$$

由 Aubin 引理知, $W\hookrightarrow L^2_\omega(\mathbb{R};H^3(0,1))$ 是紧的. 利用定理的假设条件和式 (4.4.38) 看出, 存在 $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 的子序列, 仍记为 $\{u_{N_0}(x,t)\}$, 使得当 $N_0\to\infty$ 时, $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 在 $L^2_\omega(\mathbb{R};H^3(0,1))$ 中收敛.

根据上述子序列的收敛性, $\{F(u_{N_0})_{xx}\}$ 在 $L^2_\omega(\mathbb{R};L^2(0,1))$ 中弱收敛于 $F(u)_{xx}$. 事实上, 对任意的 $\omega\in L^2_\omega(\mathbb{R};L^2(0,1))$ 有

$$\left|\int_0^\omega(F(u_{N_0})_{xx}-F(u)_{xx},\omega)dt\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^\omega \int_0^1 \{|F''(u_{N_0}) - F''(u)|u_{N_0x}^2 + |F''(u)||u_{N_0x} - u_x||u_{N_0x} + u_x| \\
&\quad + |F'(u_{N_0}) - F'(u)||u_{N_0x}| + |F'(u)||u_{N_0xx} - u_{xx}|\}|\omega|dxdt \\
&\leqslant \int_0^\omega \int_0^1 \{|F'''(u_{N_0} + \theta_1(u - u_{N_0}))||u - u_{N_0}|u_{N_0x}^2 \\
&\quad + |F''(u)||u_{N_0x} - u_x|(|u_{N_0x}| + |u_x|) \\
&\quad + |F''(u_{N_0} + \theta_2(u - u_{N_0}))||u - u_{N_0}||u_{N_0x}| \\
&\quad + |F'(u)||u_{N_0xx} - u_{xx}|\}|\omega|dxdt,
\end{aligned} \tag{4.4.39}
$$

其中 $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ 是常数.

注意到式 (4.4.37) 及 $u, u_x \in C([0,\omega] \times [0,1])$, 由式 (4.4.39) 可知

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^\omega \int_0^1 (F(u_{N_0})_{xx} - F(u)_{xx})\omega dxdt\right| \\
&\leqslant C_{26}(M_2) \int_0^\omega \int_0^1 \{|u_{N_0} - u| + |u_{N_0x} - u_x| + |u_{N_0xx} - u_{xx}|\}|\omega|dxdt \\
&\leqslant C_{26}(M_2)(\|u_{N_0} - u\|_{L^2((0,\omega)\times(0,1))} + \|u_{N_0x} - u_x\|_{L^2((0,\omega)\times(0,1))} \\
&\quad + \|u_{N_0xx} - u_{xx}\|_{L^2((0,\omega)\times(0,1))})\|\omega\|_{L^2((0,\omega)\times(0,1))}.
\end{aligned} \tag{4.4.40}
$$

由式 (4.4.40) 知, 存在子序列 $\{u_{N_0}(x,t)\}$ 使得当 $N_0 \to \infty$ 时, $\{F(u_{N_0})_{xx}\}$ 在 $L^2_\omega(\mathbb{R}; L^2(0,1))$ 中弱收敛于 $F(u)_{xx}$.

因而问题 (4.4.1)–(4.4.3) 存在广义的时间周期解 $u(x,t)$, 并且满足式 (4.4.35) 和式 (4.4.36).

由式 (4.4.13) 还知道

$$
\|u\|_{C([0,\omega]\times[0,1])} \leqslant C_{27}(M_2), \quad \|u_x\|_{C([0,\omega]\times[0,1])} \leqslant C_{27}(M_2). \tag{4.4.41}
$$

下面证明解的唯一性. 假设 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是问题 (4.4.1)–(4.4.3) 的两个广义时间周期解.

令

$$
w(x,t) = u(x,t) - v(x,t),
$$

则 $w(x,t)$ 满足时间周期问题

$$
w_t + a_1 w_{x^4} - a_2 w_{xx} = F(u)_{xx} - F(v)_{xx} + G(u) - G(v), \quad 0 < x < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.4.42}
$$

$$
w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad w_{xx}(0,t) = w_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.4.43}
$$

$$
w(x,t) = w(x,t+\omega), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.4.44}
$$

式 (4.4.42) 两端同乘以 $2w$, 在区间 $(0,1)$ 上积分和利用积分中值定理得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2(0,1)}^2+2a_1\|w_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2+2a_2\|w_x\|_{L^2(0,1)}^2\\&=2\int_0^1\{-F''(v+\theta_3(u-v))ww_x+G(v+\theta_4(u-v))w^2\}dx\\&\leqslant 2\int_0^1\{\|F''(v+\theta_3(u-v))\|_{L^2(0,1)}|w||w_x|+|G(v+\theta_4(u-v))|w^2\}dx,\end{aligned}\tag{4.4.45}$$

其中 $0<\theta_3,\theta_4<1$.

注意到式 (4.4.41) 和关于 $F(s)$ 与 $G(s)$ 的假定, 利用 Cauchy 不等式, 由式 (4.4.45), 有

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{L(0,1)}^2+2a_2\|w_x\|_{L^2(0,1)}^2\leqslant C_{28}(M_2)\|w_x\|_{L^2(0,1)}^2,\tag{4.4.46}$$

其中 $C_{28}(M_2)$ 是关于 M_2 的齐次多项式.

取 M_2 充分小, 使得 $L=2a_2-C_{28}(M_2)>0$ 和利用 Poincaré 不等式, 由式 (4.4.46) 得出

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{L(0,1)}^2\leqslant -L\|w\|_{L^2(0,1)}^2,\tag{4.4.47}$$

由此推出对任意的 $t>0$, 有

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2\leqslant\|w(\cdot,0)\|_{L^2(0,1)}^2e^{-Lt}.$$

对任意的 $t\in\mathbb{R}$, 都存在自然数 N_1, 使得 $t+N_1\omega>0$, 注意到 $w(x,t)$ 是 t 周期函数和

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2=\|w(\cdot,t+N_1\omega)\|_{L^2(0,1)}^2\leqslant\|w(\cdot,0)\|_{L^2(0,1)}^2e^{-LN_0\omega},\quad\forall N_0>N_1,$$

推知

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}=0,\quad t\in\mathbb{R}.$$

□

利用式 (4.4.34), Sobolev 嵌入定理和 Ascoli-Arzelá 定理可以证明下面的定理.

定理 4.4.2 在引理 4.4.4 的假定条件下, 问题 (4.4.1)–(4.4.3) 存在古典时间周期解 $u(x,t)$. 并且, 如果 M 充分小, 则此解是唯一的.

4.4.4 与本节内容有关的文献

本节的内容取材于文献 [294]. 与本节有关的文献见 [13], [53], [82], [236], [288]–[292].

4.5 关于人口问题中的一广义扩散模型的定解问题

4.5.1 引言

本节应用 Leray-Schauder 不动点定理和积分估计先证明包括一维方程 (4.3.1) 的抛物型方程

$$u_t = -a_1(x,t)u_{x^4} + a_2(x,t)u_{x^2} + (g(u))_{x^2} + f(u) \tag{4.5.1}$$

的周期边值问题

$$\left.\begin{aligned}&u(x+2l,t) = u(x,t),\\&u(x,0) = \varphi(x) \quad (-l \leqslant x \leqslant l)\end{aligned}\right\} \tag{4.5.2}$$

和 Cauchy 问题

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{4.5.3}$$

的整体广义解和整体古典解的存在性和唯一性; 然后证明方程 (4.5.1) 的初边值问题

$$\left.\begin{aligned}&u(-l,t) = u(l,t) = 0, u_x(-l,t) = u_x(l,t) = 0 \quad (t \geqslant 0),\\&u(x,0) = \varphi(x) \quad (-l \leqslant x \leqslant l)\end{aligned}\right\}, \tag{4.5.4}$$

初边值问题

$$\left.\begin{aligned}&u(-l,t) = u(l,t) = 0, u_{x^2}(-l,t) = u_{x^2}(l,t) = 0 \quad (t \geqslant 0),\\&u(x,0) = \varphi(x) \quad (-l \leqslant x \leqslant l)\end{aligned}\right\} \tag{4.5.5}$$

和方程

$$u_t = -a_1(t)u_{x^4} + a_2(x,t)u_{x^2} + (g(u))_{x^2} + f(u) \tag{4.5.6}$$

的初边值问题

$$\left.\begin{aligned}&u_x(-l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u_{x^3}(-l,t) = u_{x^3}(l,t) = 0 \quad (t \geqslant 0),\\&u(x,0) = \varphi(x) \quad (-l \leqslant x \leqslant l)\end{aligned}\right\} \tag{4.5.7}$$

的整体广义解的存在性和唯一性; 在 4.5.3 子节中讨论以上问题当 $t \to \infty$ 时解的渐近性质.

为了讨论上述问题, 应用引理 4.5.1 和引理 4.5.2 容易用 Galerkin 方法或参数延拓法和积分估计证明.

引理 4.5.1 设线性抛物型方程

$$u_t + A_1(x,t)u_{x^4} + A_2(x,t)u_{x^3} + A_3(x,t)u_{x^2} + A_4(x,t)u_x + A_5(x,t)u = f(x,t) \tag{4.5.8}$$

和周期边值条件 (4.5.2) 满足下列条件:

(1) 在 $Q_T = \{-l \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上 $A_1(x,t) \geqslant a_0 > 0$ 且有界, $A_i(x,t)$ $(i = 2,\cdots,5)$ 在 Q_T 上有界;

(2) 自由项 $f(x,t)$ 在 Q_T 上平方可积;

(3) 初值函数 $\varphi(x) \in W^{2,2}(-l,l)$;

(4) $A_i(x,t)$ $(i=1,\cdots,5), f(x,t)$ 和 $\varphi(x)$ 都是 x 的以 $2l$ 为周期的函数,

则周期边值问题 (4.5.8), (4.5.2) 有唯一解 $u(x,t) \in G = L^\infty((0,T); W^{2,2}(-l,l)) \cap W_2^{(4,1)}(Q_T)$ 且有估计

$$\begin{aligned}\|u\|_G^2 &= \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(\cdot,t)\|_{W^{2,2}(-l,l)}^2 + \|u_t\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|u_{x^4}\|_{L^2(Q_T)}^2 \\ &\leqslant c_1\{\|\varphi\|_{W^{2,2}(-l,l)}^2 + \|f\|_{L^2(Q_T)}^2\},\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

其中 c_1 是依赖于 a_0 和 $A_i(i=1,\cdots,5)$ 的常数.

推论 4.5.1　假定除满足引理 4.5.1 的条件外, 还满足条件:

(1) 系数函数的导数

$$D_t^s D_x^r A_i(x,t) \quad (i=1,\cdots,5, s\geqslant 0, r\geqslant 0\text{为自然数})$$

在 Q_T 上有界, 其中 $D_t = \dfrac{\partial}{\partial_t}$;

(2) 自由项函数的导数 $D_t^s D_x^r f(x,t) \in L^2(Q_T)(r\geqslant 0, s\geqslant 0)$;

(3) 初值函数 $\varphi(x) \in W^{4s+r+2,2}(-l,l)$,

则周期边值问题 (4.5.8), (4.5.3) 的解 $u(x,t)$ 有导数 $D_t^s D_x^r u(x,t) \in G$.

引理 4.5.2　设线性抛物型方程初边值问题 (4.5.8), (4.5.4); (4.5.8), (4.5.5) 和 (4.5.8), (4.5.7) 满足下列条件:

(1) 引理 4.5.1 的条件 1 和条件 2 成立;

(2) 初值函数 $\varphi(x) \in W^{2,2}(-l,l)$ 且与对应的边值条件满足相容性条件,

则初边值问题 (4.5.8), (4.5.4); (4.5.8), (4.5.5) 和 (4.5.8), (4.5.7) 存在唯一解 $u(x,t) \in G$ 且有估计 (4.5.9).

4.5.2　周期边值问题 (4.5.1), (4.5.2); 初值问题 (4.5.1), (4.5.3); 初边值问题 (4.5.1), (4.5.4);(4.5.1), (4.5.5) 和 (4.5.6), (4.5.7)

定理 4.5.1　设周期边值问题 (4.5.1), (4.5.2) 满足条件:

(1) 系数 $a_1(x,t)$ 在 Q_T 上对 x 有二阶连续偏导数且 $a_1(x,t) \geqslant a_0 > 0, a_2(x,t)$ 在 Q_T 上连续;

(2) 函数 $g(u)$ 二次连续可导, $\dfrac{\partial g(u)}{\partial u} \geqslant 0$ 且有 $|g(u)| \leqslant K|u|^3$,

$$\left|\frac{\partial g(u)}{\partial u}\right| \leqslant K|u|^2,$$

其中 $K>0$ 是常数;

(3) 函数 $f(u)$ 对 u 一次连续可导且 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 半有界, 即存在常数 b, 使得对于 $\forall u\in\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f(u)}{\partial u}\leqslant b$;

(4) 初值函数 $\varphi(x)\in W^{2,2}(-l,l)$;

(5) $a_1(x,t),a_2(x,t)$ 和 $\varphi(x)$ 都是 x 的以 $2l$ 为周期的函数,

则周期边值问题 (4.5.1), (4.5.2) 有唯一解 $u(x,t)\in G$.

证明 取 $S=\{u|u\in L^\infty(Q_T),u_x\in L^4(Q_T),u_{x^2}\in L^2(Q_T)\}$ 作为不动点定理论证的基本空间. 对于任意函数 $v\in S$, 由引理 4.5.1 知, 下列线性抛物型方程周期边值问题

$$u_t=-a_1(x,t)u_{x^4}+a_2(x,t)u_{x^2}+\lambda(g(v))_{x^2}+\lambda f(v), \tag{4.5.10}$$

$$u(x+2l,t)=u(x,t),\quad u(x,0)=\lambda\varphi(x) \tag{4.5.11}$$

有唯一解 $u(x,t)\in G\subset S$, 其中 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 由此定义了一个函数映射 $T_\lambda:S\mapsto S$.

设 M 是 S 的任一有界子集, 对于 $v\in M\subset S$ 和 $0\leqslant\lambda,\overline{\lambda}\leqslant 1$, 我们有 $u=T_\lambda v,\overline{u}=T_{\overline{\lambda}}v$. 函数 $w=u-\overline{u}$ 满足线性抛物型方程

$$w_t=-a_1(x,t)w_{x^4}+a_2(x,t)w_{x^2}+(\lambda-\overline{\lambda})g(v)_{x^2}+(\lambda-\overline{\lambda})f(v) \tag{4.5.12}$$

和周期边值条件

$$w(x+2l,t)=w(x,t),\quad w(x,0)=(\lambda-\overline{\lambda})\varphi(x). \tag{4.5.13}$$

因为方程 (4.5.12) 中的自由项在 Q_T 上平方可积, 所以由估计式 (4.5.9) 可得

$$\|u-\overline{u}\|_G\leqslant c_3|\lambda-\overline{\lambda}|,$$

其中 c_3 依赖于有界子集 $M\subset S,\varphi,f,g,a_1,a_2$, 因此, 对于任意有界子集 $M\subset S$, 映射 $T_\lambda:M\mapsto S$ 关于 λ 是一致连续的. 设 $u=T_\lambda v,\overline{u}=T_\lambda\overline{v}$, 则 $w=u-\overline{u}$ 满足方程

$$w_t=-a_1(x,t)w_{x^4}+a_2(x,t)w_{x^2}+\lambda(g(v)-g(\overline{v}))_{x^2}+\lambda(f(v)-f(\overline{v})) \tag{4.5.14}$$

和周期边值条件

$$w(x+2l,t)=w(x,t),\quad w(x,0)=0. \tag{4.5.15}$$

方程 (4.5.14) 与函数 w 相乘, 在 $Q_t=[-l,l]\times[0,t]$ 上积分并进行分部积分, 可得

$$\int_0^t\frac{d}{d\tau}\|w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(-l,l)}d\tau$$

$$= -2\int_0^t\int_{-l}^l\left(a_1 w_{x^2}+2\frac{\partial a_1}{\partial x}w_x+\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}w\right)w_{x^2}dxd\tau+2\int_0^t\int_{-l}^l a_2 w_{x^2}wdxd\tau$$
$$+2\lambda\int_0^t\int_{-l}^l\frac{\partial\tilde{g}}{\partial v}(v-\overline{v})w_{x^2}dxd\tau+2\lambda\int_0^t\int_{-l}^l\frac{\partial\tilde{f}}{\partial v}(v-\overline{v})wdxd\tau,$$

其中 $\frac{\partial\tilde{g}}{\partial v},\frac{\partial\tilde{f}}{\partial v}$ 表示相应导数在 v 与 $\overline{v}$ 之间取值. 由上式利用带 ε 的 Cauchy 不等式和内插公式

$$\|w_x\|_{L^2(-l.l)}\leqslant K_1\|w\|_{L^2(-l,l)}^{\frac{1}{2}}\|w\|_{W^{2,2}(-l,l)}^{\frac{1}{2}},$$

可得

$$\begin{aligned}
&\|w(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2+a_0\|w_{x^2}\|_{L^2(Q_t)}^2\\
\leqslant&\left\{5\left[\left(\max_{Q_T}\left|\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}\right|\right)^2+\left(\max_{Q_T}|a_2|\right)^2+4\left(\max_{Q_T}\left|\frac{\partial a_1}{\partial x}\right|\right)K_1^2\right]\Big/ a_0\right.\\
&\left.+500K_1^4\left(\max_{Q_T}\left|\frac{\partial a_1}{\partial x}\right|\right)^4\Big/ a_0^3+1\right\}\|w\|_{L^2(Q_t)}^2\\
&+\left[5\left\|\frac{\partial\tilde{g}}{\partial v}\right\|_{L^\infty(Q_T)}^2\Big/ a_0+b^2\right]\|v-\overline{v}\|_{L^2(Q_T)}^2.
\end{aligned}$$

于是由 Gronwall 不等式可推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}+\|w_{x^2}\|_{L^2(Q_T)}\leqslant c_4\|v-\overline{v}\|_{L^\infty(Q_T)},\tag{4.5.16}$$

其中常数 c_4 不依赖于 λ.

方程 (4.5.14) 乘以函数 w_{x^2}, 并在 Q_t 上积分, 易知

$$\begin{aligned}
&\|w_x(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2+a_0\|w_{x^3}\|_{L^2(Q_t)}^2\\
\leqslant&\left[2\left(\max_{Q_T}\left|\frac{\partial a_1}{\partial x}\right|\right)^2\Big/ a_0+2\max_{Q_T}|a_2|+1\right]\|w_{x^2}\|_{L^2(Q_T)}^2\\
&+(4\|g_v(v)\|_{L^\infty(Q_T)}^2/a_0)\|(v_x-\overline{v}_x)\|_{L^2(Q_T)}^2\\
&+\{[4\|\tilde{g}_{vv}(v)\|_{L^\infty(Q_T)}^2(\|v\|_{L^\infty(Q_T)}+\|\overline{v}\|_{L^\infty(Q_T)})\|\overline{v}_x\|_{L^4(Q_T)}^2]/a_0+b^2\}\|v-\overline{v}\|_{L^2(Q_T)}^2.
\end{aligned}$$

由上式, 式 (4.5.16) 和嵌入定理推出

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|w_x(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2+\|w_{x^3}\|_{L^2(Q_T)}^2\\
&\leqslant c_5(\|v-\overline{v}\|_{L^\infty(Q_T)}^2+\|v_x-\overline{v}_x\|_{L^4(Q_T)}^2),
\end{aligned}\tag{4.5.17}$$

其中 c_5 是不依赖于 λ 的常数.

由 Gagliardo-Nirenberg 插值定理, 式 (4.5.16) 和式 (4.5.17) 有

$$\begin{aligned}\|w_x\|_{L^4(Q_T)}^4 &= \int_0^T \|w_x(\cdot,t)\|_{L^4(-l,l)}^4 dt \\ &\leqslant c_6 \int_0^T \|w_x(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^3 (\|w_x(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2 + \|w_{x^2}(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leqslant c_7(\|v-\overline{v}\|_{L^\infty(Q_T)} + \|v_x - \overline{v}_x\|_{L^4(Q_T)})^4. \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

于是由式 (4.5.16)–(4.5.18) 推得 $\|w\|_s \leqslant c_8\|v-\overline{v}\|_s$. 所以对任意固定的 λ, 映射 $T_\lambda : S \mapsto S$ 是连续的. 由嵌入定理可知, 对于每一个 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, G 是紧嵌入 S 的, 因此 $T_\lambda : S \mapsto S$ 是全连续的.

当 $\lambda = 0$ 时, 周期边值问题 (4.5.10), (4.5.11) 有唯一解 $u(x,t) \equiv 0$.

现在作带参数 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 的非线性抛物型方程

$$u_t = -a_1(x,t)u_{x^4} + a_2(x,t)u_{x^2} + \lambda(g(u))_{x^2} + \lambda f(u) \tag{4.5.19}$$

的周期边值问题 (4.5.11) 所有可能解 $u(x,t)$ 在 S 中对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 的一致估计. 方程 (4.5.19) 乘以函数 u, 在 Q_t 上作积分, 利用分部积分得

$$\begin{aligned}&\int_0^t \frac{d}{d\tau}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(-l,l)}^2 d\tau \\ =& -2\int_0^t\int_{-l}^l \left(a_1(x,t)u_{x^2} + 2\frac{\partial a_1}{\partial x}u_x + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}u\right)dxd\tau + 2\int_0^t\int_{-l}^l a_2(x,t)u_{x^2}udxd\tau \\ &-2\lambda\int_0^t\int_{-l}^l g_u(u)u_x^2dxd\tau + 2\lambda\int_0^t\int_{-l}^l \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}u^2dxd\tau + 2\lambda\int_0^t\int_{-l}^l f(0)udxd\tau.\end{aligned}$$

利用带 ε 的 Cauchy 不等式和内插公式

$$\|u_x\|_{L^2(-l,l)} \leqslant K_2\|u\|_{L^2(-l,l)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{W^{2,2}(-l,l)}^{\frac{1}{2}}, \tag{4.5.20}$$

由式 (4.5.20) 可得

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2 + a_0\|u_{x^2}\|_{L^2(Q_t)}^2 \\ &\leqslant \left\{5\left(\max_{Q_T}|a_2|\right)^2 \Big/ a_0 + 500K_2^4\left(\max_{Q_T}\left|\frac{\partial a_1}{\partial x}\right|^2\right)^4 \Big/ a_0^3\right. \\ &\quad \left. +20K_2^2\left(\max_{Q_T}\left|\frac{\partial a_1}{\partial x}\right|\right)^2 + 5\left(\max_{Q_T}\left|\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}\right|\right)^2 \Big/ 2a_0 + 2|b| + 1\right\}\|u\|_{L^2(Q_t)}^2 \\ &\quad + \|f(0)\|_{L^2(Q_t)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(-l,l)}^2.\end{aligned}$$

再由 Gronwall 不等式可导出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2+\|u_{x^2}\|_{L^2(Q_T)}^2\leqslant c_9(\|f(0)\|_{L^2(Q_T)}^2+\|\varphi\|_{L^2(-l,l)}^2),\tag{4.5.21}$$

其中常数 c_9 不依赖于 λ.

方程 (4.5.19) 乘以 u_{x^2} 后, 在 Q_t 上积分, 利用分部积分推得

$$\begin{aligned}&\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2+2a_0\|u_{x^3}\|_{L^2(Q_t)}^2\\&\leqslant -2\int_0^t\int_{-l}^l\frac{\partial a_1}{\partial x}u_{x^3}u_{x^2}dxd\tau-2\int_0^t\int_{-l}^l a_2(x,t)u_{x^2}^2dxd\tau\\&\quad+2\lambda\int_0^t\int_{-l}^l\frac{\partial f}{\partial u}u_x^2dxd\tau+\|\varphi^{(1)}\|_{L^2(-l,l)}^2+2\lambda\int_0^t\int_{-l}^l\frac{\partial g}{\partial u}u_xu_{x^3}dxd\tau.\end{aligned}\tag{4.5.22}$$

估计 (4.5.22) 右端最后一项有估计

$$\begin{aligned}&\left|2\lambda\int_0^t\int_{-l}^l\frac{\partial g}{\partial u}u_xu_{x^3}dxd\tau\right|\\&\leqslant 2K\int_0^t\int_{-l}^l|u|^2|u_x||u_{x^3}|dxd\tau\\&\leqslant\frac{a_0}{2}\|u_{x^3}\|_{L^2(Q_t)}^2+\frac{2K^2}{a_0}\int_0^t\|u\|_{L^\infty(-l,l)}^4\|u_x\|_{L^2(-l,l)}^2d\tau.\end{aligned}\tag{4.5.23}$$

由式 (4.5.20), (4.5.21) 和内插公式

$$\|u\|_{L^\infty(-l,l)}\leqslant K_3\|u\|_{L^2(-l,l)}^{\frac34}\|u\|_{W^{2,2}(-l,l)}^{\frac14},\tag{4.5.24}$$

得

$$\begin{aligned}&\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2+a_0\|u_{x^3}\|_{L^2(Q_t)}^2\\&\leqslant 2\left[\left(\max_{Q_T}\left|\frac{\partial a_1}{\partial x}\right|\right)^2\Big/a_0+\max_{Q_T}|a_2|\right]\|u_{x^2}\|_{L^2(Q_T)}^2\\&\quad+[2K^2K_3^4K_4^2/a_0]\int_0^t\|u\|_{L^2(-l,l)}^4\|u\|_{W^{2,2}(-l,l)}^2d\tau\\&\quad+2|b|\int_0^t\|u_x\|_{L^2(-l,l)}^2d\tau+\|\varphi^{(1)}\|_{L^2(-l,l)}^2\\&\leqslant 2|b|\int_0^t\|u_x\|_{L^2(-l,l)}^2d\tau+c_{10},\end{aligned}\tag{4.5.25}$$

其中常数 c_{10} 与 λ 无关. 于是可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2+\|u_{x^3}\|_{L^2(Q_T)}^2\leqslant c_{11},\tag{4.5.26}$$

其中常数 c_{11} 与 λ 无关. 从内插公式, 式 (4.5.21) 和式 (4.5.26) 得

$$\|u_x\|_{L^4(Q_T)}^4 \leqslant c_{12}\int_0^T \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^3 \|u_x(\cdot,t)\|_{W^{1,2}(-l,l)}dt \leqslant c_{13}, \tag{4.5.27}$$

其中 c_{13} 与 λ 无关.

由式 (4.5.21), (4.5.26) 和式 (4.5.27) 可得问题 (4.5.10), (4.5.11) 的所有可能解在 S 中对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 的一致有界性. 根据 Leray-Schauder 不动点定理, 问题 (4.5.10), (4.5.11) 在 S 中有解 $u_\lambda(x,t)$ 存在, 因而在 $\lambda = 1$ 时, 即问题 (4.5.1), (4.5.2) 在 S 中也有解 $u(x,t)$, 由引理 4.5.1 可知, 此解 $u(x,t) \in G$.

现在证明问题 (4.5.1), (4.5.2) 的广义解 $u(x,t) \in G$ 是唯一的. 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是问题 (4.5.1), (4.5.2) 的两个广义解, 它们的差 $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ 满足积分关系:

$$\begin{aligned}\int_{Q_t} ww_t dxd\tau = &-\int_{Q_t} a_1 w_{x^4} wdxd\tau + \int_{Q_t} a_2 w_{x^2} wdxd\tau \\ &+ \int_{Q_t} (g(u_1) - g(u_2))_{x^2} wdxd\tau + \int_{Q_t} (f(u_1) - f(u_2))wdxd\tau\end{aligned}$$

和周期边值条件

$$w(x+2l,t) = w(x,t), \quad w(x,0) = 0.$$

于是有

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)}^2 + \|w_{x^2}\|_{L^2(Q_t)}^2 \leqslant c_{14}\int_0^t \|w\|_{L^2(-l,l)}^2 d\tau.$$

从而推得 $w(x,t) \equiv 0$, 所以 $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, 唯一性得证. □

推论 4.5.2 若 $a_1(x,t)$ 在 Q_T 上对 x 有直到五阶连续偏导数, $a_2(x,t)$ 在 Q_T 上对 x 有直到三阶连续偏导数, $g(u)$ 五次连续可导, $f(u)$ 三次连续可导, $\varphi(x) \in W^{5,2}(-l,l)$, 则周期边值问题 (4.5.1), (4.5.2) 的解 $u(x,t)$ 是古典解, 且

$$u, u_x, u_{x^2}, u_{x^3} \in G.$$

利用引理 4.5.1 易证如下定理.

定理 4.5.2 在定理 4.5.1 和它的推论的假定条件下, 周期边值问题 (4.5.1), (4.5.2) 的古典解是唯一的.

下面考虑区域 $Q_T^* = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上的 Cauchy 问题 (4.5.1), (4.5.3). 应用文献 [251], [293] 中从周期边值问题获得 Cauchy 问题解的类似方法, 可得如下定理.

定理 4.5.3 设以下条件成立:

(1) 系数 $a_1(x,t)$ 在 Q_T^* 上对 x 有二阶有界连续偏导数, 且 $a_1(x,t) \geqslant a_0 > 0$, $a_2(x,t)$ 在 Q_T^* 上连续有界;

(2) 函数 $g(u)$ 二次连续可导, $\dfrac{\partial g(u)}{\partial u} \geqslant 0$, 且成立不等式 $|g(u)| \leqslant K|u|^3$,

$$\left|\frac{\partial g(u)}{\partial u}\right| \leqslant K|u|^2,$$

其中 $K > 0$ 是常数;

(3) 函数 $f(u)$ 对 u 一次连续可导, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 半有界;

(4) 初值函数 $\varphi(x) \in W^{2,2}(\mathbb{R})$,

则 Cauchy 问题 (4.5.1), (4.5.3) 有唯一解 $u(x,t) \in G(Q_T^*) = L^\infty((0,T);W^{2,2}(\mathbb{R})) \cap W_2^{(4,1)}(Q_T^*)$, 其中

$$W_2^{(4,1)}(Q_T^*) = \left\{u \left| \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x^\alpha} \in L^2(Q_T^*), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T^*), 0 \leqslant |\alpha| \leqslant 4\right.\right\}$$

且当 $a_1(x,t)$ 在 Q_T^* 上对 x 有直到五阶的有界连续偏导数, $a_2(x,t)$ 在 Q_T^* 上对 x 有直到三阶的有界连续偏导数, $g(u)$ 五次连续可导, $f(u)$ 三次连续可导, $\varphi(x) \in W^{5,2}(\mathbb{R})$ 时, 则 Cauchy 问题 (4.5.1), (4.5.3) 有唯一的古典解, 同时

$$u, u_x, u_{x^2}, u_{x^3} \in G.$$

定理 4.5.4　假定初边值问题 (4.5.1), (4.5.4); (4.5.1), (4.5.5) 和初边值问题 (4.5.6), (4.5.7) 满足条件:

(1) 系数 $a_1(x,t)$ 在 Q_T 上对 x 有直到二阶连续偏导数, 且 $a_1(x,t) \geqslant a_0 > 0$(对于方程 (4.5.6) 只要求 $a_1(t)$ 在 Q_T 上连续且 $a_1(t) \geqslant a_0 > 0$), $a_2(x,t)$ 在 Q_T 上连续;

(2) 函数 $g(u)$ 三次连续可导, $\dfrac{\partial g(u)}{\partial u} \geqslant 0$, 且有 $|g(u)| \leqslant K|u|^3$,

$$\left|\frac{\partial g(u)}{\partial u}\right| \leqslant K|u|^2, \quad \left|\frac{\partial^2 g(u)}{\partial u^2}\right| \leqslant K|u|,$$

其中 $K > 0$ 是常数;

(3) 函数 $f(u)$ 一次连续可导, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 半有界 (对于初边值问题 (4.5.1), (4.5.4) 假定 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 半有界, 且 $|f(u)| \leqslant K|u|^8, K > 0$);

(4) 初值函数 $\varphi(x) \in W^{2,2}(-l,l)$, 且与对应的边值条件满足相容性条件,

则初边值问题 (4.5.1), (4.5.4);(4.5.1), (4.5.5) 和初边值问题 (4.5.6), (4.5.7) 存在唯一解 $u(x,t) \in G$.

证明　用类似于证明周期边值问题 (4.5.1), (4.5.2) 的方法可证初边值问题 (4.5.1), (4.5.5) 和初边值问题 (4.5.6), (4.5.7) 广义解的存在性和唯一性. 但是对

于初边值问题 (4.5.1), (4.5.4), 由于不能直接估计出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x\|_{L^2(-l,l)}$$

的一致有界性, 因此我们采用估计高阶导数一致有界性的办法来证明此问题. 取

$$S=\{u|u\in L^\infty(Q_T),u_x\in L^4(Q_T),u_{x^2}\in L^2(Q_T)\}$$

作为不动点论证的基本空间. 对于任意的函数 $v\in S$, 由引理 4.5.2 可知, 下列抛物型方程

$$u_t=-a_1(x,t)u_{x^4}+a_2(x,t)u_{x^2}+\lambda(g(v))_{x^2}+\lambda f(v) \tag{4.5.28}$$

的初边值问题

$$\left.\begin{aligned}&u(-l,t)=u(l,t)=0,\quad u_x(-l,t)=u_x(l,t)=0\quad(t\geqslant 0),\\&u(x,0)=\lambda\varphi(x)\quad(-l\leqslant x\leqslant l)\end{aligned}\right\} \tag{4.5.29}$$

有唯一解 $u(x,t)\in G\subset S$, 其中 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 由此定义了一个函数映射 $T_\lambda:S\mapsto S$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 容易证明对于任意有界子集 $M\subset S$, 映射 $T_\lambda:M\mapsto S$ 关于 λ 是一致连续的和对任意固定的 $\lambda,T_\lambda:S\mapsto S$ 是全连续的.

当 $\lambda=0$ 时, 初边值问题 (4.5.28),(4.5.29) 有唯一解 $u(x,t)\equiv 0$.

下面作带参数 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 的非线性抛物型方程

$$u_t=-a_1(x,t)u_{x^4}+a_2(x,t)u_{x^2}+\lambda(g(u))_{x^2}+\lambda f(u) \tag{4.5.30}$$

的初边值问题 (4.5.29) 所有可能解 $u(x,t)$ 在 S 中对 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 的一致估计.

方程 (4.5.30) 乘以函数 u 后, 在 Q_t 上作积分, 易得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(-l,l)}+\|u_{x^2}\|^2_{L^2(Q_T)}\leqslant c_{15}(\|f(0)\|^2_{L^2(Q_T)}+\|\varphi\|^2_{L^2(-l,l)}), \tag{4.5.31}$$

其中常数 c_{15} 不依赖于 λ. 方程 (4.5.30) 乘以函数 u_{x^4} 后, 在 Q_t 上积分, 可得

$$\begin{aligned}&\|u_{x^2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(-l,l)}+\frac{3}{2}a_0\|u_{x^4}\|^2_{L^2(Q_t)}\\&\leqslant\frac{6}{a_0}(\max_{Q_T}|a_2|)^2\|u_{x^2}\|^2_{L^2(Q_t)}+\frac{6}{a_0}\|(g(u))_{x^2}\|^2_{L^2(Q_t)}\\&\quad+\frac{6K^2}{a_0}\int_0^t\|u\|^{16}_{L^{16}(-l,l)}dt+\|\varphi^{(2)}\|^2_{L^2(-l,l)}.\end{aligned} \tag{4.5.32}$$

由内插公式

$$\|u\|_{L^\infty(-l,l)}\leqslant K_4\|u\|^{\frac{7}{8}}_{L^2(-l,l)}\|u\|^{\frac{1}{8}}_{W^{4,2}(-l,l)},$$

$$\|u_x\|_{L^4(-l,l)} \leqslant K_5\|u\|_{L^2(-l,l)}^{\frac{11}{16}}\|u\|_{W^{4,2}(-l,l)}^{\frac{5}{16}},$$

$$\|u_{x^2}\|_{L^2(-l,l)} \leqslant K_6\|u\|_{L^2(-l,l)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{W^{4,2}(-l,l)}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{L^{16}(-l,l)} \leqslant K_7\|u\|_{L^2(-l,l)}^{\frac{57}{64}}\|u\|_{W^{4,2}(-l,l)}^{\frac{7}{64}}$$

和 Young 不等式有

$$\begin{aligned}
&\|(g(u)_{x^2}\|_{L^2(Q_t)}^2 \\
\leqslant & 2K^2\left(\int_0^t \|u\|_{L^\infty(-l,l)}^2\|u_x\|_{L^4(-l,l)}^4 d\tau + \int_0^t \|u\|_{L^\infty(-l,l)}^4\|u_{x^2}\|_{L^2(-l,l)}^2 d\tau\right) \\
\leqslant & 2K^2K_4^2(K_5^4+K_4^2K_6^2)\int_0^t \|u\|_{L^2(-l,l)}^{\frac{9}{2}}\|u\|_{W^{4,2}(-l,l)}^{\frac{3}{2}} d\tau \\
\leqslant & \frac{186624K^8K_4^8}{a_0^6}(K_5^{16}+K_4^8K_6^8)\int_0^t \|u\|_{L^2(-l,l)}^{18} d\tau \\
& + \frac{a_0^2}{24}\int_0^t \|u\|_{W^{4,2}(-l,l)}^2 d\tau,
\end{aligned} \tag{4.5.33}$$

$$\begin{aligned}
&K^2\int_0^t \|u\|_{L^{16}(-l,l)}^{16} d\tau \\
\leqslant & K_7^{16}\int_0^t \|u\|_{L^2(-l,l)}^{\frac{57}{4}}\|u\|_{W^{4,2}(-l,l)}^{\frac{7}{4}} d\tau \\
\leqslant & \frac{a_0^2}{24}\|u\|_{W^{4,2}(Q_t)}^2 + \frac{(21)^7K^{16}K_7^{128}}{8a_0^{14}}\int_0^t \|u\|_{L^2(-l,l)}^{114} d\tau.
\end{aligned} \tag{4.5.34}$$

由式 (4.5.31),(4.5.32) 和式 (4.5.34) 推得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{x^2}(\cdot,t)\|_{L^2(-l,l)} + \|u_{x^4}\|_{L^2(Q_T)} \leqslant c_{16}, \tag{4.5.35}$$

其中常数 c_{16} 与 λ 无关.

方程 (4.5.30) 乘以 u_t, 并在 Q_T 上积分, 不难得到

$$\|u_t\|_{L^2(Q_T)} \leqslant c_{17}, \tag{4.5.36}$$

其中 c_{17} 不依赖于 λ, 于是由估计 (4.5.31),(4.5.35),(4.5.36) 和嵌入定理可得

$$\|u\|_s \leqslant c_{18}\|u\|_G \leqslant c_{19},$$

这里 c_{19} 不依赖于 λ. 根据 Leray-Schauder 不动点定理和引理 4.5.2 知问题 (4.5.1), (4.5.4) 有解 $u(x,t) \in G$.

用类似于证明周期边值问题广义解唯一性的方法可证问题 (4.5.1),(4.5.4) 广义解的唯一性. □

注 4.5.1 在引理 4.5.1 及其推论 4.5.1, 引理 4.5.2, 定理 4.5.1 及其推论, 定理 4.5.2, 定理 4.5.3 和定理 4.5.4 中对方程系数的假定可以减弱, 例如, 在定理 4.5.1 中, 如果 $a_1(x,t) \in L^\infty((0,T);W^{2,\infty}(-l,l)), a_2(x,t) \in L^\infty(Q_T)$, 其他的假定不变, 定理的结论仍成立. 对其余的引理和定理有类似的结果.

4.5.3 与本节内容有关的文献

本节的内容取材于文献 [295]. 与本节有关的文献见 [6], [288], [290], [293], [296].

4.6 Cahn-Hilliard 方程的初边值问题

4.6.1 引言

在物理、化学等学科中研究两相物质之间的相互扩散现象时, 提出了如下形式的四阶非线性抛物型方程 [297,298]

$$u_t + \gamma u_{x^4} = \varphi(u)_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{4.6.1}$$

其中 $u(x,t)$ 为两相物质之一的密度, $\gamma > 0$ 为迁移率, 本节假定它是一个常数, $\varphi(u) \equiv H'(u), H(u)$ 的典型形式是双井位势

$$H(u) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}\gamma_1 u^3 + \frac{1}{4}\gamma_2 u^4.$$

方程 (4.6.1) 是具有流量

$$J = -[\varphi(u) - \gamma u_{xx}]_x$$

的质量浓度的方程, 即方程 (4.6.1) 是一个空间变量的具常迁移率的 Cahn-Hilliard 方程.

显然,

$$H(u) = \int_0^u \varphi(s)ds.$$

我们考虑方程 (4.6.1) 在区域 $Q_T \equiv (0,1) \times (0,T)$ 上的初边值问题. 根据物理背景, 对方程 (4.6.1) 通常附加零流量边值条件

$$J|_{x=0,1} = -\varphi(u)_x + \gamma u_{xxx}|_{x=0,1} = 0,$$

其中

$$\varphi(u) = -u + \gamma_1 u^2 + \gamma_2 u^3, \quad \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \text{是常数}, \quad \gamma > 0,$$

自然边值条件

$$u_x|_{x=0,1} = 0,$$

以及初值条件

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{4.6.2}$$

由于 γ 为正常数, 显然可以把两个边值条件换成

$$u_x|_{x=0,1} = u_{xxx}|_{x=0,1} = 0. \tag{4.6.3}$$

初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 满足

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = \int_0^1 -\frac{\partial J}{\partial x}dx = 0.$$

因此总质量保持常数

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 u_0(x)dx = M, \quad t > 0.$$

注意规定质量为

$$\int_0^1 u_0(x)dx = M.$$

我们还研究下列维数 $N = 2,3$ 的初边值问题

$$u_t + \gamma\Delta^2 u = \Delta\varphi(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{4.6.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Delta u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.6.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.6.6}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N(N=2,3)$ 中具有光滑边界的有界区域和 $\boldsymbol{\nu}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位内法线方向.

4.6.2 初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 古典解的存在性与唯一性

下面以 $H(u)$ 为双井位势的典型情形来讨论问题 (4.6.1)–(4.6.3) 的古典解的存在性和唯一性. 这时

$$\varphi(u) = H'(u) = -u + \gamma_1 u^2 + \gamma_2 u^3.$$

记

$$H_E^2(0,1) = \{v \in H^2(0,1); v_x|_{x=0,1} = 0\},$$

$$H^{4,1}(Q_T) = \left\{v; \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(Q_T), \frac{\partial^i v}{\partial x^i} \in L^2(Q_T), 0 \leqslant i \leqslant 4\right\}.$$

容易用标准的 Picard 迭代方法得到时间局部解的存在性和唯一性. 因此, 对于任意的 $T>0$, 为了得到在 $[0,T]$ 上解的存在性, 需要作解 u 的先验估计.

定理 4.6.1 如果 $\gamma_2>0$, 则对任意初值 $u_0 \in H_E^2(0,1)$ 和 $T>0$, 则初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 存在唯一整体解 $u \in H^{4,1}(Q_T)$. 此外, 若 $u_0 \in H^6(0,1) \cap H_E^2(0,1)$ 和 $u_{0xx} \in H_E^2(0,1)$, 则解还是古典的.

证明 首先作一些先验估计. 方程 (4.6.1) 两端同乘以 u, 然后在 (0,1) 上关于 x 积分, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \gamma\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \varphi'(u(x,t))u_x^2(x,t)dx = 0. \tag{4.6.7}$$

因为 $\gamma_2>0$, 经简单计算看出

$$\varphi'(u) = 3\gamma_2 u^2 + 2\gamma_1 u - 1 \geqslant -\frac{\gamma_1^2}{3\gamma_2} - 1 = -C_0, \quad C_0>0. \tag{4.6.8}$$

由式 (4.6.8) 推出

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \gamma\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant C_0\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant C_0\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant \frac{\gamma}{2}\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{C_0^2}{2\gamma}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2.
\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

利用 Gronwanll 不等式, 得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|u_0\|_{L^2(0,1)}^2 e^{C_0^2 T/\gamma}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.6.10}$$

$$\int_0^t \|u_{xx}(\cdot,\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 dx \leqslant \frac{\|u_0\|_{L^2(0,1)}^2}{\gamma} e^{C_0^2 T/\gamma}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4.6.11}$$

这里和以下, 常用 C_T 表示依赖于 T 的常数, 但不依赖于 u. 常用 C 表示有可能取不同值的常数.

定义

$$F(t) = \int_0^1 \left(H(u(x,t)) + \frac{\gamma}{2}u_x^2(x,t)\right)dx. \tag{4.6.12}$$

求导数

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^1 \left(\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u_x u_{xt}\right)dx. \tag{4.6.13}$$

经分部积分, 并应用方程 (4.6.1) 和边值条件 (4.6.3) 可知

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \int_0^1 [\varphi(u)(-\gamma u_{xxxx} + \varphi_{xx}) - \gamma u_{xx}(-\gamma u_{xxxx} + \varphi_{xx})]dx \\ &= -\int_0^1 \left(\gamma^2 u_{xxx}^2 - 2\gamma u_{xxx}\varphi_x + \varphi_x^2\right) dx \\ &= -\int_0^1 (\gamma u_{xxx} - \varphi_x)^2 \, dx \leqslant 0.\end{aligned}$$

因此

$$F(t) \leqslant F(0) = \int_0^1 \left(H(u_0) + \frac{\gamma}{2}u_{0x}^2\right) dx. \tag{4.6.14}$$

由 Young 不等式

$$u^2 \leqslant \varepsilon u^4 + C_{1\varepsilon}, \quad |u^3| \leqslant \varepsilon u^4 + \varepsilon_{2\varepsilon},$$

式 (4.6.12),(4.6.14) 和式 (4.6.10), 有

$$\int_0^1 \left(H(u) + \frac{\gamma}{2}(u_x)^2\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\gamma_2}{4}u^4 + \frac{\gamma_1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma}{2}u_x^2\right) dx \leqslant F(0),$$

从而

$$\frac{\gamma}{2}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\gamma_2}{2}\left(\int_0^1 u^4(x,t)dx + \int_0^1 u^2(x,t)dx\right) \leqslant C_3 + F(0) = C. \tag{4.6.15}$$

根据 Sobolev 嵌入定理, 由式 (4.6.10) 和式 (4.6.15) 推得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant C_T, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.6.16}$$

方程 (4.6.1) 两端同乘以 u_{xxxx} 后, 在 (0,1) 上对 x 积分, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 + \gamma\|u_{xxxx}\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \int_0^1 \varphi(u)_{xx} u_{xxxx} dx \\ &= \int_0^1 \varphi'(u) u_{xx} u_{xxxx} dx + \int_0^1 \varphi''(u) u_x^2 u_{xxxx} dx,\end{aligned} \tag{4.6.17}$$

其中

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= 3\gamma_2 u^2 + 2\gamma_1 u - 1, \\ \varphi''(u) &= 6\gamma_2 u + 2\gamma_1.\end{aligned}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理知

$$\|u_x\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant C(\|u_{xxxx}\|_{L^2(0,1)}^{3/8}\|u\|_{L^2(0,1)}^{5/8} + \|u\|_{L^2(0,1)}). \tag{4.6.18}$$

应用式 (4.6.15) 和 (4.6.16) 易见

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \varphi'(u)u_{xx}u_{xxxx}dx\right| \\
\leqslant\ & C(\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)}^2 + \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)}\| + 1)\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}\|u_{xxxx}\|_{L^2(0,1)} \\
\leqslant\ & \frac{\gamma}{4}\|u_{xxxx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + C\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2,
\end{aligned} \tag{4.6.19}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \varphi''(u)u_x^2u_{xxxx}dx\right| \leqslant\ & C(\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} + 1)\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)}\|u_x(\cdot,x)\|_{L^2(0,1)} \\
& \times \|u_{xxxx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \\
\leqslant\ & C_T\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}\|u_{xxxx}\|_{L^2(0,1)} \\
\leqslant\ & C_T(\|u_{xxxx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^{3/8} + 1)\|u_{xxxx}\|_{L^2(0,1)} \\
\leqslant\ & \frac{\gamma}{4}\|u_{xxxx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + C_T.
\end{aligned} \tag{4.6.20}$$

由式 (4.6.17), (4.6.19) 和式 (4.6.20) 推得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \gamma\|u_{xxxx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
\leqslant\ & \left|\int_0^1 \varphi'(u)u_{xx}u_{xxxx}dx\right| + \left|\int_0^1 \varphi''(u)u_x^2u_{xxxx}dx\right| \\
\leqslant\ & \frac{\gamma}{2}\|u_{xxxx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + C_T(\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + 1).
\end{aligned}$$

于是

$$\frac{d}{dt}\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_{xxxx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leqslant C_T(\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 + 1). \tag{4.6.21}$$

Gronwall 不等式给出

$$\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leqslant C_T, \quad \forall t \in [0,T], \tag{4.6.22}$$

$$\int_0^t \|u_{xxxx}(\cdot,\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \leqslant C_T, \quad t \in [0,T]. \tag{4.6.23}$$

方程 (4.6.1) 两端同乘以 u_t 后, 在 $(0,1)\times(0,T)$ 上积分, 应用式 (4.6.16) 和式 (4.6.18) 得到

$$\int_0^T\int_0^1 u_t^2dxdt = -\int_0^T\int_0^1 u_{xxxx}u_tdxdt$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T\int_0^1\{(3\gamma_2u^2+2\gamma_1u-1)u_{xx}+(3\gamma_2u+2\gamma_1)u_x^2\}u_tdxdt\\
\leqslant&\frac{1}{4}\|u_t\|^2_{L^2(Q_T)}+C_T\|u_{xxxx}\|^2_{L^2(Q_T)}+\frac{1}{4}\|u_t\|^2_{L^2(Q_T)}\\
&+C_T\|u_{xx}\|^2_{L^2(Q_T)}+\frac{1}{4}\|u_t\|^2_{L^2(Q_T)}+C_T\|u_x\|^4_{L^2(Q_T)}. \qquad (4.6.24)
\end{aligned}
$$

由式 (4.6.10), 式 (4.6.22) 和 Sobolev 嵌入定理有

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{C[0,1]}\leqslant C_T. \qquad (4.6.25)$$

将式 (4.6.11),(4.6.23) 和式 (4.6.25) 代入式 (4.6.24) 得

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(Q_T)}\leqslant C_T. \qquad (4.6.26)$$

由式 (4.6.10),(4.6.23) 和式 (4.6.26) 知, 初边值问题存在整体解 $u\in H^{4,1}(Q_T)$.

现在证明解的唯一性.

设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 为初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 的两个解. 令 $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$, 则 $u(x,t)$ 满足下列初边值问题

$$u_t+\gamma u_{xxxx}=\varphi(u_1)_{xx}-\varphi(u_2)_{xx},\quad 0<x<1,\quad t>0, \qquad (4.6.27)$$

$$u(x,0)=0,\quad 0<x<1, \qquad (4.6.28)$$

$$u_x|_{x=0,1}=u_{xxx}|_{x=0,1}=0,\quad t>0, \qquad (4.6.29)$$

其中

$$
\begin{aligned}
\varphi(u_1)_{xx}-\varphi(u_2)_{xx}=&-u_{xx}+\{u_{xx}(u_1+u_2)+2u_x(u_1+u_2)_x+x(u_1+u_2)_{xx}\}\\
&+\{u_{xx}(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)+2u_x(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)_x\\
&+u(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)_{xx}\}. \qquad (4.6.30)
\end{aligned}
$$

方程 (4.6.27) 两端同乘以 $u(x,t)$, 并在 (0,1) 上对 x 积分, 经分部积分, 并注意到式 (4.6.16) 和式 (4.6.25) 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}+2\gamma\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}\\
=&2\int_0^1[\varphi(u_1)_{xx}-\varphi(u_2)_{xx}]udx\\
\leqslant&\gamma\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}+C\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}. \qquad (4.6.31)
\end{aligned}
$$

由 Gagliardo-Nirenberg 插值定理知

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}\leqslant C\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,1)}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{W^{2,2}(0,1)}. \qquad (4.6.32)$$

将式 (4.6.32) 代入式 (4.6.31), 并应用带 ε 的 Cauchy 不等式, 有

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2+\frac{\gamma}{2}\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2\leqslant C\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2. \tag{4.6.33}$$

Gronwall 不等式给出 $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}=0$, 解的唯一性证毕.

下面讨论解的正则性.

因为 $u\in H^{4,1}(Q_T)$, 所以

$$u_x\in L^\infty(Q_T),\quad u_{xx}\in L^2((0,T);L^\infty(0,1)). \tag{4.6.34}$$

利用式 (4.6.34), 直接计算可知

$$f(x,t)\equiv\varphi(u(x,t))_{xx}=(3\gamma_2u^2+2\gamma u-1)u_{xx}+(6\gamma_2u+2\gamma_1)u_x^2, \tag{4.6.35}$$
$$f(x,t)_x\in L^2(Q_T),\quad f(x,t)_{xx}\in L^2(Q_T).$$

为了证明初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 存在古典解, 考虑初边值问题

$$v_t+\gamma v_{xxxx}=f, \tag{4.6.36}$$

$$v_t|_{x=0,1}=v_{xxx}|_{x=0,1}=0,\quad v|_{t=0}=v_0, \tag{4.6.37}$$

其中 $v_0\in H_E^2(0,1)$, 则当 $f\in L^2((0,T);L^2(0.1))$ 时, 初边值问题 (4.6.36),(4.6.37) 存在唯一解 $v\in H^{4,1}(Q_T)$(见 [22]). 取 $f(x,t)=\varphi(u)_{xxx}, v_0=u_{0x}$, 则

$$v=u_x\in H^{4,1}(Q_T). \tag{4.6.38}$$

取 $f(x,t)=\varphi(u)_{xxxx}, v_0=u_{0xxx}$, 则

$$v=u_{xx}\in H^{4,1}(Q_T). \tag{4.6.39}$$

从而 $f=\varphi_{xxt}\in L^2(Q_T)$. 若假定 $u_{0xxxxx}|_{x=0,1}=0$, 则

$$v_0=-\gamma u_{0xxxx}+\varphi(u_0)_{xx}\in H_E^2(0,1). \tag{4.6.40}$$

由 Sobolev 嵌入定理知, $u_t\in C(\bar{Q}_T)$, 从而 $u_{xxxx}\in C(\bar{Q}_T)$, 这表明 $u(x,t)$ 是初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 的古典解. □

4.6.3 初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 解的爆破

在定理 4.6.1 中, 假定了方程 (4.6.1) 的系数 γ_2 是正常数. 如果去掉这一条件, 定理的结论就可能不正确. 换言之, 当 $\gamma_2<0$ 时, 初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 的解可能会在有限时刻发生爆破现象.

定理 4.6.2　设 u_0 不恒等于 0, 则存在依赖于 u_0 的常数

$$K = 1 + \frac{\gamma_1^4 + \int_0^1 (2\gamma|u_{ox}| + 2|\gamma_1||u_0|^3)dx}{\int_0^1 u_0^4 dx} > 0,$$

使得当 $\gamma_2 < -K$ 时, 初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 的解在有限时刻爆破, 即存在时刻

$$T^* = -\frac{4}{\gamma_2 \|w(x,0)_x\|_{L^2(0,1)}^2} > 0,$$

使得

$$\lim_{T \to T^{*-}} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} = \infty.$$

证明　不失一般性, 假定

$$\int_0^1 u_0(x)dx = 0.$$

如若不然, 可以考虑 $v = u - M$ 所满足的方程, 其中 $M = \int_0^1 u_0(x)dx$. 由定理 4.6.1 的证明可知式 (4.6.14) 仍成立. 从而有

$$2\int_0^1 H(u)dx - 2F(0) \leqslant -\gamma \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}^2, \tag{4.6.41}$$

其中

$$F(0) = \int_0^1 \left(H(u_0) + \frac{\gamma}{2}|u_{0x}|^2 \right) dx.$$

取函数 w, 使得

$$\begin{aligned} &w_{xx} = u, \\ &w_x|_{x=0,1} = 0, \\ &\int_0^1 w dx = 0. \end{aligned} \tag{4.6.42}$$

因为由方程 (4.6.1) 易知

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 u_0(x)dx = 0.$$

所以这样的函数是唯一存在的. 由 Poincaré 不等式推出它满足

$$\|w_x\|_{L^2(0,1)}^2 \leqslant \|u\|_{L^2(0,1)}^2. \tag{4.6.43}$$

方程 (4.6.1) 两端同乘以 w, 在 (0,1) 上对 x 积分和应用式 (4.6.42), 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|w_x\|_{L^2(0,1)}^2 &= -2\int_0^1 \varphi(u)udx - 2\gamma\|w_x\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\geqslant 4\int_0^1 H(u)dx - 4F(0) - 2\int_0^1 \varphi(u)udx \\ &= -\gamma_2\int_0^1 u^4dx - \frac{2}{3}\gamma_1\int_0^1 u^3dx - 4F(0) \\ &\geqslant -\frac{\gamma_2}{4}\int_0^1 u^4dx - 4F(0) - C_1 \\ &\geqslant -\frac{\gamma_2}{4}\left(\int_0^1 u^4dx\right)^2 - 4F(0) - C_1,\end{aligned} \tag{4.6.44}$$

其中 $C_1 = \dfrac{4\gamma_1^4}{81\gamma_2^3}$. 将式 (4.6.43) 代入式 (4.6.44) 可见

$$\frac{d}{dt}\|w_x\|_{L^2(0,1)}^2 \geqslant \frac{\gamma_2}{4}\|w_x\|_{L^2(0,1)}^4 - 4F(0) - C_1.$$

因为

$$-4F(0) = \int_0^1 \left(-\gamma_2 u_0^4 + 2u_0^2 - \frac{4}{3}\gamma_1 u_0^2 - 2\gamma|u_{0x}|^2\right)dx,$$

所以只需取

$$-\gamma_2 \geqslant 1 + \frac{\gamma_1^4 + \displaystyle\int_0^1 (2\gamma|u_{0x}| + 2|\gamma_1||u_0|^3|)dx}{\displaystyle\int_0^1 u_0^4 dx},$$

就有

$$-4F(0) - C_1 \geqslant 0.$$

于是

$$\frac{d}{dt}\|w_x\|_{L^2(0,1)}^2 \geqslant -\frac{\gamma_2}{4}\|w_x\|_{L^2(0,1)}^4. \tag{4.6.45}$$

解微分不等式 (4.6.45) 得

$$\|w_x\|_{L^2(0,1)}^2 \geqslant \frac{4\|w(x,0)_x\|_{L^2(0,1)}^2}{\gamma_2\|w(x,0)\|_{L^2(0,1)}^2 + 4}.$$

再由式 (4.6.43) 知

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} \geqslant \frac{4\|w(x,0)_x\|^2_{L^2(0,1)}}{\gamma_2\|w(x,0)_x\|^2_{L^2(0,1)}+4}.$$

于是

$$\lim_{T\to T^{*-}} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} = \infty,$$

其中

$$T^* = -\frac{4}{\gamma_2\|w(x,0)_x\|^2_{L^2(0,1)}} > 0. \qquad \square$$

4.6.4　小初值初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 整体解的存在性

从定理 4.6.1 和定理 4.6.2 的结果可以看出, 方程 (4.6.1) 中的系数 γ_2 对于是否存在整体解起着重要作用. 特别地, 当 $\gamma_2<0$ 时, 解可能发生爆破现象. 但 γ_2 的符号不是一个判别准则. 对于 $\gamma_2<0$ 的情形, 整体解仍然是可能存在的, 但这时初值需满足某种 “小” 性条件. 下面讨论这一问题.

现在证明对于 γ 充分大和 $\|u_0\|_{H^2(0,1)}$ 充分小的初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 整体解的存在性.

如前所示, 若记

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 u_0(x)dx \equiv M, \tag{4.6.46}$$

并令

$$v(x,t) = u(x,t) - M, \tag{4.6.47}$$

则

$$\int_0^1 v(x,t)dx = 0. \tag{4.6.48}$$

于是可以把初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 变换成如下等价问题

$$v_t + \gamma v_{xxxx} = \tilde{\varphi}(v)_{xx}, \tag{4.6.49}$$

$$v_x|_{x=0,1} = v_{xxx}|_{x=0,1} = 0, \tag{4.6.50}$$

$$v(x,0) = u_0(x) - M, \tag{4.6.51}$$

其中

$$\tilde{\varphi}(v) = \gamma_2 v^3 + (3\gamma_2 M + \gamma_1)v^2 + 3(\gamma_2 M^2 + 2\gamma_1 M - 1)v. \tag{4.6.52}$$

定理 4.6.3　如果 $\gamma > \dfrac{1}{\pi^2}, u_0 \in H^2_E(0,1)$ 且 $\|u_0\|_{H^2(0,1)}$ 充分小, 则初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 存在唯一整体解 $u \in H^{4,1}(Q_T)$. 另外, 对于此解, 还成立

$$\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t) - M\|_{L^\infty(0,1)} = \lim_{t\to\infty} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} = 0. \tag{4.6.53}$$

证明 应用 Galerkin 方法和压缩映射原理可以证明初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 存在唯一局部解 $u(x,t) \in H^{4,1}([0,T_0) \times (0,1))$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 为了讨论整体解的存在性, 需要作 v 的一些先验估计. 下面的 $C_j, j = 2,3\cdots$ 表示不依赖于 v 和 t 的常数.

如果令

$$\gamma_0 = 3\gamma_2 M^2 + 2\gamma_1 M - 1, \quad \tilde{\gamma} = 3\gamma_2 M + \gamma_1, \quad f \equiv (\gamma_2 v^3 + \tilde{\gamma}_1 v^2), \tag{4.6.54}$$

则方程 (4.6.49) 可以改写为

$$v_t + \gamma v_{xxxx} - \gamma_0 v_{xx} = f. \tag{4.6.55}$$

因为假定 $\gamma > \dfrac{1}{\pi^2}, \|u_0\|_{H^2(0,1)}$ 充分小, 从而有

$$|\gamma_0| < \gamma^2\pi^2. \tag{4.6.56}$$

现在, 对于任意固定的 $t > 0$, 定义

$$N(t) = \sup_{0<\tau<t} \|v(\cdot,\tau)\|^2_{H^2(0,1)} + \int_0^t \|v(\cdot,\tau)\|^2_{H^2(0,1)} d\tau. \tag{4.6.57}$$

我们的目的是要作公式 (4.6.57) 的先验估计.

首先, 式 (4.6.55) 两端同乘以 v, 并对 x 积分, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{L^2(0,1)} + \gamma\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} + \gamma_0\|v_x\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 fv dx. \tag{4.6.58}$$

因为 $v_x \in H_0^1(0,1)$, 应用带 ε 的 Cauchy 不等式和 Friedrichs 不等式

$$\|v_x\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{\pi^2}\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}, \tag{4.6.59}$$

由式 (4.6.58) 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{L^2(0,1)} + C_2\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \varepsilon\|v\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(0,1)}, \tag{4.6.60}$$

其中

$$C_2 = \gamma - \frac{|\gamma_0|}{\pi^2} > 0. \tag{4.6.61}$$

因为 $\displaystyle\int_0^1 v(x,t)dx = 0$, 由 Poincaré 不等式

$$\|v\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_x\|^2_{L^2(0,1)} + \left(\int_0^1 v dx\right)^2$$

和 Friedrichs 不等式知

$$\|v\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{2\pi^2}\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}. \tag{4.6.62}$$

将式 (4.6.62) 代入式 (4.6.60), 取 $\varepsilon = \pi^2 C_2$, 并在 $(0,t)$ 上对 t 积分, 有

$$\|v\|^2_{L^2(0,1)} + C_2\int_0^t \|v\|^2_{H^2(0,1)}d\tau \leqslant \|v_0\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{\pi^2 C_2}{2}\int_0^t \|f\|^2_{L^2(0,1)}d\tau. \tag{4.6.63}$$

下面, 方程 (4.6.55) 两端同乘以 v_t, 并对 x 积分, 可得

$$\|v\|^2_{L^2(0,1)} + \gamma\frac{d}{dt}\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)} + \gamma_0\frac{d}{dt}\|v_x\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \|f\|^2_{L^2(0,1)}. \tag{4.6.64}$$

从而式 (4.6.64) 对 t 积分, 应用 Friedrichs 不等式 (4.6.59), 有

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|v_t\|^2_{L^2(0,1)}d\tau + C_2\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}\\ &\leqslant \gamma\|v_{0xx}\|^2_{L^2(0,1)} + |\gamma_0|\|v_{0x}\|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^t \|f\|^2_{L^2(0,1)}d\tau.\end{aligned} \tag{4.6.65}$$

联合式 (4.6.63) 和式 (4.6.65) 推得

$$N(t) \leqslant C_3\left(\|v_0\|^2_{H^2(0,1)} + \int_0^t \|f\|^2_{L^2(0,1)}d\tau\right). \tag{4.6.66}$$

因为

$$f \equiv (\gamma_2 v^3 + \tilde{\gamma}_1 v^2)_{xx} = (3\gamma_2 v^2 + 2\tilde{\gamma}_1 v)v_{xx} + (6\gamma_2 v + 2\tilde{\gamma})v_x^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_4\{&\|v\|^2_{L^\infty(0,1)} + \|v\|^2_{L^\infty(0,1)}\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}\\ &+ (\|v\|^2_{L^\infty(0,1)}\|v_x\|^2_{L^\infty(0,1)} + \|v_x\|^2_{L^\infty(0,1)})\|v_x\|^2_{L^2(0,1)}\}.\end{aligned} \tag{4.6.67}$$

由一维的 Sobolev 不等式, Poincaré 不等式和式 (4.6.59) 知

$$\begin{aligned}&\|v\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant C_5\|v_x\|_{L^2(0,1)},\\ &\|v_x\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant C_6\|v_{xx}\|_{L^2(0,1)}.\end{aligned}$$

从上两式和式 (4.6.66) 可见

$$\|f\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant C_7(\|v_{xx}\|^4_{L^2(0,1)} + \|v_{xx}\|^6_{L^2(0,1)}).$$

从而

$$\int_0^t \|f\|^2_{L^2(0,1)}d\tau \leqslant C_8 \sup_{\tau\in[0,t]} \|v\|^2_{H^2(0,1)}$$

$$\times \left[1 + \sup_{\tau\in[0,t]} \|v\|_{H^2(0,1)}^2\right] \int_0^t \|v\|_{H^2(0,1)}^2 d\tau. \tag{4.6.68}$$

将式 (4.6.68) 代入式 (4.6.66), 得

$$N(t) \leqslant C_9\{\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2 + N(t)^2 + N(t)^3\}, \quad \forall t > 0. \tag{4.6.69}$$

我们断言, 当 $\|v_0\|_{H^2(0,1)}$ 充分小时, 必存在常数 C_{10}, 使得

$$N(t) \leqslant C_{10}\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2, \quad \forall t > 0. \tag{4.6.70}$$

事实上, 为使式 (4.6.70) 成立, 只需要求

$$4(C_9+1)^2\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2 + 8(C_9+1)^3\|v_0\|_{H^2(0,1)}^4 < 1. \tag{4.6.71}$$

为证实这一点, 记

$$M(t) = C_9N(t) + C_9N(t)^2.$$

下证

$$M(t) < \frac{1}{2}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{4.6.72}$$

显然,

$$M(0) = C_9(N(0) + N(0)^2) \leqslant C_9C_3(\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2 + C_3\|v_0\|_{H^2(0,1)}^4) < \frac{1}{2}.$$

因此, 由连续性可知, 如果式 (4.6.72) 不成立, 则存在 $t_0 > 0$, 使得 $M(t_0) = \frac{1}{2}$, 而当 $t \in (0, t_0)$ 时, $M(t) < \frac{1}{2}$. 于是由式 (4.6.69) 得到

$$N(t_0) \leqslant \frac{C_9\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2}{1 - C_9N(t_0) - C_9N(t_0)^2} \leqslant \frac{C_9\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2}{1 - M(t_0)} \leqslant 2C_9\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2. \tag{4.6.73}$$

但式 (4.6.73) 和式 (4.6.71) 又蕴含

$$M(t_0) = C_9N(t_0) + C_9N(t_0)^2 \leqslant 2C_9^2\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2 + 4C_9^3\|v_0\|_{H^2(0,1)}^4 < \frac{1}{2},$$

这一矛盾表明式 (4.6.72) 成立.

由式 (4.6.72) 和式 (4.6.69) 知

$$N(t) \leqslant C_9\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2 + N(t)M(t) < C_9\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2}N(t).$$

于是

$$N(t) \leqslant 2C_9\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2 \leqslant C_{10}\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2, \quad \forall t > 0.$$

即得式 (4.6.70).

因为由下列等式

$$\int_0^t\int_0^1 (v_t+\gamma v_{xxxx}-\gamma_0 v_{xx})v_t dxd\tau=\int_0^t\int_0^1 f v_t dxd\tau$$

可推出 $\int_0^t \|v_\tau\|^2_{L^2(0,1)}d\tau$ 有界, 所以联合式 (4.6.70), 实际上已证明了初边值问题 (4.6.49)–(4.6.51) 在空间 $H^{2,1}(Q_T)$ 中存在解 (弱解). 为了进一步完成在 $H^{4,1}(Q_T)$ 中整体解的存在性证明, 可以利用上面的论证方法.

式 (4.6.55) 两端同乘以 $-v_{xx}$, 并对 x 和对 t 积分, 通过积分估计得到

$$\|v_x\|^2_{L^2(0,1)}+\int_0^t \|v_{xxx}\|^2_{L^2(0,1)}d\tau\leqslant C_{11}\left(\|v_0\|^2_{H^2(0,1)}+\int_0^t\|f\|^2_{L^2(0,1)}d\tau\right).\quad(4.6.74)$$

式 (4.6.55) 两端同乘以 v_{xxxx}, 并对 x 和对 t 积分, 通过积分估计得到

$$\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}+\int_0^t \|v_{xxxx}\|^2_{L^2(0,1)}d\tau\leqslant C_{12}\left(\|v_0\|^2_{L^2(0,1)}+\int_0^t\|f\|^2_{L^2(0,1)}d\tau\right).\quad(4.6.75)$$

从而知 $v\in H^{4,1}(Q_T)$.

最后, 我们讨论解在无穷远处的渐近行为. 因为对任意的 t 式 (4.6.70) 成立, 所以对于任意的 $\varepsilon>0$, 只要 $\|v_0\|_{H^2(0,1)}$ 充分小, 就对所有的 $t\geqslant 0$ 有 $N(t)\leqslant\varepsilon$. 从而可使所有的 $t\geqslant 0$,

$$\|f\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant\varepsilon\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}.\quad(4.6.76)$$

由式 (4.6.63) 和式 (4.6.76) 知

$$\|v\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant\|v_0\|^2_{L^2(0,1)}-(C_2-\varepsilon C_{13})\int_0^t\|v\|^2_{H^2(0,1)}d\tau.$$

当 ε 充分小, 使得 $C_2-\varepsilon C_{13}>0$ 时, 特别地, 就有

$$\|v\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant\|v_0\|^2_{L^2(0,1)}-(C_2-\varepsilon C_{13})\int_0^t\|v\|^2_{L^2(0,1)}d\tau.$$

Gronwall 不等式给出

$$\|v\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant\|v_0\|^2_{L^2(0,1)}e^{(C_2-\varepsilon C_{13})t}.\quad(4.6.77)$$

由式 (4.6.74) 和 (4.6.76) 推得

$$\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant(1-\varepsilon C_{11})\int_0^t\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}d\tau\leqslant C_{11}\|v_0\|^2_{H^2(0,1)}.$$

可选 ε 充分小, 使得 $1-\varepsilon C_{11}>0$, 于是 Gronwall 不等式给出

$$\|v_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 \leqslant C_{11}\|v_0\|_{H^2(0,1)}^2 e^{-(1-\varepsilon C_{11})t}. \tag{4.6.78}$$

由式 (4.6.77), (4.6.78) 和 Sobolev 嵌入定理得

$$\|v\|_{L^\infty(0,1)}, \|v_x\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant C_{14}\|v\|_{H^2(0,1)}.$$

从而

$$\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)-M\|_{L^\infty(0,1)} = \lim_{t\to\infty}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,1)} = 0.$$

由式 (4.6.78) 得

$$\lim_{t\to\infty}\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

□

4.6.5 维数 $N=2,3$ 情况的初边值问题 (4.6.4)–(4.6.6)

定理 4.6.4 设 $u_0\in H_E^2(\Omega)$ 和 $\gamma_2>0$, 则初边值问题 (4.6.4)–(4.6.6) 存在唯一整体解 $u(x,t)\in H^{4,1}(Q_T)$, 其中也记 $Q_T=\Omega\times(0,T)$.

证明 定理的证明与定理 4.6.1 的证明一样, 不需要任何变动, 因为通过变换

$$v=u-M, \quad M=\int_\Omega u_0(x)dx/|\Omega|, \tag{4.6.79}$$

γ_2 的值不变, 不失一般性, 可以假定

$$\int_\Omega u_0(x)dx = 0 = \int_\Omega u(x,t)dx. \tag{4.6.80}$$

方程 (4.6.4) 两端同乘以 u, 然后在 Ω 上积分, 得

$$\int_\Omega (u_t+\gamma\Delta^2 u)udx = \int_\Omega \Delta\varphi(u)udx. \tag{4.6.81}$$

因为

$$\int_\Omega u\Delta^2 udx = \int_\Omega (\Delta u)^2 dx,$$
$$\int_\Omega u\Delta\varphi(u)dx = -\int_\Omega \varphi'(u)(\Delta u)^2 dx,$$

并注意到式 (4.6.8), 由式 (4.6.81) 推出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leqslant C_0\int_\Omega(\nabla u)^2dx \leqslant C_0\int_\Omega|u\Delta u|dx\\ &\leqslant \frac{\gamma}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{C_0^2}{2\gamma}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant\frac{C_0^2}{\gamma}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

Gronwall 不等式给出

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2e^{C_0^2/\gamma t},\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{4.6.82}$$

$$\int_0^t\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2d\tau\leqslant\frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{\gamma}e^{\frac{C_0^2}{\gamma}T}.\tag{4.6.83}$$

定义

$$H(u)=\int_0^u\varphi(s)ds=\frac{\gamma}{4}u^4+\frac{\gamma_1}{3}u^3-\frac{1}{2}u^2$$

和

$$F(t)=\int_\Omega\left(H(u)+\frac{\gamma}{2}(\nabla u)^2\right)dx,$$

则有

$$\frac{dF}{dt}=\int_\Omega(\varphi(u)u_t+\gamma\nabla u\nabla u_t)dx.$$

上式对 x 分部积分, 并利用方程 (4.6.4) 和边值条件 (4.6.5), 得

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}&=\int_\Omega[\varphi(u)(-\gamma\Delta^2u+\Delta\varphi)-\gamma\Delta u(-\gamma\Delta^2u+\Delta\varphi)]dx\\&=-\int_\Omega[\gamma^2(\nabla\Delta u)^2-2\gamma\nabla\varphi\nabla\Delta u+(\nabla\varphi)^2]dx\\&=-\int_\Omega(\gamma\nabla\Delta u-\nabla\varphi)^2dx\leqslant 0.\end{aligned}$$

从而

$$F(t)\leqslant F(0)=\int_\Omega\left(H(u_0)+\frac{\gamma}{2}(\nabla u_0)^2\right)dx.$$

正如定理 4.6.1 得到式 (4.6.15) 的方法, 可得

$$\frac{\gamma}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\gamma_2}{2}\left(\int_0^1u^4dx+\int_\Omega u^2dx\right)\leqslant C_{15}+F(0)=C_{16}.\tag{4.6.84}$$

由式 (4.6.82)–(4.6.84) 有

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}+\int_\Omega\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2dx\leqslant C_T,\quad\forall t\in(0,T].\tag{4.6.85}$$

方程 (4.6.4) 两端同乘以 $\nabla^2 u$, 并对 x 积分知

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\Delta^2 u\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{\gamma}{2}\|\Delta^2 u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\gamma}\|\Delta\varphi(u)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

于是

$$\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\Delta^2 u\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\gamma}\|\Delta\varphi(u)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.6.86}$$

下面估计 $\|\Delta\varphi(u)\|_{L^2(\Omega)}$. 注意到 $\|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}$ 与 $\|u\|_{H^4(\Omega)}$ 等价, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ 与 $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ 等价, 根据 Sobolev 嵌入定理和式 (4.6.85) 得

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_T, \quad 2 \leqslant q \leqslant \infty, \quad N = 2, \tag{4.6.87}$$

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leqslant C_T, \quad N = 3. \tag{4.6.88}$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 插值定理有

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|\Delta^2 u\|^{\lambda}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1-\lambda}_{L^q(\Omega)}, \quad \lambda = (1+3q/2)^{-1}, \quad N = 2, \tag{4.6.89}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|\Delta^2 u\|^{\frac{1}{6}}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{\frac{5}{6}}_{L^6(\Omega)}, \quad N = 3, \tag{4.6.90}$$

$$\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} \leqslant C\|\Delta^2 u\|^{\frac{1}{6}}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{\frac{5}{6}}_{L^2(\Omega)}, \quad N = 2, \tag{4.6.91}$$

$$\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} \leqslant C\|\Delta^2 u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\Omega)}, \quad N = 3, \tag{4.6.92}$$

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\Delta^2 u\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\Omega)}, \quad N = 2, \tag{4.6.93}$$

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\Delta^2 u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}, \quad N = 3. \tag{4.6.94}$$

从以上估计可知

$$\begin{aligned}\|u^2\Delta u\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\Delta^2 u\|^{\frac{1}{3}+2\lambda}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{2(1-\lambda)}_{L^q(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_T\|\Delta^2 u\|^{\frac{1}{3}+2\lambda}, \quad N = 2,\end{aligned} \tag{4.6.95}$$

$$\begin{aligned}\|u^2\Delta u\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant C_T\|\Delta^2 u\|^{\frac{5}{6}}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{\frac{10}{6}}_{L^6(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_T\|\Delta^2 u\|^{\frac{5}{6}}_{L^2(\Omega)}, \quad N = 3,\end{aligned} \tag{4.6.96}$$

$$\begin{aligned}\|u|\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)} \leqslant C_T\|\Delta^2 u\|^{\lambda+\frac{1}{3}}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1-\lambda}_{L^q(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{5}{3}}_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_T\|\Delta^2 u\|^{\lambda+\frac{1}{3}}_{L^2(\Omega)}, \quad N = 2,\end{aligned} \tag{4.6.97}$$

$$\begin{aligned}\|u|\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)} \leqslant C_T\|\Delta^2 u\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{\frac{5}{6}}_{L^6(\Omega)}\\ &\leqslant C_T\|\Delta^2 u\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\Omega)}, \quad N = 3.\end{aligned} \tag{4.6.98}$$

因为

$$\Delta\varphi(u)=\varphi'(u)\Delta u+\varphi''(u)|\nabla u|^2=(3\gamma_2u^2+2\gamma_1u-1)\Delta u+(2\gamma_1+6\gamma_2u)|\nabla u|^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\|\Delta\varphi(u)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant&6\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}+24\gamma_1\|u\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}+54\gamma_2^2\|u^2\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\\&+16\gamma_1^2\||\nabla u|^2\|^2_{L^2(\Omega)}+144\gamma_2^2\|u|\nabla u|^2\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{4.6.99}$$

现在对式 (4.6.99) 中的一些项进行估计, 有

$$\||\nabla u|^2\|_{L^2(\Omega)}=\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)}\leqslant C_T\|\Delta^2u\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(\Omega)},\quad N=2,\tag{4.6.100}$$

$$\||\nabla u|^2\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_T\|\Delta^2u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)},\quad N=3,\tag{4.6.101}$$

$$\||u\Delta u\|_{L^2(\Omega)}=\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_T\|\Delta^2u\|^{\frac{1}{3}+\lambda}_{L^2(\Omega)},\quad N=2,\tag{4.6.102}$$

$$\||u\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_T\|\Delta^2u\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\Omega)},\quad N=3.\tag{4.6.103}$$

将式 (4.6.93)–(4.6.96) 和式 (4.6.100)–(4.6.103) 代入式 (4.6.99) 可见

$$\|\Delta\varphi(u)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C_T\begin{cases}\|\Delta^2u\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\Omega)}+\|\Delta^2u\|^{2(\frac{1}{3}+\lambda)}_{L^2(\Omega)}+\|\Delta^2u\|^{2(\frac{1}{3}+2\lambda)}_{L^2(\Omega)}, & N=2,\\ \|\Delta^2u\|_{L^2(\Omega)}+\|\Delta^2u\|^{\frac{4}{3}}_{L^2(\Omega)}+\|\Delta^2u\|^{\frac{5}{3}}_{L^2(\Omega)}, & N=3.\end{cases}\tag{4.6.104}$$

应用式 (4.6.86) 和带 ε 的 Young 不等式, 得

$$\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\|\Delta^2u\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\leqslant\|\Delta u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+C_T,\quad\forall t\in[0,T].\tag{4.6.105}$$

类似于定理 4.6.1 证明 $\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(Q_T)}\leqslant C_T$ 和证明解的唯一性方法可以证明此定理要求的 $\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2(Q_T)}\leqslant C_T$ 和解的唯一性. 因此初边值问题 (4.6.4)–(4.6.6) 存在唯一解 $u\in H^{4,1}(Q_T)$. □

注 4.6.1 应用讨论初边值问题 (4.6.1)–(4.6.3) 解的爆破的定理 4.6.2 同样的方法可以讨论初边值问题 (4.6.4)–(4.6.6) 解的爆破.

4.6.6 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [299]. 与本节内容有关的文献见 [22], [49], [288], [300]–[304].

4.7 人口问题中一广义扩散模型方程的初边值问题的有限差分法

4.7.1 引言

4.3 节应用 Galerkin 方法证明了人口问题中三维 Ginzburg-Landau 模型方程的周期边值问题和 Cauchy 问题的广义解和古典解的整体存在性、唯一性以及解的渐近性质. 4.4 节应用 Galerkin 方法证明了人口问题中一广义 Ginzburg-Landau 模型方程的时间周期问题广义时间周期解与古典时间周期解的存在性与唯一性. 4.5 节利用 Leary-Schauder 不动点定理证明了人口问题中一广义扩散模型方程的周期边值问题、Cauchy 问题和初边值问题存在唯一广义解或唯一古典解, 还讨论了以上问题解的渐近性质. 本节应用有限差分方法研究人口问题中一广义扩散模型方程初边值问题存在唯一整体广义解.

关于有限差分方法, 以定义在矩形区域 $Q_T = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上的非线性抛物型方程的初边值问题

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = f(u),\\ &u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x) \end{aligned} \tag{I}$$

为例, 简要地说明利用有限差分方法研究非线性发展方程初边值问题的步骤和过程.

首先用平行直线 $x = x_j (j = 0, 1, \cdots, J)$ 和 $t = t^n (n = 0, 1, \cdots, N_0)$ 剖分矩形区域 Q_T 为小网格, 其中 $x_j = jh, t^n = n\Delta t, Jh = l, N_0\Delta t = T (j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N_0)$, J 和 N_0 为自然数, h 和 Δt 为步长. 用 $v_j^n (j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N_0)$ 表示定义在格点 (x_j, t^n) 上的离散函数.

对于 $j = 0, 1, \cdots, J-1$ 和 $1, \cdots, N_0 - 1$ 构造非线性抛物型方程初边值问题 (I) 的有限差分组

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{h^2}\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1} + f_j^{n+1}, \tag{II}$$

其中 $\Delta_+ v_j = v_{j+1} - v_j$, $\Delta_- v_j = v_j - v_{j-1}$ 和 $f_j^n = f(v_j^n)(j = 0, 1, \cdots, J; n = 0, 1, \cdots, N_0)$, 有限差分边值条件如下

$$v_j^n = v_J^n = 0, \tag{III}$$

其中 $n=1,2,\cdots,N_0$, 对应的离散初值条件是

$$v_j^0=\varphi_j,\quad j=1,2,\cdots,J-1, \tag{IV}$$

其中 $\varphi_j=\varphi(x_j)(j=0,1,\cdots,J)$.

其次对 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 作一定的假定后, 证明有限差分组 (II)–(IV) 解的存在性和唯一性. 为了证明初边值问题 (I) 整体广义解的存在性和唯一性, 要对有限差分方程组 (II)–(IV) 的解作一系列必要的先验估计. 然后证明当 $h^2+\Delta t^2\to 0$ 时, 有限差分方程组 (II)–(IV) 的离散解, 例如记为 $v_\Delta=\{v_j^n|j=0,1,\cdots,J;n=0,1,\cdots,N_0\}$ 的收敛性. 为此, 对于离散函数 v_Δ 需要构造定义在矩形区域 Q_T 上的块块常值函数集合. 在相应的定义区域上分别定义

$$v_{h\Delta t}(x,t)=v_j^{n+1},\quad \overline{v}(h\Delta t)=\frac{\Delta_+v_j^{n+1}}{h},$$
$$\overline{\overline{v}}_{h\Delta t}(x,t)=\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2},\quad \widetilde{v}_{h\Delta t}(x,t)=\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}.$$

这些函数在矩形区域 $Q(T)=\{0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant T\}$ 上都是块块常值向量函数. 可以证明这些块块常值函数的 $L^2(0,l)$ 范数是有界的, 且界是不依赖于步长 h 和 Δt 的常数. 则可以选择序列 $\{h_i,\Delta t_i\}$, 使得当 $i\to\infty$ 时, $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$. 于是存在函数 $v(x,t),\overline{v}(x,t),\overline{\overline{v}}(x,t)$ 和 $\widetilde{v}(x,t)\in L^2(Q_T)$, 使得当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, 序列 $\{v_{h_i\Delta t_i}(x,t)\},\{\overline{v}_{h_i\Delta t}(x,t)\}$, $\{\overline{\overline{v}}_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 和 $\{\widetilde{v}_{h_i\Delta t_i}(x,t)\}$ 分别在 $L^2(Q(T)$ 中弱收敛于 $v(x,t)$, $\overline{v}(x,t)$, $\overline{\overline{v}}(x,t)$ 和 $\widetilde{v}(x,t)$. 最后证明初边值问题在一定假定下存在唯一整体广义解.

下面在 Q_T 上应用有限差分方法讨论下列人口问题中一广义扩散模型方程的初边值问题

$$u_t=-a_1u_{x^4}+a_2u_{x^2}+(a_3u^3)_{x^2}+f(u), \tag{4.7.1}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u_x(0,t)=u_x(l,t)=0, \tag{4.7.2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{4.7.3}$$

其中 $a_1>0,a_2\neq 0,a_3>0$ 均为常数和 $\varphi(x)$ 是初值函数, 且满足边值条件, $(x,t)\in Q_T=\{0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant T\}$.

我们用平行直线 $x=x_j(j=0,1,\cdots,m)$ 和 $t=t_n(n=0,1,\cdots,N_0)$ 将矩形区域 Q_T 分割成小网格, 其中 $x_j=jh,t_n=n\Delta t,mh=l,N_0\Delta t=T(j=0,1,\cdots,m;n=0,1,\cdots,N_0)$, m 和 N_0 都是正整数, h 和 Δt 为步长. 离散函数 $v_h^n=\{v_j^n\}(j=0,1,\cdots,m;n=0,1,\cdots,N_0)$ 是定义在格点 (x_j,t_n) 上的. 我们构造有限差分方程组

$$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}=-a_1\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2v_j^{n+1}}{h^4}+a_2\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2}$$

$$+ a_3 \frac{\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3}{h^2} + f_j^{n+1}, \tag{4.7.4}$$

其中 $\Delta_+ v_j = v_{j+1} - v_j$, $\Delta_- v_j = v_j - v_{j-1}$, $f_j^{n+1} = f(v_j^{n+1})$, $j = 2, \cdots, m-2; n = 1, 2, \cdots, N_0$. 有限差分边值条件如下

$$v_0^n = v_m^n = 0, \quad \Delta_+ v_0^n = \Delta_- v_m^n = 0, \quad n = 1, \cdots, N_0, \tag{4.7.5}$$

初值条件是

$$v_j^0 = \overline{\varphi}_j = \varphi(x_j), \quad j = 0, 1, \cdots, m. \tag{4.7.6}$$

根据边值条件 (4.7.5)

$$\overline{\varphi}_0 = \overline{\varphi}_1 = \varphi(0) = 0, \quad \overline{\varphi}_{m-1} = \overline{\varphi}_m = \varphi(l) = 0, \tag{4.7.7}$$

对于离散函数 $u_h = \{u_j\}$ 和 $v_h = \{v_j\}$ 应用以下记号:

$$(u_h, v_h) = \sum_{j=0}^{m} u_j v_j h, \quad \|u_h\|_2^2 = (u_h, u_h).$$

对于离散函数 $u_h = \{u_j\}$ 和它对应的 $k > 0$ 阶差商

$$\delta^k u_h = \left\{ \frac{\Delta_+ u_j}{h^k} \right\} \quad (j = 0, 1, \cdots, m-k)$$

的范数定义为

$$\|\delta^k u_h\|_p = \left(\sum_{j=0}^{m-k} \left| \frac{\Delta_+ u_j}{h^k} \right|^p h \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

和

$$\|\delta^k u_h\|_\infty = \max_{j=0,1,\cdots,m-k} \left| \frac{\Delta_+^k u_j}{h^k} \right|, \quad k > 0,$$

等等.

现在对非线性抛物型方程 (4.7.1) 和初值函数 $\varphi(x)$ 作如下假定:

(I) 函数 $f(u)$ 满足单调性条件

$$(u-v)(f(u)-f(v)) \leqslant b|u-v|^2 \tag{4.7.8}$$

和条件

$$|f(u)| \leqslant K_1 |u|^8, \tag{4.7.9}$$

其中 K_1 和 b 是正常数;

(II) $\varphi(x) \in C^2[0, l]$ 满足边值条件 (4.7.2).

4.7.2　有限差分方程组 (4.7.4)–(4.7.6) 解的存在性和唯一性

有限差分方程组 (4.7.4) 和有限差分边值条件 (4.7.5) 可以考虑为未知量 v_j^{n+1} $(j=0,1,\cdots,m)$ 的非线性代数方程组, 其中 $v_j^n(j=0,1,\cdots,m)$ 是已知量. 下面证明非线性代数方程组 (4.7.4),(4.7.5) 解 $v_j^{n+1}(j=0,1,\cdots,m)$ 的存在性.

引理 4.7.1　设式 (4.7.8) 成立和 Δt 充分小, 则有限差分方程组 (4.7.4),(4.7.5) 有唯一解 $v_j^{n+1}(j=0,1,\cdots,m;n=0,1,\cdots,N_0)$.

证明　对于任意数 $Z_j(j=0,1,\cdots,m)$ 构造数 $V_j(j=0,1,\cdots,m)$ 如下

$$\begin{aligned}V_j=&v_j^n-\lambda a_1\frac{\Delta t}{h^4}\Delta_+^2\Delta_-^2Z_j+\lambda a_2\frac{\Delta t}{h^2}\Delta_+\Delta_-Z_j+\lambda a_3\frac{\Delta t}{h^2}\Delta_+\Delta_-(Z_j)^3\\&+\lambda\Delta tf(Z_j),\quad j=2,\cdots,m-2.\end{aligned}$$

V_0,V_1,V_{m-1},V_m 由式 (4.7.5) 决定, 其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$, 这就定义了 $m+1$ 维欧氏空间到自身的映射 $V_h=T_\lambda Z_h$, 其中 $V_h=\{V_j\}$ 和 $Z_h=\{Z_j\}(j=0,1,\cdots,m)$.

为了应用有限维空间连续映射的不动点定理 (定理 1.9.6) 证明方程组 (4.7.4),(4.7.5) 解的存在性, 只需证明映射所有可能的不动点对参数 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 的一致有界性, 即要得到非线性代数方程组

$$\begin{aligned}V_j=&v_j^n-\lambda a_1\frac{\Delta t}{h^4}\Delta_+^2\Delta_-^2V_j+\lambda a_2\frac{\Delta t}{h^2}\Delta_+\Delta_-V_j+\lambda a_3\frac{\Delta t}{h^2}\Delta_+\Delta_-(V_j)^3\\&+\lambda\Delta tf(V_j),\quad j=2,\cdots,m-2\end{aligned}\tag{4.7.10}$$

和 V_j 满足的边值条件 (4.7.5) 的所有可能解的一致有界性.

式 (4.7.10) 两端同乘以 V_j, 对 $j=2,\cdots,m-2$ 求和, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{m-2}|V_j|^2=&\sum_{j=2}^{m-2}V_jV_j^n-\lambda a_1\frac{\Delta t}{h^4}\sum_{j=2}^{m-2}V_j\Delta_+^2\Delta_-^2V_j+\lambda a_2\frac{\Delta t}{h^2}\sum_{j=2}^{m-2}V_j\Delta_+\Delta_-V_j\\&+\lambda a_3\frac{\Delta t}{h^2}\sum_{j=2}^{m-2}V_j\Delta_+\Delta_-(V_j)^3+\lambda\Delta t\sum_{j=2}^{m-2}V_jf(V_j).\end{aligned}\tag{4.7.11}$$

由引理 1.9.1 和式 (4.7.5) 可知

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{m-2}a_1V_j\Delta_+^2\Delta_-^2V_j=&\sum_{j=0}^{m-2}a_1(\Delta_+^2V_j)^2-a_1V_1\Delta_+^2\Delta_-V_1+a_1V_{m-1}\Delta_+\Delta_-^2V_{m-1}\\&+a_1\Delta_+V_0\Delta_+^2V_0-a_1\Delta_+V_{m-1}\Delta_+\Delta_-V_{m-1}\\=&\sum_{j=0}^{m-2}a_1(\Delta_+^2V_j)^2.\end{aligned}$$

因为 V_j 满足边值条件 (4.7.5), 于是

$$\sum_{j=2}^{m-2} a_1 V_j \Delta_+^2 \Delta_-^2 V_j = \sum_{j=0}^{m-2} a_1 (\Delta_+^2 V_j)^2. \tag{4.7.12}$$

由引理 1.9.1 推出

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{m-2} a_3 V_j \Delta_+ \Delta_- (V_j)^3 = &-\sum_{j=1}^{m-2} a_3 \Delta_+ V_j \Delta_+ (V_j)^3 - a_3 V_1 \Delta_+ (V_1)^3 \\ &+ a_3 V_{m-1} \Delta_- (V_{m-1})^3.\end{aligned} \tag{4.7.13}$$

由于

$$V_{j+1}^2 + V_{j+1}V_j + V_j^2 \geqslant V_{j+1}^2 - |V_{j+1}V_j| + V_j^2 \geqslant V_{j+1}^2 - \frac{1}{2}(V_{j+1}+V_j)^2 + V_j^2 \geqslant 0,$$

所以对于满足边值条件 (4.7.5) 的 V_j, 由式 (4.7.13) 知

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{m-2} a_3 V_j \Delta_+ \Delta_- (V_j)^3 = &-\sum_{j=1}^{m-2} a_3 \Delta_+ V_j \Delta_+ (V_j)^3 - a_3 V_1 \Delta_+ (V_1)^3 \\ &+ a_3 V_{m-1} \Delta_- (V_{m-1})^3 \\ = &-\sum_{j=1}^{m-2} a_3 (V_{j+1} + V_{j+1}V_j + V_j^2)(\Delta_+ V_j)^2 \leqslant 0.\end{aligned} \tag{4.7.14}$$

利用假定 (I) 的式 (4.7.8) 可得式 (4.7.11) 右端最后一项的估计

$$\sum_{j=2}^{m-2} V_j f(V_j) \leqslant (b+\varepsilon) \sum_{j=2}^{m-2} |V_j|^2 + \frac{m-3}{4\varepsilon} |f(0)|^2, \tag{4.7.15}$$

其中 $\varepsilon > 0$.

因此, 对满足边值条件 (4.7.5) 的 $V_j (j = 0, 1, \cdots, m-2)$ 应用式 (4.7.12), (4.7.14) 和式 (4.7.15), 由式 (4.7.11) 得到

$$\left[1 - 2\lambda \left(\frac{a_2^2}{a_1} + b + \varepsilon\right) \Delta t\right] \sum_{j=2}^{m-2} |V_j|^2 \leqslant \sum_{j=2}^{m-2} |v_j^n|^2 + \frac{\lambda \Delta t (m-3)}{2\varepsilon} |f(0)|^2.$$

由假定可取 Δt 使得不等式 $1 - 2\left(\dfrac{a_2^2}{a_1} + b\right)\Delta t > 0$, 从而可取 $\varepsilon > 0$ 如此小, 使得 $1 - 2\left(\dfrac{a_2^2}{a_1} + b + \varepsilon\right)\Delta t > 0$, 所以 $\sum_{j=2}^{m-2} |V_j|^2$ 关于参数 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 是一致有界的, 即 $V_j (j = 2, \cdots, m-2)$ 关于参数 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 是一致有界的. 由边值条件 (4.7.5) 知

$V_j(j=0,1,\cdots,m)$ 关于参数 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 是一致有界的. 这就证明了有限差分方程组 (4.7.4),(4.7.5) 解的存在性. 下面证明解的唯一性.

设 $\{V_j\}$ 和 $\{\overline{V}_j\}$ 是非线性代数方程组 (4.7.4) 和 (4.7.5) 的两个解, 则有

$$\begin{aligned}V_j-\overline{V}_j=&-\frac{a_1\Delta t}{h^4}\Delta_+^2\Delta_-^2(V_j-\overline{V}_j)+\frac{a_2\Delta t}{h^2}\Delta_+\Delta_-(V_j-\overline{V}_j)\\&+\frac{a_3\Delta t}{h^2}\Delta_+\Delta_-(V_j^3-\overline{V}_j^3)+\Delta t(f(V_j)-f(\overline{V}_j)).\end{aligned}\tag{4.7.16}$$

用 $V_j-\overline{V}_j$ 乘式 (4.7.16) 两端, 并将所得结果对 $j=2,\cdots,m-2$ 求和, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{m-2}|V_j-\overline{V}_j|^2=&-\frac{a_1\Delta t}{h^4}\sum_{j=2}^{m-2}(V_j-\overline{V}_j)\Delta_+^2\Delta_-^2(V_j-\overline{V}_j)\\&+\frac{a_2\Delta t}{h^2}\sum_{j=2}^{m-2}(V_j-\overline{V}_j)\Delta_+\Delta_-(V_j-\overline{V}_j)\\&+\frac{a_3\Delta t}{h^2}\sum_{j=2}^{m-2}(V_j-\overline{V}_j)\Delta_+\Delta_-(V_j^3-\overline{V}_j^3)\\&+\Delta t\sum_{j=2}^{m-2}(V_j-\overline{V}_j)(f(V_j)-f(\overline{V}_j).\end{aligned}\tag{4.7.17}$$

因为 $\{V_j\}$ 和 $\{\overline{V}_j\}$ 满足边值条件 (4.7.5) 和 $f(u)$ 满足单调条件 (4.7.8), 同前证明 $V_j(j=0,1,\cdots,m)$ 一致有界性的方法相似, 由式 (4.7.17) 推得

$$\left[1-2\left(\frac{a_2^2}{a_1}+b\right)\Delta t\right]\sum_{j=2}^{m-2}|V_j-\overline{V}_j|^2\leqslant 0.$$

所以在条件 $1-2\left(\frac{a_2^2}{a_1}+b\right)\Delta t>0$ 下, $\sum_{j=2}^{m-2}|V_j-\overline{V}_j|^2=0$. 考虑到边值条件 (4.7.5), 我们有 $|V_j-\overline{V}_j|=0(j=0,1,\cdots,m)$.

4.7.3 有限差分方程组 (4.7.4)–(4.7.6) 解的先验估计

引理 4.7.2 设式 (4.7.8) 成立和 $\varphi(x)\in C[0,l]$. 当 $n\Delta t\leqslant T$ 和 $1-4\left(\frac{a_2^2}{a_1}+b\right)\Delta t>0$ 时, $\|v_h^n\|$ 关于 $n\Delta t$ 和 h 是一致有界的, 即有估计

$$\max_{n=0,1,\cdots,N_0}\|v_h^n\|_2^2\leqslant K_2e^{(\frac{a_2^2}{a_1}+b+\varepsilon)T}\left(\max_{x\in C[0,l]}|\varphi(x)|+|f(0)|\right),\tag{4.7.18}$$

其中 K_2 是不依赖 h 和 Δt 的常数.

证明 有限差分方程组 (4.7.4) 两端乘以 $v_j^{n+1}\Delta t$, 并将所得结果对 $j=2,\cdots,m-2$ 求和, 得

$$\sum_{j=2}^{m-2}(v_j^{n+1})^2=\sum_{j=2}^{m-2}v_j^{n+1}v_j^n-\frac{a_1\Delta t}{h^4}\sum_{j=2}^{m-2}v_j^{n+1}\Delta_+^2\Delta_-^2v_j^{n+1}$$
$$+\frac{a_2\Delta t}{h^2}\sum_{j=2}^{m-2}v_j^{n+1}\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}+\frac{a_3\Delta t}{h^2}\sum_{j=2}^{m-2}v_j^{n+1}\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3$$
$$+\Delta t\sum_{j=2}^{m-2}f(v_j^{n+1})v_j^{n+1}. \tag{4.7.19}$$

由引理 1.9.1 可得, 对于满足边值条件 (4.7.5) 的 v_j^{n+1} 有

$$\sum_{j=2}^{m-2}v_j^{n+1}\Delta_+^2\Delta_-^2v_j^{n+1}=\sum_{j=2}^{m-2}v_j^{n+1}(\Delta_+^2v_j^{n+1})^2 \tag{4.7.20}$$

和

$$\sum_{j=2}^{m-2}v_j^{n+1}\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3\leqslant 0. \tag{4.7.21}$$

从假定 $f(u)$ 满足单调性条件推出

$$\sum_{j=2}^{m-2}f(v_j^{n+1})v_j^{n+1}\leqslant(b+\varepsilon)\sum_{j=2}^{m-2}|v_j^{n+1}|^2+\frac{m-3}{4\varepsilon}|f(0)|^2, \tag{4.7.22}$$

其中 $\varepsilon>0$. 因此由式 (4.7.19)–(4.7.22) 得

$$\left[1-2\left(\frac{a_2^2}{a_1}+b+\varepsilon\right)\Delta t\right]\sum_{j=2}^{m-2}|v_j^{n+1}|^2\leqslant\sum_{j=2}^{m-2}|v_j^n|^2+\frac{(m-3)\Delta t}{2\varepsilon}|f(0)|^2$$

或

$$\sum_{j=2}^{m-2}|v_j^{n+1}|^2\leqslant\frac{\displaystyle\sum_{j=2}^{m-2}|v_j^n|^2+\frac{(m-3)\Delta t}{2\varepsilon}|f(0)|^2}{1-2\left(\dfrac{a_2^2}{a_1}+b+\varepsilon\right)\Delta t}.$$

考虑到 v_j^{n+1} 满足边值条件 (4.7.5), 上式两端乘以 h, 则有

$$||v_h^{n+1}||_2^2\leqslant\frac{||v_h^n||_2^2+\dfrac{l\Delta t}{2\varepsilon}|f(0)|^2}{1-2\left(\dfrac{a_2^2}{a_1}+b+\varepsilon\right)\Delta t}.$$

从这个递推关系, 容易得到

$$\|v_h^n\|_2^2 \leqslant \left[1-2\left(\frac{a_2^2}{a_1}+b+\varepsilon\right)\Delta t\right]^{-n}\left\{\|v_h^0\|_2^2+\frac{l|f(0)|^2}{4\varepsilon\left(\dfrac{a_2^2}{a_1}+b+\varepsilon\right)}\right\}.$$

由此立得估计 (4.7.18). □

引理 4.7.3　在 (I) 和 (II) 条件下, 当 Δt 充分小时, 成立估计

$$\max_{n=0,1,\cdots,N_0}\|\delta^k v_h^n\|_2 \leqslant K_3, \quad k=0,1,2, \tag{4.7.23}$$

其中 K_3 是不依赖 h 和 Δt 的常数.

证明　方程组 (4.7.4) 两端同乘以 $\dfrac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^2}h\Delta t$, 并将所得结果对 $j=2,\cdots,m-2$ 求和, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{m-2} v_j^{n+1}\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}h=&\sum_{j=2}^{m-2} v_j^{n}\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}h-a_1\Delta t\sum_{j=2}^{m-2}\left(\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}\right)^2 h\\&+a_2\Delta t\sum_{j=2}^{m-2}\frac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}h\\&+a_3\Delta t\sum_{j=2}^{m-2}\frac{\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3}{h^2}\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}h\\&+\Delta t\sum_{j=2}^{m-2}f(v_j^{n+1})\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}.\end{aligned} \tag{4.7.24}$$

利用引理 1.9.1 和边值条件 (4.7.5) 可得

$$\sum_{j=2}^{m-2} v_j^{n+1}\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}=\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2, \tag{4.7.25}$$

$$\sum_{j=2}^{m-2} v_j^{n}\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}h=\sum_{j=2}^{m-2} v_j^{n+1}\frac{\Delta_+^2 v_j^{n+1}}{h^2}\frac{\Delta_+^2 v_j^{n}}{h^2}h\leqslant\frac{1}{2}(\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2+\|\delta^2 v_h^{n}\|_2^2). \tag{4.7.26}$$

应用 Cauchy 不等式知

$$a_2\sum_{j=2}^{m-2}\frac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}h\leqslant\frac{a_1}{8}\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2+\frac{2a_2^2}{a_1}\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2. \tag{4.7.27}$$

$$a_3\sum_{j=2}^{m-2}\frac{\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3}{h^2}\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}h$$

$$\leqslant \frac{a_1}{8}\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2 + \frac{2a_2^2}{a_1}\sum_{j=2}^{m-2}\left(\frac{\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3}{h^2}\right)^2 h. \tag{4.7.28}$$

由公式

$$\frac{\Delta_+ u_j v_j}{h} = v_j\frac{\Delta_+ u_j}{h} + u_{j+1}\frac{\Delta_+ v_j}{h}, \tag{4.7.29}$$

可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3}{h^2} = \frac{\Delta_+[(v_j^{n+1})^3 - (v_{j-1}^{n+1})^3]}{h^2}\\
=&\frac{\Delta_+\{(v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1})[(v_j^{n+1})^2 + v_j^{n+1}v_{j-1}^{n+1} + (v_{j-1}^{n+1})^2]\}}{h^2}\\
=&\left[(v_j^{n+1})^2 + v_j^{n+1}v_{j-1}^{n+1} + (v_{j-1}^{n+1})^2\right]\frac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}\\
&+\left(v_{j+1}^{n+1} + v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}\right)\left[\left(\frac{\Delta_+ v_j^{n+1}}{h}\right)^2 + \frac{\Delta_+ v_j^{n+1}}{h}\frac{\Delta_+ v_{j-1}^{n+1}}{h}\right].
\end{aligned} \tag{4.7.30}$$

于是由式 (4.7.30) 导出

$$\begin{aligned}
&\frac{2a_3^2}{a_1}\sum_{j=2}^{m-2}\left(\frac{\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3}{h^2}\right)^2 h\\
\leqslant& K_4\sum_{j=2}^{m-2}\left[\left(|v_j^{n+1}|^4 + |v_{j-1}^{n+1}|^4\right)\left|\frac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}\right|^2\right.\\
&\left.+(|v_{j+1}^{n+1}|^2 + |v_j^{n+1}|^2 + |v_{j-1}^{n+1}|^2)\left(\left|\frac{\Delta_+ v_j^{n+1}}{h}\right|^4 + \left|\frac{\Delta_+ v_{j-1}^{n+1}}{h}\right|^4\right)h\right]\\
\leqslant& K_5\left(\|v_h^{n+1}\|_\infty^4\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2 + \|v_h^{n+1}\|_\infty^2\|\delta v_h^{n+1}\|_4^4\right).
\end{aligned} \tag{4.7.31}$$

将式 (4.7.30) 代入式 (4.7.28) 得

$$\begin{aligned}
&a_3\sum_{j=2}^{m-2}\frac{\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3}{h^2}\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}h\\
\leqslant&\frac{a_1}{8}\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2 + K_5\left(\|v_h^{n+1}\|_\infty^4\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2 + \|v_h^{n+1}\|_\infty^2\|\delta v_h^{n+1}\|_4^4\right).
\end{aligned} \tag{4.7.32}$$

由 Cauchy 不等式和假定 (I) 中的 (4.7.9) 立知

$$\sum_{j=2}^{m-2} f(v_j^{n+1})\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}h \leqslant \frac{a_1}{8}\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2 + \frac{2K_1^2}{a_1}\|v_h^{n+1}|_{16}^{16}. \tag{4.7.33}$$

将式 (4.7.25)–(4.7.27),(4.7.32) 和 (4.7.33) 代入 (4.7.24) 得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}-\frac{2a_2^2}{a_1}\Delta t\right)\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2+\frac{5a_1}{8}\Delta t\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2\\ \leqslant&\frac{1}{2}\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2+K_5\Delta t(\|v_h^n\|_\infty^4\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2+\|v_h^{n+1}\|_\infty^2\|\delta v_h^{n+1}\|_4^4)\\ &+\frac{2K_1^2}{a_1}\Delta t\|v_h^{n+1}\|_{16}^{16}.\end{aligned}\tag{4.7.34}$$

由定理 1.9.3 得插值不等式

$$\|v_h^{n+1}\|_\infty\leqslant K_6\|v_h^{n+1}\|_2^{\frac{7}{8}}\left(\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2+\frac{\|v_h^{n+1}\|_2}{l^4}\right)^{\frac{1}{8}};\tag{4.7.35}$$

$$\|\delta v_h^{n+1}\|_4\leqslant K_7\|v_h^{n+1}\|_2^{\frac{11}{16}}\left(\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2+\frac{\|v_h^{n+1}\|_2}{l^4}\right)^{\frac{5}{16}};\tag{4.7.36}$$

$$\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2\leqslant K_8\|v_h^{n+1}\|_2^{\frac{1}{2}}\left(\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2+\frac{\|v_h^{n+1}\|_2}{l^4}\right)^{\frac{1}{2}};\tag{4.7.37}$$

$$\|v_h^{n+1}\|_{16}\leqslant K_9\|v_h^{n+1}\|_2^{\frac{57}{64}}\left(\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2+\frac{\|v_h^{n+1}\|_2}{l^4}\right)^{\frac{7}{64}},\tag{4.7.38}$$

其中 K_6-K_9 是不依赖 h,l 和 v_h^{n+1} 的常数.

把式 (4.7.35)–(4.7.38) 代入式 (4.7.34) 知

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{4a_2^2}{a_1}\Delta t\right)\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2+\frac{5a_1}{4}\Delta t\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2\\ \leqslant&\|\delta^2 v_h^n\|_2^2+2K_5\Delta t(K_6^4K_8^2+K_6^2K_7^4)\|v_h^{n+1}\|_2^{\frac{9}{2}}\left(\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2+\frac{\|v_h^{n+1}\|_2}{l^4}\right)^{\frac{3}{2}}\\ &+\frac{4K_1^2}{a_1}K_9^{16}\Delta t\|v_h^{n+1}\|_2^{\frac{57}{4}}\left(\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2+\frac{\|v_h^{n+1}\|_2}{l^4}\right)^{\frac{7}{4}}.\end{aligned}$$

再利用 Young 不等式有

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{4a_2^2}{a_1}\Delta t\right)\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2+\frac{5a_1}{4}\Delta t\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2\\ \leqslant&\|\delta^2 v_h^n\|_2^2+\frac{a_1}{4}\Delta t\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2+K_{10}\Delta t\|v_h^{n+1}\|_2^2+K_{11}\Delta t\|v_h^{n+1}\|_2^{18}+K_{12}\Delta t\|v_h^{n+1}\|_2^{114}.\end{aligned}$$

由上式推得

$$\left(1-\frac{4a_2^2}{a_1}\Delta t\right)\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2+a_1\Delta t\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2\leqslant\|\delta^2 v_h^n\|_2^2+K_{13}\Delta t,\tag{4.7.39}$$

其中 K_{13} 是不依赖 h 和 Δt 的常数.

从式 (4.7.39) 可知

$$\|\delta^2 v_h^n\|_2^2 \leqslant \frac{1}{1-K_{14}\Delta t}(\|\delta^2 v_h^{n-1}\|_2^2 + K_{13}\Delta t).$$

从这个递推公式推出

$$\|\delta^2 v_h^n\|_2^2 \leqslant \left(\frac{1}{1-K_{14}\Delta t}\right)^n \left(\|\delta^2 v_h^0\|_2^2 + \frac{K_{13}}{K_{14}}\right).$$

取 Δt 充分小, 使得 $K_{14}\Delta t < \frac{1}{2}$, 则

$$\|\delta^2 v_h^n\|_2^2 \leqslant e^{K_{14}T} \left(\|\delta^2 v_h^0\|_2^2 + \frac{K_{13}}{K_{14}}\right).$$ □

推论 4.7.1 在引理 4.7.3 的条件下有估计

$$\max_{n=0,1,\cdots,N_0} \|\delta^k v_h^n\|_\infty \leqslant K_{15}, \quad k=0,1, \tag{4.7.40}$$

其中 K_{15} 是不依赖 h 和 Δt 的常数.

引理 4.7.4 在引理 4.7.3 的条件下, 有估计

$$\sum_{n=s}^{J} \|\delta^k v_h^{n+1}\|_2^2 \leqslant K_{16}, \quad k=0,1,2,3,4, \tag{4.7.41}$$

其中 $0 \leqslant s < J \leqslant N_0 - 1$, K_{16} 是不依赖 h 和 Δt 的常数.

证明 由式 (4.7.39) 和对于任意的 $0 \leqslant s < J \leqslant N_0 - 1$, 有

$$\sum_{n=s}^{J} \|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2 \Delta t \leqslant K_{16}.$$ □

方程 (4.7.4) 两端同乘以 $\dfrac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} h\Delta t$, 对 $j = 2, \cdots, m-2$ 求和后, 利用 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{m-2} \left|\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t}\right|^2 h\Delta t \\
\leqslant{}& \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-2} \left|\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t}\right|^2 h\Delta t + 2a_1^2 \sum_{j=2}^{m-2} \left|\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2 v_j^{n+1}}{h^4}\right|^2 h\Delta t \\
&+ 2a_2^2 \sum_{j=1}^{m-1} \left|\frac{\Delta_+\Delta_- v_j^{n+1}}{h^2}\right|^2 h\Delta t + 2a_3^2 \sum_{j=1}^{m-1} \left|\frac{\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3}{h^2}\right|^2 h\Delta t
\end{aligned}$$

$$+2\sum_{j=0}^{m}|f(v_j^{n+1})|^2 h\Delta t.$$

于是

$$\left\|\frac{v_h^{n+1}-v_h^n}{\Delta t}\right\|_2^2 \Delta t \leqslant 2\Delta t\left(2a_1^2\|\delta^4 v_h^{n+1}\|_2^2+2a_2^2\|\delta^2 v_h^{n+1}\|_2^2\right.$$
$$\left.+2a_3^2\|\delta^2(v_h^{n+1})^3\|_2^2+2K_1^2\|v_h^{n+1}\|_{16}^{16}\right).$$

上式对 $n=s,s+1,\cdots,J$ 求和, 并考虑到式 (4.7.31), (4.7.35)–(4.7.38) 以及式 (4.7.41), 可见

$$\sum_{n=s}^{J}\left\|\frac{v_h^{n+1}-v_h^n}{\Delta t}\right\|_2^2 \Delta t \leqslant K_{17}.$$

从而有如下引理.

引理 4.7.5 在引理 4.7.3 的条件下, 成立

$$\sum_{n=s}^{J}\left\|\frac{v_h^{n+1}-v_h^n}{\Delta t}\right\|_2^2 \Delta t \leqslant K_{17}, \tag{4.7.42}$$

其中 $0\leqslant s<J\leqslant N_0-1$, K_{17} 是不依赖 h 和 Δt 的常数.

应用文献 [305] 中的方法易证下面的引理.

引理 4.7.6 在引理 4.7.3 的条件下, 有限差分方程组 (4.7.4)–(4.7.6) 的解 v_j^n $(j=0,1,\cdots,m;n=0,1,\cdots,N_0)$ 有下列估计

$$\max_{j=0,1,\cdots,m-k}|\Delta_+^k v_j^n|\leqslant K_{15}h^k,\quad k=0,1, \tag{4.7.43}$$

$$\max_{j=0,1,\cdots,m-2}|\Delta_+^2 v_j^n|\leqslant K_{18}h^{\frac{3}{2}},\quad k=0,1, \tag{4.7.44}$$

$$\max_{n=0,1,\cdots,N_0-1}|\Delta_+^k v_j^{n+1}-\Delta_+^k v_j^n|\leqslant K_{19}h^k\Delta t^{\frac{1}{2}-\frac{k+\frac{1}{2}}{4}},\quad k=0,1, \tag{4.7.45}$$

$$\left(\sum_{n=s}^{n=J}\|\Delta_+^k v_h^{n+1}-\Delta_+^k v_h^n\|_2^2\Delta t\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant K_{20}h^k\Delta t^{1-\frac{k}{4}},\quad k=0,1,2,3, \tag{4.7.46}$$

其中 K_{15} 和 K_{18} 不依赖于 $n=(0,1,\cdots,N_0)$, K_{19} 不依赖 $j=(0,1,\cdots,m)$, 且 K_{15}, K_{18}, K_{19} 和 K_{20} 不依赖于 h 和 Δt.

4.7.4 当 $h^2+\Delta t^2 \to 0$ 时, 有限差分方程组 (4.7.4)–(4.7.6) 的解 v_j^n $(j=0,1,\cdots,m;n=0,1,\cdots,N_0)$ 的收敛性

对于离散函数 v_j^n $(j=0,1,\cdots,m;n=0,1,\cdots,N_0)$ 构造一组块块常值函数如下: 设在 $Q_j^n=\{jh<x\leqslant(j+1)h, n\Delta t<t\leqslant(n+1)\Delta t\}$ 上, $v_{h\Delta t}(x,t)=v_j^{n+1}(j=0,1,\cdots,m;n=0,1,\cdots,N_0)$; 又设在 Q_j^n 上, $v_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)=\dfrac{\Delta_+^k v_j^{n+1}}{h^k}, v_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)=\dfrac{\Delta_+^k v_{m-k}^{n+1}}{h^k}$ $(m-k)h<x\leqslant l, n\Delta t<t\leqslant(n+1)\Delta t$, 其中 $j=0,1,\cdots,m-k;n=0,1,\cdots,N_0-1$ 和 $k=1,2,3,4$. 设 $\widetilde{v}_{h\Delta t}(x,t)=\dfrac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}$ $(jh<x\leqslant(j+1)h, n\Delta t<t\leqslant(n+1)\Delta t)$, 其中 $j=0,1,\cdots,m-1;n=0,1,\cdots,N_0-1$. 由估计式 (4.7.41), 对于块块常值函数 $v_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)$ $(k=0,1,2,3,4)$ 有估计

$$\left\|v_{h\Delta t}^{(k)}\right\|_{L^2(Q_T)}\leqslant K_{16}\quad(k=0,1,2,3,4). \tag{4.7.47}$$

因此有序列 h_i 和 Δt_i, 使得当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, 序列 $\{v_{h_i\Delta t_i}^{(k)}(x,t)\}$, 在 $L^2(Q_T)$ 中弱收敛于 $u^{(k)}(x,t)\in L^2(Q_T)$, 其中 $k=0,1,2,3,4$. 同样由估计式 (4.7.42) 可知 $\{\widetilde{v}_{h_i\Delta t_i}^{(k)}(x,t)\}$, 当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, 有弱极限 $\widetilde{u}(x,t)\in L^2(Q_T)$, 而且

$$\|\widetilde{u}\|_{L^2(Q_T)}\leqslant K_{17}. \tag{4.7.48}$$

还由估计式 (4.7.23) 得到, 当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, 序列 $\{v_{h_i\Delta t_i}^{(k)}(x,t)\}$ 的弱极限 $u^{(k)}(x,t)$ 的估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|u^{(k)}(\cdot,t)\right\|_{L^2(0,l)}\leqslant K_3,\quad k=0,1,2.$$

应用文献 [305] 中的方法容易推出 $u^{(k+1)}(x,t)$ 是 $u^{(k)}(x,t)$ $(k=0,1,2,3)$ 关于 x 的广义导数. 所以 $u^{(k)}(x,t)=u_{x^k}(x,t)$ $(k=0,1,2,3,4)$. 同理可证函数 $u(x,t)$ 有广义导数 $u_t(x,t)=\widetilde{u}(x,t)$.

现在, 对应于离散函数 $\left\{\dfrac{\Delta_+^k v_j^n}{h^k}\right\}$ $(j=0,1,\cdots,m-k;n=0,1,\cdots,N_0)$ 构造函数 $\bar{v}_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)$ 如下: 在每一小矩形网格 $\bar{Q}_j^n=\{jh\leqslant x\leqslant(j+1)h, n\Delta t\leqslant t\leqslant(n+1)\Delta t\}$ $(j=0,1,\cdots,m-1;n=0,1,\cdots,N_0-1)$ 上, $\widetilde{v}_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)(k=0,1,2,3)$ 由在 Q_j^n 的四个角点上的离散函数 $\dfrac{\Delta_+^k v_j^n}{h^k}$ 沿两个方向 x 和 t 的线性展开获得. 由估计 (4.7.40), (4.7.43)–(4.7.45) 可知块块双线性函数 $\{\bar{v}_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)\}$ $(k=0,1)$ 不仅在 Q_T 上一致有界, 而且在 x 方向当 $k=0$ 时一致 Lipschitz 连续, 在 $k=1$ 时, 以 $\dfrac{1}{2}$ 为指数一致 Hölder 连续; 在 t 方向是以 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{k+\frac{1}{2}}{4}$ 为指数一致 Hölder 连续, 其中

$k=0,1$. 所以当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, $\bar{v}_{h_i\Delta t_i}(x,t)(k=0,1)$ 分别一致收敛于极限函数 $\bar{u}(x,t)\in C^{(1,\frac{3}{8})}(Q_T)$ 和 $\bar{u}^{(1)}(x,t)\in C^{(\frac{1}{2},\frac{3}{8})}(Q_T)$. 因为

$$|\bar{v}_{h\Delta t}(x,t)-v_{h\Delta t}(x,t)|\leqslant K_{21}(h+\Delta t^{\frac{3}{8}})$$

和

$$\left|\bar{v}_{h\Delta t}^{(1)}(x,t)-v_{h\Delta t}^{(1)}(x,t)\right|\leqslant K_{21}(h^{\frac{1}{2}}+\Delta t^{\frac{1}{8}}),$$

所以 $\bar{u}^{(k)}(x,t)=u^{(k)}(x,t)$ $k=0,1$. 当 $h_i^2+\Delta t_i^2\to 0$ 时, $v_{h_i\Delta t_i}^{(k)}(x,t)(k=0,1)$ 在 Q_T 上一致收敛于 $u_{x^k}(x,t)(k=0,1)$.

从估计式 (4.7.41) 和式 (4.7.46) 直接推得

$$\int_0^T\int_0^l\left|\bar{v}_{h\Delta t}^{(k)}(x+h,t)-\bar{v}_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)\right|^2dxdt\leqslant K_{16}h^2\quad(k=0,1,2,3)$$

和

$$\int_0^T\int_0^l\left|\bar{v}_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)-\bar{v}_{h\Delta t}^{(k)}(x,t-\Delta t)\right|^2dxdt\leqslant K_{22}\Delta t^{2-\frac{k}{4}}\quad(k=0,1,2,3).$$

所以 $\{\bar{v}_{h_i\Delta t_i}^{(k)}(x,t)\}(k=0,1,2,3)$ 分别在 $L^2(Q_T)$ 中收敛于 $\bar{u}^{(k)}(x,t)(k=0,1,2,3)$. 由关系式

$$\left\|\bar{v}_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)-v_{h\Delta t}^{(k)}(x,t)\right\|_{L^2(Q_T)}\leqslant K_{23}\left(h+\Delta t^{1-\frac{k}{4}}\right)\quad(k=0,1,2,3)$$

可知 $\bar{u}^{(k)}(x,t)=u_{x^k}(x,t)(k=0,1,2,3)$.

下面证明 $u(x,t)$ 是初边值问题 (4.7.1)–(4.7.3) 的整体广义解. 设 $\phi(x,t)$ 为一光滑试验函数, 用 $\phi_{h\Delta t}$ 表示对应于 $\phi(x,t)$ 的离散函数 ϕ_j^n 所做的块块常值函数. 取

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N_0-1}\sum_{j=2}^{m-1}\phi_j^{n+1}\Bigg[&\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}+a_1\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2v_j^{n+1}}{h^4}-a_2\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2}\\&-a_3\frac{\Delta_+\Delta_-(v_j^{n+1})^3}{h^2}-f_j^{n+1}\Bigg]h\Delta t=0\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N_0-1}\sum_{j=2}^{m-1}\phi_j^{n+1}\Bigg\{&\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}+a_1\frac{\Delta_+^2\Delta_-^2v_j^{n+1}}{h^4}-a_2\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2}\\&-a_3\left[(v_j^{n+1})^2+v_j^{n+1}v_{j-1}^{n+1}+(v_{j-1}^{n+1})^2\right]\frac{\Delta_+\Delta_-v_j^{n+1}}{h^2}\end{aligned}$$

$$+ a_3\left(v_{j+1}^{n+1} + v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}\right)\left[\left(\frac{\Delta_+ v_j^{n+1}}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_+ v_j^{n+1}}{h}\right)\left(\frac{\Delta_+ v_{j-1}^{n+1}}{h}\right)\right] - f_j^{n+1}\Bigg\} h\Delta t = 0.$$

令在 Q_j^n 上 $F_{h\Delta t}(x,t) = f_j^{n+1} = f(v_j^{n+1})$, 所以 $F_{h\Delta t}(x,t)$ 是矩形域Q_T 上的块块常值函数. 所以有

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^l \phi_{h\Delta t}(x,t)\{\widetilde{v}_{h\Delta t}(x,t) + a_1 v_{h\Delta t}^{(4)}(x,t) - a_2 v_{h\Delta t}^{(2)}(x,t)\\&- 3a_3[(v_{h\Delta t}(x,t))^2 v_{h\Delta t}^{(2)}(x,t) + 2v_{h\Delta t}(x,t)(v_{h\Delta t}^{(1)}(x,t))^2]\\&- F_{h\Delta t}(x,t)\}dxdt = 0.\end{aligned} \tag{4.7.49}$$

因为当 $h_i^2 + \Delta t_i^2 \to 0$ 时, $\phi_{h_i t_i}(x,t)$ 和 $v_{h_i\Delta t_i}^{(k)}(x,t)(k=0,1)$ 在 Q_T 上分别一致收敛于 $\phi(x,t)$ 和 $u_{x^k}(x,t)(k=0,1)$, $\widetilde{v}_{h_i\Delta t_i}(x,t)$ 和 $v_{h_i\Delta t_i}^{(k)}(x,t)(k=2,3,4)$ 分别弱收敛于 $u_t(x,t)$ 和 $v_{x^k}(x,t)(k=2,3,4)$ 以及 $F_{h_i t_i}(x,t)$ 在 Q_T 上一致收敛于 $f(u(x,t))$. 同时, 当 $h_i^2 + \Delta t_i^2 \to 0$ 时, $v_{h_i t_i}(x,t)(v_{h_i\Delta t_i}^{(1)}(x,t))^2$ 在 Q_T 上一致收敛于 $u(x,t)(u_x(x,t))^2$ 和 $(v_{h_i\Delta t_i}(x,t))^2 v_{h_i\Delta t_i}^{(2)}(x,t)$ 弱收敛于 $(u(x,t))^2 u_{x^2}(x,t)$. 所以当 $h_i^2 + \Delta t_i^2 \to 0$ 时, 在式 (4.7.49)(式 (4.7.49) 中的 $h, \Delta t$ 分别用 $h_i, \Delta t_i$ 代替) 中取极限, 得积分关系式

$$\int_0^T\int_0^l \phi\{u_t + a_1 u_{x^4} - a_2 u_{x^2} - 3a_3[u^2 u_{x^2} + 2u(u_x)^2] - f(u)\}dxdt = 0,$$

即

$$\int_0^T\int_0^l \phi\{u_t + a_1 u_{x^4} - a_2 u_{x^2} - (a_3 u^3)_{x^2} - f(u)\}dxdt = 0.$$

这说明 $u(x,t)$ 是方程 (4.7.1) 的广义解. 因为 $v_{h_i\Delta t_i}^{(k)}(x,t)(k=0,1)$ 在 Q_T 上的一致收敛性, $u(x,t)$ 在通常意义下适合边值条件 (4.7.2) 和初值条件 (4.7.3), 所以这样得到的 $u(x,t)$ 是非线性抛物型方程初边值问题 (4.7.1)–(4.7.3) 的整体广义解. 易证初边值问题 (4.7.1)–(4.7.3) 的广义解

$$u(x,t) \in W_2^{(4,1)}(Q_T) = \left\{u\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in L^2(Q_T), u_t \in L^2(Q_T), i = 0,1,2,3,4\right.\right\}$$

是唯一的. 因此, 当 $h^2 + \Delta t^2 \to 0$ 时, 极限过程成立. 于是有如下定理.

定理 4.7.1 在假定条件 (I) 和 (II) 下, 有限差分方程组 (4.7.1)–(4.7.3) 的离散解 v_j^n $(j = 0,1,\cdots,m; n = 0,1,\cdots,N_0)$, 当 $h^2 + \Delta t^2 \to 0$ 时, 收敛于函数 $u(x,t) \in W_2^{(4,1)}(Q_T)$, 它在通常意义下满足边值条件 (4.7.2) 和初值条件 (4.7.3), 在

广义意义下满足非线性抛物型方程 (4.7.1), 且此广义解 $u(x,t) \in W_2^{(4,1)}(Q_T)$ 是唯一的.

注 4.7.1 若将条件 (II) 改为 (II)′: $\varphi(x) \in W_2^{(2)}(0,l)$, 且满足边值条件 (4.7.2), 则根据文献 [305] 中的方法和定理 4.7.1 知, 在假定条件 (I) 和 (II)′ 下, 初边值问题 (4.7.1)–(4.7.3) 存在解 $u(x,t) \in W_2^{(4,1)}(Q_T)$.

4.7.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [306]. 与本节内容有关的文献见 [288], [290], [305], [307].

第 5 章　非线性高阶发展方程组

5.1　广义 IMBq 型方程组的初边值问题

5.1.1　引言

近年来, Toda 晶格已经用于模拟纵波在脱氧核糖核酸 (DNA) 分子中的传播 (见 [308]–[310]). 文献 [311] 得到纵形变 $\phi(x,t)$ 和横形变 $\psi(x,t)$ 的下列连续方程组

$$\frac{\rho}{a}\phi_{tt}=\beta\phi_{xx}+\frac{\beta}{2}(\psi^2)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}\phi_{xxtt}, \tag{5.1.1$_a$}$$

$$\frac{\rho}{a}\psi_{tt}=\frac{\beta}{2}(\psi^3)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}\psi_{xxtt} \tag{5.1.2$_a$}$$

和连续方程组

$$\frac{\rho}{a}\phi_{tt}=\beta\phi_{xx}+\frac{\beta}{2}(\phi^2)_{xx}+\frac{\beta}{2}(\psi^2)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}\phi_{xxtt}, \tag{5.1.1$_b$}$$

$$\frac{\rho}{a}\psi_{tt}=\beta(\phi\psi)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}\psi_{xxtt}, \tag{5.1.2$_b$}$$

其中 l 和 $\dfrac{1}{b}$ 是模型中具有特性的长度, 它们的比值由 $\beta=lb$ 表示; ρ 表示线性质量密度; $a>0$ 是常数.

方程组 (5.1.1$_a$), (5.1.2$_a$) 与方程组 (5.1.1$_b$), (5.1.2$_b$) 和 IMBq 方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=(u^3)_{xx} \tag{5.1.3}$$

有密切的关系.

本节研究下列广义 IMBq 型方程组的初边值问题

$$\phi_{tt}-A\phi_{xx}-B\phi_{xxtt}=m(\psi)_{xx},\quad 0<x<l_1,\quad t>0, \tag{5.1.4}$$

$$\psi_{tt}-B\psi_{xxtt}=n(\psi)_{xx},\quad 0<x<l_1,\quad t>0, \tag{5.1.5}$$

$$\phi(0,x)=\phi(l_1,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{5.1.6}$$

$$\psi(0,x)=\psi(l_1,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{5.1.7}$$

$$\phi(x,0)=\phi_0(x),\quad \phi_t(x,0)=\phi_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l_1, \tag{5.1.8}$$

$$\psi(x,0)=\psi_0(x),\quad \psi_t(x,0)=\psi_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l_1, \tag{5.1.9}$$

其中 $\phi(x,t)$ 和 $\psi(x,t)$ 是未知函数; $l_1>0, A, B>0$ 是常数; $m(s)$ 和 $n(s)$ 是给定的非线性函数; $\phi_0(x), \phi_1(x), \psi_0(x)$ 和 $\psi_1(x)$ 是已知的初值函数, 且它们都满足边值条件. 显然, 方程组 (5.1.1), (5.1.2) 是方程组 (5.1.4), (5.1.5) 的特殊情形.

为了讨论方便起见, 我们作变量替换. 令

$$x=\sqrt{B}y, \quad t=t, \tag{5.1.10}$$

则方程组 (5.1.4), (5.1.5) 变为

$$\phi_{tt}(\sqrt{B}y,t)-\frac{A}{B}\phi_{yy}(\sqrt{B}y,t)-\phi_{yytt}(\sqrt{B}y,t)=\frac{1}{B}m(\psi(\sqrt{B}y,t))_{yy}, \tag{5.1.11}$$

$$\psi_{tt}(\sqrt{B}y,t)-\psi_{yytt}(\sqrt{B}y,t)=\frac{1}{B}n(\psi(\sqrt{B}y,t))_{yy}. \tag{5.1.12}$$

如果在式 (5.1.11), (5.1.12) 中以 x 代替 y 和 $\phi(\sqrt{B}x,t)=u(x,t), \psi(\sqrt{B}x,t)=v(x,t)$, $\frac{1}{B}m(\psi(\sqrt{B}x,t))=f(v(x,t))$, $\frac{1}{B}n(\psi(\sqrt{B}x,t))=g(v(x,t))$, 则问题 (5.1.4)–(5.1.9)可以写成

$$u_{tt}(x,t)-Du_{xx}(x,t)-u_{xxtt}(x,t)=f(v(x,t))_{xx}, \tag{5.1.13}$$

$$v_{tt}(x,t)-v_{xxtt}(x,t)=g(v(x,t))_{xx}, \tag{5.1.14}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \tag{5.1.15}$$

$$v(0,t)=v(l,t)=0, \tag{5.1.16}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \tag{5.1.17}$$

$$v(x,0)=v_0(x), \quad v_t(x,0)=v_1(x), \tag{5.1.18}$$

其中 $D=\frac{A}{B}, l=\frac{l_1}{\sqrt{B}}$; $u_0(x)=\phi_0(\sqrt{B}x), u_1(x)=\phi_1(\sqrt{B}x), v_0(x)=\psi_0(\sqrt{B}x)$ 和 $v_1(x)=\psi_1(\sqrt{B}x)$ 定义在 $[0,l]$ 上且满足边值条件 $u_0(0)=u_0(l)=v_0(0)=v_1(l)=0$.

这里只研究问题 (5.1.13)–(5.1.18) 整体广义解的存在唯一性、整体古典解的存在唯一性和解的爆破, 因为通过变换 (5.1.10) 由问题 (5.1.13)–(5.1.18) 可以得到问题 (5.1.4)–(5.1.9) 的同样结果.

为了求问题 (5.1.13)–(5.1.18) 的广义解, 我们将问题 (5.1.13)–(5.1.18) 利用二阶常微分方程边值问题的 Green 函数化为积分方程的边值问题.

令 $K(x,\xi)$ 是二阶常微分方程边值问题

$$y(x)-y''(x)=0, \quad y(0)=y(l)=0$$

的 Green 函数, 即

$$K(x,\xi)=\frac{1}{\sinh l}\begin{cases}\sinh(l-\xi)\sinh x, & 0\leqslant x<\xi,\\ \sinh\xi\sinh(l-x), & \xi\leqslant x\leqslant l.\end{cases} \tag{5.1.19}$$

易证 $K(x,\xi)<\dfrac{e^l-1}{2(e^l+1)}<\dfrac{1}{2}$.

现在, 假定 $(u(x,t),v(x,t))$ 是问题 (5.1.13)–(5.1.18) 的古典解, 则 $(u(x,t),v(x,t))$ 满足下列方程组和边值条件:

$$[u_{tt}+Du+f(v)]-[u_{tt}+Du+f(v)]_{xx}=Du+f(v), \tag{5.1.20}$$

$$[v_{tt}+g(v)]-[v_{tt}+g(v)]_{xx}=g(v), \tag{5.1.21}$$

$$u_{tt}(0,t)+Du(0,t)+f(v(0,t))=0, \tag{5.1.22}$$

$$u_{tt}(l,t)+Du(l,t)+f(v(l,t))=0, \tag{5.1.23}$$

$$v_{tt}(0,t)+g(v(0,t))=0, \tag{5.1.24}$$

$$v_{tt}(l,t)+g(v(l,t))=0. \tag{5.1.25}$$

为了讨论方便, 这里假定 $f(0)=0$ 和 $g(0)=0$, 否则可以用 $f(v)-f(0)$ 代替 $f(v)$ 和用 $g(v)-g(0)$ 代替 $g(v)$. 由式 (5.1.20)–(5.1.25) 有

$$u_{tt}(x,t)+Du(x,t)+f(v(x,t))=\int_0^l K(x,\xi)\{Du(\xi,t)+f(v(\xi,t))\}d\xi, \tag{5.1.26}$$

$$v_{tt}(x,t)+g(v(x,t))=\int_0^l K(x,\xi)g(v(\xi,t))d\xi. \tag{5.1.27}$$

式 (5.1.26) 和式 (5.1.27) 对 t 积分两次, 得到

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\,u_0(x)+u_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{Du(x,\tau)+f(v(x,\tau))\}d\tau\\&+\int_0^t\int_0^l(t-\tau)K(x,\xi)\{Du(\xi,\tau)+f(v(\xi,\tau))\}d\xi d\tau,\end{aligned} \tag{5.1.28}$$

$$\begin{aligned}v(x,t)=&\,v_0(x)+v_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)g(v(x,\tau))d\tau\\&+\int_0^t\int_0^l(t-\tau)K(x,\xi)g(v(\xi,\tau))d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{5.1.29}$$

所以问题 (5.1.20)–(5.1.25) 的任意古典解满足积分方程组 (5.1.28), (5.1.29) 以及边值条件

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \tag{5.1.30}$$

$$v(0,t)=v(l,t)=0. \tag{5.1.31}$$

定义 5.1.1 对于任意 $T>0$, 如果 $(u(x,t),v(x,t))\in C([0,T];C[0,l])$ (即 $u(x,t)$, $v(x,t)\in C([0,T];C[0,l])$ 满足积分方程组 (5.1.28), (5.1.29) 和边值条件 (5.1.30) 和 (5.1.31), 则 $(u(x,t),v(x,t))$ 称为积分方程组 (5.1.28), (5.1.29) 具有边值条件 (5.1.30) 和 (5.1.31) 的连续解或问题 (5.1.13)–(5.1.18) 的广义解. 如果 $T<\infty$, 则 $(u(x,t),v(x,t))$ 称为问题 (5.1.13)–(5.1.18) 的局部广义解. 如果 $T=\infty$, 则 $(u(x,t),v(x,t))$ 称为问题 (5.1.13)–(5.1.18) 的整体广义解.

5.1.2 初边值问题 (5.1.14),(5.1.16),(5.1.18) 的整体解

为了证明问题 (5.1.13)–(5.1.18) 存在唯一整体广义解, 根据定义 5.1.1, 只需证明具有边值条件 (5.1.30) 和 (5.1.31) 的积分方程组 (5.1.28), (5.1.29) 存在唯一的整体连续解 $(u(x,t),v(x,t))\in C([0,T];C([0,l])(\forall T>0)$. 为此, 我们首先证明具有边值条件 (5.1.31) 的积分方程 (5.1.29) 有唯一的整体连续解 $v(x,t)\in C([0,T];C[0,l])(\forall T>0)$. 其次, 证明具有边值条件 (5.1.30) 的积分方程 (5.1.28) 存在唯一整体连续解 $u(x,t)\in C([0,T];C([0,l])(\forall T>0)$. 因此, 我们可以得到具有边值条件 (5.1.30) 和 (5.1.31) 的积分方程组 (5.1.28), (5.1.29) 有唯一的整体连续解 $(u(x,t),v(x,t))\in C([0,T];C([0,l])(\forall T>0)$, 即问题 (5.1.13)–(5.1.18) 存在唯一整体广义解.

下面证明具有边值条件 (5.1.31) 的积分方程 (5.1.29) 解的存在性. 为此, 考虑下列具有边值条件和小扩散项的积分方程

$$\begin{aligned}v(x,t)=&v_0(x)+v_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon v(x,\tau)+g(v(x,\tau))\}d\tau\\&+\int_0^t\int_0^l(t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon v(\xi,\tau)+g(v(\xi,\tau))\}d\xi d\tau,\end{aligned} \tag{5.1.32}$$

$$v(0,t)=v(l,t)=0, \tag{5.1.33}$$

其中 $0<\varepsilon<1$. 现在, 证明具有边值条件 (5.1.33) 的积分方程 (5.1.32) 存在局部连续解.

我们定义函数空间

$$X(T)=\{v(x,t)\in C([0,T];C[0,l]),v(0,t)=v(l,t)=0\},$$

并赋予由

$$\|v\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\max_{0\leqslant x\leqslant l}|v(x,t)|,\quad \forall v\in X(T)$$

定义的范数. 易知 $X(T)$ 是一 Banach 空间. 令 $U=\|v_0\|_{C[0,l]}+\|v_1\|_{C[0,l]}$. 取 $X(T)$ 的子集合

$$P(U,T)=\{v|v\in X(T),\|v\|_{X(T)}\leqslant 2U+1\}.$$

显然, 对于每一对 $U,T>0$, $P(U,T)$ 是一非空有界闭凸子集.

定义映射 S 如下:

$$Sw=v_0(x)+v_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon w(x,\tau)+g(w(x,\tau))\}d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^l(t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon w(\xi,\tau)+g(w(\varepsilon,\tau))\}d\xi d\tau,\quad \forall w\in X(T),\tag{5.1.34}$$
$$w(0,t)=w(1,t)=0.\tag{5.1.34'}$$

显然, S 映 $X(T)$ 到 $X(T)$.

引理 5.1.1 设 $v_0,v_1\in C[0,l]$, $v_0(0)=v_0(l)=v_1(0)=v_1(l)=0$ 和 $g(s)\in C^1(\mathbb{R})$, 则问题 (5.1.32), (5.1.33) 存在唯一局部连续解 $v_\varepsilon(x,t)\in C([0,T_0);C[0,l])$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间和 T_0 是不依赖于 ε 的常数. 同时, 如果

$$\sup_{0\leqslant t<T_0}\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{C[0,l]}+\sup_{0\leqslant t<T_0}\|v_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{C[0,l]}<\infty,\tag{5.1.35}$$

则 $T_0=\infty$.

证明 设 $w(x,t)\in P(U,T)$. 定义

$$\overline{g}(\eta)=\max_{|s|\leqslant\eta}\{|g(s)|+|g'(s)|\},\quad \forall\eta\geqslant 0.$$

注意到 $\overline{g}(\eta)$ 在 $[0,\infty)$ 上是连续的和非减的. 由式 (5.1.34) 得

$$\|Sw\|_{X(T)}\leqslant U+UT+\frac{2+l}{4}[2U+1+\overline{g}(2U+1)]T^2.\tag{5.1.36}$$

如果

$$T\leqslant\min\left\{1,\left[\frac{4}{(2+l)(2U+1+\overline{g}(2U+1))}\right]^{\frac12}\right\},\tag{5.1.37}$$

则 $\|Sw\|_{X(T)}\leqslant 2U+1$. 因此, 若条件 (5.1.37) 成立, 则 S 映 $P(U,T)$ 到 $P(U,T)$.

下面证明映射 $S:P(U,T)\mapsto P(U,T)$ 是严格压缩的.

令 $T>0$ 和 $w_1,w_2\in P(U,T)$ 是给定的. 我们有

$$Sw_1-Sw_2=-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon(w_1(x,\tau)-w_2(x,\tau))+g(w_1(x,\tau))-g(w_2(x,\tau))\}d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^l(t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon(w_1(\xi,\tau)-w_2(\xi,\tau))+g(w_1(\xi,\tau))$$
$$-g(w_2(\xi,\tau))\}d\xi d\tau.$$

g 利用中值定理, 得

$$\|Sw_1-Sw_2\|_{X(T)}\leqslant\frac{2+l}{4}T^2[1+\overline{g}(2U+1)]\|w_1-w_2\|_{X(T)}.\tag{5.1.38}$$

如果 T 满足

$$T \leqslant \min\left\{1, \left[\frac{4}{(2+l)(2U+1+\overline{g}(2U+1))}\right]^{\frac{1}{2}}, \left[\frac{2}{(2+l)(1+\overline{g}(2U+1))}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{5.1.39}$$

则 $\|Sw_1 - Sw_2\|_{X(T)} \leqslant \dfrac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_{X(T)}$. 所以 $S: P(U,T) \mapsto P(U,T)$ 是严格压缩的. 由压缩映射原理推出, 对于适当选择的 $T>0$, S 有唯一的不动点 $v_\varepsilon(x,t) \in P(U,T)$, 它是问题 (5.1.32), (5.1.33) 的连续解. 易证对于每一个 $T'>0$, 问题 (5.1.32), (5.1.33) 最多有一解属于 $X(T')$.

令 $[0,T_0)$ 是 $v_\varepsilon \in X(T_0)$ 存在的最大时间区间, 即问题 (5.1.32), (5.1.33) 存在唯一的局部连续解 $v_\varepsilon \in C([0,T_0); C[0,l])$. 余下仅证明, 如果式 (5.1.35) 成立, 则 $T_0 = \infty$. 设式 (5.1.35) 成立且 $T_0 < \infty$. 对于任意的 $T' \in [0,T_0)$, 考虑积分方程

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x,t) = {} & v_\varepsilon(x,T') + v_{\varepsilon t}(x,T')t - \int_0^t (t-\tau)\{\varepsilon w_\varepsilon(x,\tau) + g(w_\varepsilon(x,\tau))\}d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^l (t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon w_\varepsilon(\xi,\tau) + g(w_\varepsilon(\xi,\tau))\}d\xi d\tau \end{aligned} \tag{5.1.40}$$

和边值条件

$$w_\varepsilon(0,t) = w_\varepsilon(l,t) = 0. \tag{5.1.41}$$

根据式 (5.1.35), $\|v_\varepsilon(\cdot,T')\|_{C[0,l]} + \|v_{\varepsilon t}(\cdot,T')\|_{C[0,l]}$ 在 $T' \in [0,T_0)$ 上是一致有界的, 允许我们选择 $T^* \in (0,T_0)$, 使得对于每一个 $T' \in [0,T_0)$, 积分方程 (5.1.40) 和边值条件 (5.1.41) 有唯一解 $w_\varepsilon(x,t) \in X(T^*)$. 由上面的方法导出如此的 T^*的存在性. 特别地, 式 (5.1.39) 显示 T^* 的选择不依赖于 $T' \in [0,T_0)$. 置 $T' = T_0 - \dfrac{T^*}{2}$, 令 w_ε 表示问题 (5.1.40), (5.1.41) 对应的解和由

$$\overline{v}_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} v_\varepsilon(x,t), & t \in [0,T'], \\ w_\varepsilon(x,t-T'), & t \in \left[T', T_0 + \dfrac{T^*}{2}\right] \end{cases}$$

定义 $\overline{v}_\varepsilon(x,t) : [0,l] \times \left[0, T_0 + \dfrac{T^*}{2}\right] \longmapsto \mathbb{R}$.

依构造 $\overline{v}_\varepsilon(x,t)$ 是问题 (5.1.32), (5.1.33) 在 $\left[0, T_0 + \dfrac{T^*}{2}\right]$ 上的解和根据局部解的唯一性, $\overline{v}_\varepsilon(x,t)$ 是 $v_\varepsilon(x,t)$ 的延拓. 这就违背了 $[0,T_0)$ 是最大时间区间. 因此如果式 (5.1.35) 成立, 则 $T_0 = \infty$. □

下面证明积分方程 (5.1.32) 和边值条件 (5.1.33) 的整体连续解的存在性和唯一性. 为此, 我们作问题 (5.1.32), (5.1.33) 解的先验估计.

引理 5.1.2 设 $v_0, v_1 \in C[0,l], g(s) \in C(\mathbb{R})$ 和下列不等式

$$|g(s)| \leqslant AG(s) + B \tag{5.1.42}$$

成立, 其中 $G(s) = \int_0^s g(y)dy$ 和 $A, B > 0$ 是常数, 则问题 (5.1.32), (5.1.33) 的解 $v_\varepsilon(x,t) \in C([0,T];\ C[0,l])$ 有估计

$$\int_0^l |g(v_\varepsilon(x,t))|dx + \varepsilon \int_0^l v_\varepsilon^2(x,t)dx \leqslant M_1(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.1.43}$$

这里和以后 $M_i(T)$ 和 $C_i(T)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 表示依赖于 T, 但不依赖于 ε 的常数.

证明 在式 (5.1.32) 中以 $v(x,t)$ 代 $v_\varepsilon(x,t)$, 并对 t 求导数, 得

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon_t}(x,t) = v_1(x) &- \int_0^t \{\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau) + g(v_\varepsilon(x,\tau))\}d\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^l K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau) + g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\}d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{5.1.44}$$

式 (5.1.44) 两端同乘以 $\varepsilon v_\varepsilon(x,t)$, 乘积对 t 积分并注意到

$$\int_0^t \int_0^\tau v_\varepsilon(x,s)v_\varepsilon(x,\tau)dsd\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[\int_0^\tau v_\varepsilon(x,s)ds\right]^2 d\tau = \frac{1}{2}\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]^2,$$

则有

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{2}v_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]^2 + \varepsilon\int_0^t\int_0^\tau g(v_\varepsilon(x,s))v_\varepsilon(x,\tau)dsd\tau \\ =&\frac{\varepsilon}{2}v_0^2 + \varepsilon v_1(x)\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau + \varepsilon^2\int_0^t\int_0^\tau\int_0^l K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)v_\varepsilon(x,\tau)d\xi dsd\tau \\ &+ \varepsilon\int_0^t\int_0^\tau\int_0^l K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))v_\varepsilon(x,\tau)d\xi dsd\tau. \end{aligned} \tag{5.1.45}$$

式 (5.1.44) 两端乘以 $g(v_\varepsilon(x,t))$, 乘积对 t 积分, 可见

$$\begin{aligned} &G(v_\varepsilon(x,t)) + \frac{1}{2}\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\right]^2 + \varepsilon\int_0^t\int_0^\tau v_\varepsilon(x,s)g(v_\varepsilon(x,\tau))dsd\tau \\ =&G(v_0(x)) + v_1(x)\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau \\ &+ \varepsilon\int_0^t\int_0^\tau\int_0^l K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)g(v_\varepsilon(x,\tau))d\xi dsd\tau \\ &+ \int_0^t\int_0^\tau\int_0^l K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))g(v_\varepsilon(x,\tau))d\xi dsd\tau. \end{aligned} \tag{5.1.46}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^\tau g(v_\varepsilon(x,s))v_\varepsilon(x,\tau)dsd\tau+\int_0^t\int_0^\tau g(v_\varepsilon(x,\tau))v_\varepsilon(x,s)dsd\tau\\=&\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\int_0^\tau v_\varepsilon(x,\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{5.1.47}$$

将式 (5.1.45) 加到式 (5.1.46) 上, 其和式在 $[0,l]$ 上对 x 积分, 得

$$\begin{aligned}&2\int_0^l G(v_\varepsilon(x,t))dx+\varepsilon\int_0^l v_\varepsilon^2(x,t)dx+\varepsilon^2\int_0^l\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]^2dx\\&+\int_0^l\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,t))d\tau\right]^2dx\\=&2\int_0^l G(v_0(x))dx+\varepsilon\int_0^l v_0^2(x)dx+2\int_0^l v_1(x)\int_0^t[\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau)+g(v_\varepsilon(x,\tau))]d\tau dx\\&+2\varepsilon^2\int_0^l\int_0^t\int_0^\tau\int_0^l K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)v_\varepsilon(x,\tau)d\xi dsd\tau dx\\&+2\int_0^l\int_0^t\int_0^\tau\int_0^l K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))g(v_\varepsilon(x,\tau))d\xi dsd\tau dx\\&+2\varepsilon\int_0^l\int_0^t\int_0^\tau\int_0^l K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))v_\varepsilon(x,\tau)d\xi dsd\tau dx\\&+2\varepsilon\int_0^l\int_0^t\int_0^\tau\int_0^l K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)g(v_\varepsilon(x,\tau))d\xi dsd\tau dx\\&-2\varepsilon\int_0^l\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]dx.\end{aligned}\tag{5.1.48}$$

为了改写式 (5.1.48), 我们利用在式 (5.1.47) 中用的方法, 变换式 (5.1.48) 的一些项如下

$$\begin{aligned}&\int_0^l\int_0^t\int_0^\tau\int_0^l K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)v_\varepsilon(x,\tau)d\xi dsd\tau dx\\=&\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t v_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx\\&-\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t\int_0^\tau v_\varepsilon(x,s)v_\varepsilon(\xi,\tau)dsd\tau\right]d\xi dx.\end{aligned}\tag{5.1.49}$$

利用 $K(x,\xi)$ 关于 x 和 ξ 的对称性, 由式 (5.1.49) 推出

$$\begin{aligned}&2\int_0^l\int_0^l\int_0^t\int_0^\tau K(x,\xi)v_\varepsilon(\xi,s)v_\varepsilon(x,\tau)dsd\tau d\xi dx\\=&\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t v_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx.\end{aligned}\tag{5.1.50}$$

类似地可得

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^l\int_0^l\int_0^t\int_0^\tau K(x,\xi)g(v_\varepsilon(\xi,s))g(v_\varepsilon(x,\tau))dsd\tau d\xi dx\\
=&\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))d\tau\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\right]d\xi dx, \qquad (5.1.51)\\
&\int_0^l\int_0^l\int_0^t\int_0^\tau K(x,\xi)[g(v_\varepsilon(\xi,s))v_\varepsilon(x,t)+v_\varepsilon(\xi,s)g(v_\varepsilon(x,\tau))]dsd\tau d\xi dx\\
=&\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx. \qquad (5.1.52)
\end{aligned}
$$

将式 (5.1.50) 和 (5.1.51) 代入式 (5.1.48) 得

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^l G(v_\varepsilon(x,t))dx+\varepsilon\int_0^l v_\varepsilon^2(x,t)dx+\varepsilon^2\int_0^l\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]^2dx\\
&+\int_0^l\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\right]^2dx\\
=&2\int_0^l G(v_0(x))dx+\varepsilon\int_0^l v_0^2(x)dx+2\int_0^l v_1(x)\int_0^t[\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau)+g(v_\varepsilon(x,\tau))]d\tau dx\\
&+\varepsilon^2\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t v_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx\\
&+\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))d\tau\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\right]d\xi dx\\
&+2\varepsilon\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx\\
&-2\varepsilon\int_0^l\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]dx. \qquad (5.1.53)
\end{aligned}
$$

现在, 对式 (5.1.53) 的右端项作一系列估计. 利用 Cauchy 不等式, Hölder 不等式和条件 (5.1.42) 可知

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^l v_1(x)\int_0^t\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau)d\tau dx\\
\leqslant&(e^l+1)\int_0^l v_1^2(x)dx+\frac{\varepsilon^2}{e^l+1}\int_0^l\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]^2dx, \qquad (5.1.54)
\end{aligned}
$$

$$
2\int_0^l v_1(x)\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau dx
$$

$$\leqslant 2(e^l+1)\int_0^l v_1^2(x)dx+\frac{1}{2(e^l+1)}\int_0^l\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\right]^2dx, \tag{5.1.55}$$

$$\varepsilon^2\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t v_\varepsilon(\xi,\tau)d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]d\xi dx$$

$$\leqslant\frac{(e^l-1)\varepsilon^2}{2(e^l+1)}\int_0^l\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]^2dx, \tag{5.1.56}$$

$$\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))d\tau\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\right]d\xi dx$$

$$\leqslant\frac{e^l-1}{2(e^l+1)}\int_0^l\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\right]^2dx, \tag{5.1.57}$$

$$2\varepsilon\int_0^l\int_0^l K(x,\xi)\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(\xi,\tau))d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]dx$$

$$\leqslant\frac{(e^l-1)}{2(e^l+1)}\int_0^l\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\right]^2dx+\frac{(e^l-1)\varepsilon^2}{2(e^l+1)}\int_0^l\left[\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]^2dx, \tag{5.1.58}$$

$$-2\varepsilon\int_0^l\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\int_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau\right]dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2(e^l+1)}\int_0^l\left[\int_0^t g(v_\varepsilon(x,\tau))d\tau\right]^2dx+2(e^l+1)\varepsilon^2T\int_0^l\int_0^t v_\varepsilon^2(x,\tau)d\tau dx. \tag{5.1.59}$$

将式 (5.1.54)–(5.1.59) 代入式 (5.1.53)，得

$$\begin{aligned}&2\int_0^l G(v_\varepsilon(x,t))dx+\varepsilon\int_0^l v_\varepsilon^2(x,t)dx\\&\leqslant 2\int_0^l G(v_0(x))dx+\varepsilon\int_0^l v_0^2(x)dx+3(e^l+1)\int_0^l v_1^2(x)dx\\&\quad+2(e^l+1)\varepsilon^2T\int_0^t\int_0^l v_\varepsilon^2(x,\tau)dxd\tau.\end{aligned} \tag{5.1.60}$$

由式 (5.1.60) 利用 Gronwall 不等式和不等式 (5.1.42) 推出式 (5.1.43).　□

引理 5.1.3 在引理 5.1.2 的假定下, 问题 (5.1.32), (5.1.33) 的广义解有估计

$$v_{\varepsilon t}^2 + \varepsilon v_\varepsilon^2 \leqslant M_2(T), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.1.61}$$

证明 式 (5.1.44) 对 t 求导有

$$v_{\varepsilon tt}(x,t) + \varepsilon v_\varepsilon(x,t) + g(v_\varepsilon(x,t)) = \int_0^l K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t) + g(v_\varepsilon(\xi,t))\}d\xi. \tag{5.1.62}$$

式 (5.1.62) 两端同乘以 $Av_{\varepsilon t}(x,t)$ 和利用条件 (5.1.42) 和估计 (5.1.43), 可见

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[Av_{\varepsilon t}^2(x,t) + \varepsilon Av_\varepsilon^2(x,t) + 2(AG(v_\varepsilon(x,t)) + B)] \\
&= 2A\int_0^l K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t) + g(v_\varepsilon(\xi,t))\}d\xi v_{\varepsilon t}(x,t) \\
&\leqslant A\left\{\sqrt{\varepsilon l}\left[\int_0^l \varepsilon v_\varepsilon^2(\xi,t)d\xi\right]^{\frac{1}{2}} + \int_0^l |g(v_\varepsilon(\xi,t))|d\xi\right\}|v_{\varepsilon t}(x,t)| \\
&\leqslant C_1(T)|v_{\varepsilon t}(x,t)|.
\end{aligned} \tag{5.1.63}$$

式 (5.1.63) 对 t 积分, 得

$$\begin{aligned}
&Av_{\varepsilon t}^2(x,t) + A\varepsilon v_\varepsilon^2(x,t) + 2[AG(v_\varepsilon(x,t) + B] \\
&\leqslant Av_1^2(x) + A\varepsilon v_0^2(x) + 2[AG(v_0(x)) + B] + C_2(T) + \int_0^T Av_{\varepsilon t}^2(x,\tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{5.1.64}$$

由式 (5.1.64) 和 Gronwall 不等式推出估计 (5.1.61). □

定理 5.1.1 设 $v_0, v_1 \in C[0,l]$ 满足边值条件 (5.1.15) 和 $g \in C^1(\mathbb{R})$ 满足条件 (5.1.42), 则问题 (5.1.32), (5.1.33) 存在唯一整体广义解 $v_\varepsilon \in C([0,T];C[0,l])(\forall T>0)$.

证明 根据引理 5.1.1 只需证明条件 (5.1.35) 成立. 事实上,

$$v_\varepsilon^2(x,t) = \left[\int_0^t v_{\varepsilon\tau}(x,\tau)d\tau + v_0(x)\right]^2 \leqslant 2T\int_0^t v_{\varepsilon\tau}^2(x,\tau)d\tau + 2v_0^2(x). \tag{5.1.65}$$

由估计 (5.1.61) 和式 (5.1.65) 有

$$v_\varepsilon^2(x,t) \leqslant M_3(T), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.1.66}$$

又由估计 (5.1.61) 和式 (5.1.66) 得

$$\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{C[0,l]} + \|v_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{C[0,l]} \leqslant M_4(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

因此

$$\sup_{0\leqslant t<T_0}\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{C[0,l]}+\sup_{0\leqslant t<T_0}\|v_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{C[0,l]}<\infty.$$ □

为了证明问题 (5.1.32), (5.1.33) 整体古典解的存在性, 我们将研究问题 (5.1.32), (5.1.33) 整体广义解的正则性.

引理 5.1.4 设定理 5.1.1 的条件成立, $v_0, v_1 \in C^k[0,l]$ 和 $g \in C^{k+m}(\mathbb{R})$, 其中 $k \geqslant 1$, $m \geqslant 0$ 均为任意整数, 则问题 (5.1.32), (5.1.33) 的广义解 $v_\varepsilon(x,t) \in C^{m+2}([0,T];C^{k-1}[0,l])$ $(\forall T>0)$.

证明 利用数学归纳法证明. 当 $m=1$ 时, 在式 (5.1.32) 中用 $v_\varepsilon(x,t)$ 代替 $v(x,t)$, 并对 x 求导此方程, 得

$$\begin{aligned}v_{\varepsilon x}(x,t)=&v_{0x}(x)+v_{1x}(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon v_{\varepsilon x}(x,\tau)+g(v_\varepsilon(x,\tau))_x\}dx\\&+\int_0^t\int_0^l(t-\tau)K_x(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau)+g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\}d\xi d\tau.\end{aligned}\tag{5.1.67}$$

因此, 注意到式 (5.1.66) 可知

$$\|v_{\varepsilon x}(\cdot,t)\|_{C[0,l]}\leqslant\|v_{0x}\|_{C[0,l]}+T\|v_{1x}\|_{C[0,l]}+C_3(T)\int_0^t\|v_{\varepsilon x}(\cdot,\tau)\|_{C[0,l]}d\tau+C_4(T).$$

由 Gronwall 不等式推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon x}(\cdot,t)\|_{C[0,l]}\leqslant M_5(T).\tag{5.1.68}$$

当 $m=2$ 时, 式 (5.1.67) 对 x 求导并应用 $K(x,\xi)=K_{xx}(x,\xi)$ $(x\neq\xi)$, 有

$$\begin{aligned}v_{\varepsilon xx}(x,t)=&v_{0xx}(x)+v_{1xx}(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon v_{\varepsilon x}(x,\tau)+g(v_\varepsilon(x,\tau))_{xx}\}dx\\&+\int_0^t\int_0^l(t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau)+g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\}d\xi d\tau.\end{aligned}\tag{5.1.69}$$

由式 (5.1.69) 导出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon xx}(\cdot,t)\|_{C[0,l]}\leqslant M_6(T).\tag{5.1.70}$$

现在假定, 当 $m=k-1$ 时, 估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon x^{k-1}}(\cdot,t)\|_{C[0,l]}\leqslant M_7(T)\tag{5.1.71}$$

成立. 我们可以证明当 $m=k$ 时, 估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon x^k}(\cdot,t)\|_{C[0,l]}\leqslant M_8(T)\tag{5.1.72}$$

也成立.

当 $k=2j-1$ $(j=1,2,\cdots)$ 时, 即 k 是一奇数, 式 (5.1.67) 对 x 求导 $2j-2$ 次, 有

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon x^{2j-1}}(x,t) = & v_{0x^{2j-1}}(x) + v_{1x^{2j-1}}t \\ & - \int_0^t (t-\tau) \sum_{i=1,3,\cdots,2j-1} [\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau) + g(v_\varepsilon(x,\tau))]_{x^i} d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^l (t-\tau) K_x(x,\xi)[\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau) + g(v_\varepsilon(\xi,\tau))] d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{5.1.73}$$

当 $k=2j$ $(j=1,2,\cdots)$ 时, 即 k 是一偶数, (5.1.67) 式对 x 求导 $2j-1$ 次, 得

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon x^{2j}}(x,t) = & v_{0x^{2j}}(x) + v_{1x^{2j}}(x)t \\ & - \int_0^t (t-\tau) \sum_{i=0,2,\cdots,2j} [\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau) + g(v_\varepsilon(x,\tau))]_{x^i} d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^l (t-\tau) K(x,\xi)[\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau) + g(v_\varepsilon(\xi,\tau))] d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{5.1.74}$$

由式 (5.1.73) 和 (5.1.74) 推出

$$\begin{aligned} \|v_{\varepsilon x^k}(\cdot,t)\|_{C[0,l]} \leqslant & \|v_{0x^k}\|_{C[0,l]} + T\|v_{1x^k}\|_{C[0,l]} \\ & + C_5(T)\int_0^t \|v_{\varepsilon x^k}(\cdot,\tau)\|_{C[0,l]} d\tau + C_6(T). \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式得式 (5.1.72) . 又由式 (5.1.72) 知

$$v_\varepsilon(x,t) \in C([0,T];C^{k-1}[0,l]).$$

在式 (5.1.74) 中令 $k-1=2j$ $(j=0,1,\cdots)$. 此结果对 t 求导, 得

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon x^{2j}t}(x,t) = & v_{1x^{2j}} - \int_0^t \sum_{i=0,2,\cdots,2j} [\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau) + g(v_\varepsilon(x,\tau))]_{x^i} d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^l K(x,\xi)[\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau) + g(v_\varepsilon(\xi,\tau))] d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{5.1.75}$$

由式 (5.1.75) 可见 $v_{\varepsilon x^{2j}t}(x,t) \in C([0,T];C[0,l])$. 式 (5.1.75) 对 t 求导, 有

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon x^{2j}t^2}(x,t) = & -\sum_{i=0,2,\cdots,2j} [\varepsilon v_\varepsilon(x,t) + g(v_\varepsilon(x,t))]_{x^i} \\ & + \int_0^l K(x,\xi)[\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t) + g(v_\varepsilon(\xi,t))] d\xi. \end{aligned} \tag{5.1.76}$$

由式 (5.1.76) 知 $v_{\varepsilon x^{2j}t^2}(x,t) \in C([0,t];C[0,l])$.

当 $k-1=2j-1\ (j=1,2,\cdots)$ 时, 应用前面同样的方法得

$$v_{\varepsilon x^{2j-1}t^2}(x,t)\in C([0,t];C[0,l]).$$

应用数学归纳法可证

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{\varepsilon x^{k-1}t^{m+2}}(\cdot,t)\|_{C[0,l]}\leqslant M_9(T). \tag{5.1.77}$$

□

定理 5.1.2　设 $v_0,v_1\in C^3[0,l]$ 满足边值条件 (5.1.15) 和 $g\in C^3(\mathbb{R})$ 满足条件 (5.1.42), 则问题 (5.1.32), (5.1.33) 的整体广义解 $v_\varepsilon(x,t)$ 是下列问题

$$v_{tt}-\varepsilon v_{xx}-v_{xxtt}=g(v)_{xx}, \tag{5.1.78}$$

$$v(0,t)=v(l,t)=0, \tag{5.1.79}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad v_t(x,0)=v_1(x) \tag{5.1.80}$$

的整体古典解.

证明　定理 5.1.2 的假定和引理 5.1.4 的结论指出 $v_\varepsilon(x,t)\in C^3([0,\infty);C^2[0,l])$. 因为 $v_\varepsilon(x,t)$ 是问题 (5.1.32), (5.1.33) 的整体广义解, $v_\varepsilon(x,t)$ 满足

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(x,t)=&\,v_0(x)+v_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)\{\varepsilon v_\varepsilon(x,\tau)+g(v_\varepsilon(x,\tau))\}d\tau\\&+\int_0^t\int_0^l(t-\tau)K(x,\xi)\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,\tau)+g(v_\varepsilon(\xi,\tau))\}d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{5.1.81}$$

$$v_\varepsilon(0,t)=v_\varepsilon(l,t)=0. \tag{5.1.82}$$

由式 (5.1.81) 和 (5.1.82) 易知, $v_\varepsilon(x,t)$ 满足初边值条件 (5.1.79) 和 (5.1.80). 现在证明 $v_\varepsilon(x,t)$ 满足方程 (5.1.78). 方程 (5.1.81) 对 t 求导两次, 得

$$v_{\varepsilon tt}(x,t)=-\left\{\varepsilon v_\varepsilon(x,t)+g(v_\varepsilon(x,t))\right\}+\int_0^l K(x,\xi)\left\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t)+g(v_\varepsilon(\xi,t))\right\}d\xi. \tag{5.1.83}$$

方程 (5.1.83) 对 x 求导两次, 有

$$\begin{aligned}v_{\varepsilon xxtt}(x,t)=&-\left\{\varepsilon v_{\varepsilon xx}(x,t)+g(v_\varepsilon(x,t))_{xx}\right\}-\left\{\varepsilon v_\varepsilon(x,t)+g(v_\varepsilon(x,t))\right\}\\&+\int_0^l K_{xx}(x,\xi)\left\{\varepsilon v_\varepsilon(\xi,t)+g(v_\varepsilon(\xi,t))\right\}d\xi.\end{aligned} \tag{5.1.84}$$

注意到 $K(x,\xi)=K_{xx}(x,\xi)\ (x\neq\xi)$ 和由方程 (5.1.83) 减去方程 (5.1.84), 看出 $v_\varepsilon(x,t)$ 满足方程 (5.1.78). 解的唯一性是显然的. □

定理 5.1.3 设 $v_0, v_1 \in C^2[0,l]$ 满足边值条件 (5.1.15) 和 $g \in C^2(\mathbb{R})$ 满足条件 (5.1.42), 则问题 (5.1.14), (5.1.16), (5.1.18) 有唯一整体广义解 $v(x,t) \in C([0,T]; C[0,l])(\forall T > 0)$.

证明 在定理 5.1.3 的条件下, 由引理 5.1.4 推出问题 (5.1.32), (5.1.33) 的整体广义解 $v_\varepsilon(x,t) \in C^2([0,T]; C^1[0,l])$. 由估计 (5.1.61), (5.1.66) 和 (5.1.68) 看出 $\{v_\varepsilon(x,t)\}, \{v_{\varepsilon x}(x,t)\}$ 和 $\{v_{\varepsilon t}(x,t)\}$ 在 $C([0,T]; C[0,l])$ 中关于 ε 是一致有界的. 根据 Ascoli-Arzelá 定理, 我们可以从 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$, 使得存在一函数 $v(x,t) \in C([0,T]; C[0,l])$ 和当 $\varepsilon \to 0$ 时, 子序列 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$ 在 $[0,l] \times [0,T]$ 上一致收敛于 $v(x,t)$. 因为 $g(s)$ 是一连续函数, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $g(v_\varepsilon(x,t))$ 一致收敛于 $g(v(x,t))$. 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 具有边值条件 (5.1.82) 的积分方程 (5.1.81) 一致收敛于具有边值条件 (5.1.30) 的积分方程 (5.1.28). 因此 $v(x,t)$ 是问题 (5.1.14), (5.1.16), (5.1.18) 的整体广义解. 解的唯一性是显然的. □

定理 5.1.4 设 $v_0, v_1 \in C^4[0,l]$ 满足边值条件 (5.1.5) 和 $g \in C^5(\mathbb{R})$ 满足条件 (4.1.42), 则问题 (5.1.14), (5.1.16), (5.1.18) 存在唯一整体古典解 $v(x,t) \in C^2([0,T]; C^2[0,l])$ $(\forall T > 0)$.

证明 在定理 5.1.4 的条件下, 由引理 5.1.4 推出问题 (5.1.14), (5.1.16), (5.1.18) 的整体广义解 $v_\varepsilon(x,t) \in C^3([0,T]; C^3[0,l])(\forall T > 0)$. 由估计 (5.1.77) 可知, 序列 $\{v_{\varepsilon x^i t^j}(x,t)\}$ $(i,j = 0,1,2,3)$ 在 $C([0,T]; C[0,l])$ 中关于 ε 是一致有界的. 根据 Ascoli-Arzelá 定理, 可以从 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$ 中抽出子序列, 仍记为 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$, 使得存在一函数 $v(x,t) \in C([0,T]; C[0,l])$ 和当 $\varepsilon \to 0$ 时, 子序列 $\{v_\varepsilon(x,t)\}$ 在 $[0,l] \times [0,T]$ 上一致收敛于 $v(x,t)$. 对应的导数子序列 $\{v_{\varepsilon x}(x,t)\}$, $\{v_{\varepsilon t}(x,t)\}, \{v_{\varepsilon xx}(x,t)\}, \{v_{\varepsilon tt}(x,t)\}$ 和 $\{v_{\varepsilon xxtt}(x,t)\}$ 在 $[0,l] \times [0,T]$ 上也分别一致收敛于 $v_x(x,t), v_t(x,t), v_{xx}(x,t), v_{tt}(x,t)$ 和 $v_{xxtt}(x,t)$. 将 $v_\varepsilon(x,t)$ 代入问题 (5.1.78)–(5.1.80), 并令 $\varepsilon \to 0$, 得到 $v(x,t)$ 是问题 (5.1.14), (5.1.16), (5.1.18) 的整个古典解. 唯一性是显然的. □

5.1.3 问题 (5.1.13)–(5.1.18) 的整体解

定理 5.1.5 设 $u_0, u_1 \in C[0,l]$ 满足边值条件 (5.1.15), $v_0, v_1 \in C^2[0,l]$ 满足边值条件 (5.1.16), $g \in C^2(\mathbb{R})$ 满足条件 (5.1.42) 和 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 则问题 (5.1.13)–(5.1.18) 存在唯一整体广义解 $(u,v) \in C([0,T]; C[0,l])(\forall T > 0)$.

证明 在定理 5.1.5 的条件下, 根据定理 5.1.3, 我们知道问题 (5.1.14), (5.1.16), (5.1.18) 有唯一的整体广义解 $v(x,t) \in C([0,T]; C[0,l])$. 将此解 $v(x,t)$ 代入积分方程 (5.1.28) 得到下列问题

$$u(x,t) = u_0(x) + u_1(x)t - \int_0^t (t-\tau)\{Du(x,t) + f(v(x,\tau))\}d\tau$$

$$+\int_0^t\int_0^l (t-\tau)K(x,\xi)\{Du(\xi,\tau)+f(v(\xi,\tau))\}d\xi d\tau, \tag{5.1.85}$$

$$u(0)=u(l)=0. \tag{5.1.86}$$

积分方程 (5.1.85) 关于 $u(x,t)$ 是一线性积分方程. 应用证明具有边值条件 (5.1.31) 的积分方程 (5.1.29) 存在整体广义解的同样方法, 能得到问题 (5.1.13), (5.1.15), (5.1.17) 的整体广义解 $u\in C([0,T];C[0,l])$. 于是 $(u,v)\in C([0,T];C[0,l])$ 是问题 (5.1.13)–(5.1.18) 的整体广义解.

现在证明问题 (5.1.13)–(5.1.18) 解的唯一性, 设 $(u(x,t),v(x,t))$ 和 $(\overline{u}(x,t),\overline{v}(x,t))$ 是问题 (5.1.13)–(5.1.18) 的两个解, 则 $w(x,t)=u(x,t)-\overline{u}(x,t)$, $w_1(x,t)=v(x,t)-\overline{v}(x,t)$ 满足下列问题

$$\begin{aligned}w(x,t)=&-\int_0^t (t-\tau)\{Dw(x,\tau)+f(v(x,\tau))-f(\overline{v}(x,\tau))\}d\tau\\&+\int_0^t\int_0^l (t-\tau)K(x,\xi)\{Dw(\xi,\tau)+f(v(\xi,\tau))-f(\overline{v}(\xi,\tau))\}d\xi d\tau,\end{aligned} \tag{5.1.87}$$

$$\begin{aligned}w_1(x,t)=&-\int_0^t (t-\tau)\{g(v(x,\tau))-g(\overline{v}(x,\tau))\}d\tau\\&+\int_0^t\int_0^l (t-\tau)K(x,\xi)\{g(v(\xi,\tau))-g(\overline{v}(\xi,\tau))\}d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{5.1.88}$$

对于 f 和 g 应用中值定理, 由式 (5.1.87) 和 (5.1.88) 推得

$$\|w(\cdot,t)\|_{C[0,l]}+\|w_1(\cdot,t)\|_{C[0,l]}\leqslant \overline{C}(T)\int_0^t\{\|w(\cdot,\tau)\|_{C[0,l]}+\|w_1(\cdot,\tau)\|_{C[0,l]}\}d\tau. \tag{5.1.89}$$

解的唯一性得证. □

定理 5.1.6　设 $u_0,u_1\in C^2[0,l]$ 满足边值条件 (5.1.15), $v_0,v_1\in C^4[0,l]$ 满足条件 (5.1.16), $g\in C^5(\mathbb{R})$ 满足条件 (5.1.42) 和 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 则问题 (5.1.13)–(5.1.18) 有唯一整体古典解 $(u,v)\in C^2([0,T];C^2[0,l])(\forall T>0)$.

证明　在定理 5.1.6 的条件下, 根据定理 5.1.4, 我们知道问题 (5.1.14), (5.1.16), (5.1.18) 有唯一整体古典解 $v\in C^2([0,T];C^2[0,l])$. 将此解 $v(x,t)$ 代入积分方程 (5.1.28), 得到问题 (5.1.85), (5.1.86), 其中 $v\in C^2([0,T];C^2[0,l])$. 积分方程 (5.1.85) 关于 $u(x,t)$ 是一线性积分方程. 应用证明定理 5.1.2 的同样方法, 能够得到问题 (5.1.13),(5.1.15), (5.1.17) 的整体古典解 $u\in C^2([0,T];C^2[0,l])$. 所以 $(u,v)\in C^2([0,T];C^2[0,l])$ 是问题 (5.1.13)–(5.1.18) 的整体古典解. □

5.1.4　与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [312]. 与本节内容有关的文献见 [32], [35], [37], [53], [160],

[164], [174], [313]–[316].

5.2 源于 DNA 的广义 IMBq 方程组的 Cauchy 问题

5.2.1 引言

5.1 节证明了源于 DNA 的广义 IMBq 型方程组的初边值问题存在唯一整体广义解和唯一整体古典解. 本节研究下列源于 DNA 的广义 IMBq 型方程组的 Cauchy 问题

$$u_{tt}(x,t)-\sigma u_{xx}(x,t)-u_{xxtt}(x,t)=f(v(x,t))_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{5.2.1}$$

$$v_{tt}(x,t)-v_{xxtt}(x,t)=g(v(x,t))_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{5.2.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{5.2.3}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad v_t(x,0)=v_1(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{5.2.4}$$

其中 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 表示未知函数; $\sigma>0$ 是常数; $f(y)$ 和 $g(y)$ 是给定的非线性函数; $u_0(x)$, $u_1(x)$, $v_0(x)$, $v_1(x)$ 是给定的定义在 $\mathbb{R}$ 上的初值函数.

为了讨论简单起见, Cauchy 问题 (5.2.1)–(5.2.4) 可以写成以下的向量形式:

$$\boldsymbol{W}_{tt}-\boldsymbol{W}_{xxtt}=\boldsymbol{F}(u,v)_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{5.2.5}$$

$$\boldsymbol{W}(x,0)=\boldsymbol{W}_0(x),\quad \boldsymbol{W}_t(x,0)=\boldsymbol{W}_1(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{5.2.6}$$

其中

$$\boldsymbol{W}(x,t)=\begin{pmatrix}u(x,t)\\ v(x,t)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}(u,v)=\begin{pmatrix}f(v(x,t))+\sigma u(x,t)\\ g(v(x,t))\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{W}_0(x)=\begin{pmatrix}u_0(x)\\ v_0(x)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{W}_1(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\ v_1(x)\end{pmatrix}.$$

在不同的初值条件和其他的条件下为了得到 Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) 不同的整体广义解, 我们将证明 Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6), 当 $s\geqslant 2$ (s 为实数) 时, 在 $C^2([0,\infty);H^s\times H^s)$ 中存在唯一整体广义解, 而当 $s\geqslant\dfrac{5}{2}$ 时, 在空间 $C^2([0,\infty);H^s\times H^s)$ 中 [即在 $C^2([0,\infty);C^2(\mathbb{R})\times C^2(\mathbb{R}))$ 中] 存在唯一整体古典解. 还证明 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6), 当 $m\geqslant 2$ (m 为整数) 时, 在 $C^2([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$ 中有唯一的整体广义解, 且当 $m>2+\dfrac{1}{p}$ 时, 在 $C^2([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$ 中 [即在 $C^2([0,\infty);C^2(\mathbb{R})\cap L^\infty\times C^2(\mathbb{R})\cap L^\infty)$ 中] 有唯一整体古典解.

5.2.2 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 在 $C^2([0,\infty);H^s\times H^s)$ 中整体解的存在性和唯一性

1. Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 局部解的存在性和唯一性

下面应用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 存在唯一局部解. 为此, 形式地将方程组 (5.2.5) 写为

$$\boldsymbol{W}_{tt}=L[\boldsymbol{F}(u,v)], \tag{5.2.7}$$

其中 $L=(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x^2$; 下面用到的 $G(x)$ 是常微分方程

$$y(x)-\frac{d^2}{dx^2}y(x)=0$$

的基本解, 即 $G(x)=\dfrac{1}{2}\exp(-|x|)$, $x\in\mathbb{R}$. 因为 $Lh=G*h-h$, 所以方程组 (5.2.7) 也可以形式地写为

$$\boldsymbol{W}_{tt}=G*\boldsymbol{F}(u,v)-\boldsymbol{F}(u,v). \tag{5.2.8}$$

方程 (5.2.7) 对 t 积分两次, 并注意到初值条件 (5.2.6), Cauchy 问题 (5.2.7), (5.2.6) 形式地化为下列积分方程组

$$\boldsymbol{W}(x,t)=\boldsymbol{W}_0(x)+\boldsymbol{W}_1(x)t+\int_0^t(t-\tau)L[\boldsymbol{F}(u(x,\tau),v(x,\tau))]d\tau. \tag{5.2.9}$$

定义 5.2.1　对任意的 $T>0$, 如果 $s\geqslant 2$, $\boldsymbol{W}_0,\boldsymbol{W}_1\in H^s\times H^s$ ($\boldsymbol{W}_0\in H^s\times H^s$ 意指 $u_0\in H^s$, $v_0\in H^s$) 和 $\boldsymbol{W}\in C^2([0,T];H^s\times H^s)$ 满足积分方程组 (5.2.9), 则称 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 为积分方程组 (5.2.9) 的连续解或者称为 Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) 的广义解. 如果 $T<\infty$, 则称 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 为 Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) 的局部广义解. 如果 $T=\infty$, 则 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) 的整体广义解.

下面假定 $f(0)=0$ 和 $g(0)=0$. 对于 $s>\dfrac{1}{2}$, $\boldsymbol{W}_0\in H^s\times H^s$ 和 $\boldsymbol{W}_1\in H^s\times H^s$, 考虑 Banach 空间

$$X(T)=\{\boldsymbol{W}|\boldsymbol{W}\in C([0,T];H^s\times H^s)\},$$

并赋予范数

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{W}\|_{X(T)}&=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{W}\|_{H^s\times H^s}\\&=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(\cdot,t)\|_{H^s},\quad\forall\boldsymbol{W}\in X(T).\end{aligned}$$

由 Sobolev 嵌入定理知

$$\boldsymbol{W}\in C([0,T];L^\infty\times L^\infty),\quad\forall\boldsymbol{W}\in X(T)$$

和 $\|\boldsymbol{W}\|_{L^\infty\times L^\infty}\leqslant K_2\|\boldsymbol{W}\|_{H^s\times H^s}$.

我们定义映射 S 如下

$$S\boldsymbol{Q}(x,t)=\boldsymbol{W}_0(x)+\boldsymbol{W}_1(x)t+\int_0^t(t-\tau)L[\boldsymbol{F}(\varphi(x,\tau),\psi(x,\tau))]d\tau, \tag{5.2.10}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(x,t)=\begin{pmatrix}\varphi(x,t)\\ \psi(x,t)\end{pmatrix}$. 显然, 如果 $f\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ 和 $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, 则 $S: X(T)\mapsto X(T)$.

现在, 对任意初值函数 $\boldsymbol{W}_0,\boldsymbol{W}_1\in H^s\times H^s$, 令 $\|\boldsymbol{W}_0\|_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{W}_1\|_{H^s\times H^s}=a$, 定义

$$Y(a,T)=\{\boldsymbol{W}|\boldsymbol{W}\in X(T),\|\boldsymbol{W}\|_{X(T)}\leqslant a+1\}.$$

显然, 对每一个 $a,T>0$, $Y(a,T)$ 是 $X(T)$ 中的一个不空有界闭凸子集. 我们要证明 S 在 $Y(a,T)$ 中有唯一不动点.

引理 5.2.1 对于所有的 $s\geqslant 0$, L 是 H^s 上的有界算子, 且

$$\|Lh\|_{H^s}\leqslant\|h\|_{H^s},\quad \forall h\in H^s.$$

证明 对于 $h\in H^s$, $s\geqslant 0$, 有

$$\|Lh\|_{H^s}^2=\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s\frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^2}|\hat{h}(\xi)|^2d\xi\leqslant\|h\|_{H^s}^2.$$ □

引理 5.2.2 假设 $s>\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1\in H^s\times H^s$, $f\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ 且 $g(0)=0$, 则 S 映 $Y(a,T)$ 到 $Y(a,T)$, 且如果 T 相对于 a 适当小, 则 $S:Y(a,T)\mapsto Y(a,T)$ 是严格压缩的.

证明 首先证明对于足够小的 T, S 映 $Y(a,T)$ 到自身. 令 $\boldsymbol{Q}\in Y(a,T)$ 给定. 由引理 5.2.1 和引理 1.8.13 有

$$\begin{aligned}&\|L[\boldsymbol{F}(\varphi(\cdot,t),\psi(\cdot,t))]\|_{H^s\times H^s}\\ =&\|L[f(\psi(\cdot,t))+\sigma\varphi(\cdot,t)]\|_{H^s}+\|L[g(\psi(\cdot,t))]\|_{H^s}\\ \leqslant&\|f(\psi(\cdot,t))+\sigma\varphi(\cdot,t)\|_{H^s}+\|g(\psi(\cdot,t))\|_{H^s}\\ \leqslant&K(K_2a+K_2)\|\psi(\cdot,t)\|_{H^s}+\sigma\|\varphi(\cdot,t)\|_{H^s}+K(K_2a+K_2)\|\psi(\cdot,t)\|_{H^s}\\ \leqslant&[2K(K_2a+K_2)+\sigma](a+1),\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

其中 $K(K_2a+K_2)$ 表示 K 是依赖于 K_2a+K_2 的常数, 而 K 是出现在引理 1.8.13 中的常数.

由式 (5.2.10) 和 (5.2.11) 推出

$$
\begin{aligned}
\|S\boldsymbol{Q}\|_{H^s\times H^s} \leqslant & \|\boldsymbol{W}_0\|_{H^s\times H^s} + \|\boldsymbol{W}_1\|_{H^s\times H^s}T \\
& + \int_0^t (t-\tau)\|L[\boldsymbol{F}(\varphi(\cdot,\tau),\psi(\cdot,\tau))]\|_{H^s\times H^s}d\tau \\
\leqslant & a + aT + \frac{1}{2}[2K(K_2a+K_2)+\sigma](a+1)T^2.
\end{aligned} \tag{5.2.12}
$$

如果 T 满足

$$
T \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{a+\frac{1}{2}(a+1)[2K(K_2a+K_2)+\sigma]}\right\}, \tag{5.2.13}
$$

则 $\|S\boldsymbol{Q}\|_{X(T)} \leqslant a+1$. 所以, 如果式 (5.2.13) 成立, 于是 S 映 $Y(a,T)$ 到 $Y(a,T)$.

下面将证明映射 S 是严格压缩的. 令 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2 \in Y(a,T)$, 其中$\boldsymbol{Q}_i(x,t) = \begin{pmatrix}\varphi_i(x,t)\\ \psi_i(x,t)\end{pmatrix}(i=1,2)$. 应用 Minkowski 积分不等式, 引理 5.2.1, 引理 1.8.14 和式 (5.2.10), 可知

$$
\begin{aligned}
& \|S\boldsymbol{Q}_1 - S\boldsymbol{Q}_2\|_{H^s\times H^s} \\
\leqslant & \int_0^t (t-\tau)\|L[\boldsymbol{F}(\varphi_1(\cdot,\tau),\psi_1(\cdot,\tau)) - \boldsymbol{F}(\varphi_2(\cdot,\tau),\psi_2(\cdot,\tau))]\|_{H^s\times H^s}d\tau \\
= & \int_0^t (t-\tau)\Big\{\|L[f(\psi_1(\cdot,\tau)) - f(\psi_2(\cdot,\tau))]\|_{H^s} + \sigma\|L[\varphi_1(\cdot,\tau)-\varphi_2(\cdot,\tau)]\|_{H^s} \\
& + \|L[g(\psi_1(\cdot,\tau)) - g(\psi_2(\cdot,\tau))]\|_{H^s}\Big\}d\tau \\
\leqslant & \int_0^t (t-\tau)\Big\{\|f(\psi_1(\cdot,\tau)) - f(\psi_2(\cdot,\tau))\|_{H^s} + \sigma\|\varphi_1(\cdot,\tau)-\varphi_2(\cdot,\tau)\|_{H^s} \\
& + \|g(\psi_1(\cdot,\tau)) - g(\psi_2(\cdot,\tau))\|_{H^s}\Big\}d\tau \\
\leqslant & \Big\{2K_1(K_2a+K_2)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(\psi_1(\cdot,\tau)) - (\psi_2(\cdot,\tau))\|_{H^s} \\
& + \sigma\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi_1(\cdot,\tau)-\varphi_2(\cdot,\tau)\|_{H^s}\Big\}T^2 \\
= & [2K_1(K_2a+K_2)+\sigma]\|\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2\|_{X(T)}T^2.
\end{aligned} \tag{5.2.14}
$$

如果 T 满足

$$
T \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{a+\frac{1}{2}(a+1)[2K(K_2a+K_2)+\sigma]}, \frac{1}{2[2K_1(K_2a+K_2)+\sigma]}\right\}, \tag{5.2.15}
$$

则 $\|SQ_1 - SQ_2\|_{X(T)} \leqslant \frac{1}{2}\|Q_1 - Q_2\|_{X(T)}$, 即 S 映 $Y(a,T)$ 到 $Y(a,T)$, 且 S 是严格压缩的. □

定理 5.2.1 设 $s > \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1 \in H^s \times H^s$, $f \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $g \in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ 且 $g(0) = 0$, 则 Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) 存在唯一局部广义解 $\boldsymbol{W} \in C^2([0,T_0); H^s \times H^s)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)} [\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} + \|\boldsymbol{W}_t(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}] < \infty, \tag{5.2.16}$$

则 $T_0 = \infty$.

证明 由引理 5.2.2 和压缩映射原理可知, 对于适当选择的 $T > 0$, S 有唯一不动点 $\boldsymbol{W} \in Y(a,T)$, 它显然是积分方程组 (5.2.9) 的解. 对于每一个 $T' > 0$, 积分方程组 (5.2.9) 最多有一解属于 $X(T')$. 事实上, 令 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2 \in X(T')$ 是积分方程组 (5.2.9) 的两个解, 其中 $\boldsymbol{W}_i(x,t) = \begin{pmatrix} u_i(x,t) \\ v_i(x,t) \end{pmatrix} (i = 1,2)$, 则对于 $0 \leqslant t \leqslant T'$,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{W}_1(x,t) - \boldsymbol{W}_2(x,t) \\ =& \int_0^t (t-\tau)L[\boldsymbol{F}(u_1(x,\tau), v_1(x,\tau)) - \boldsymbol{F}(u_2(x,\tau), v_2(x,\tau))]d\tau. \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

用引理 5.2.2 中的方法, 由式 (5.2.17) 得

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{W}_1(\cdot,t) - \boldsymbol{W}_2(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} \\ \leqslant& [2K_1(K_2 a + K_2) + \sigma]T' \int_0^t \|\boldsymbol{W}_1(\cdot,t) - \boldsymbol{W}_2(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} d\tau. \end{aligned}$$

Gronwall 不等式给出, 对于 $0 \leqslant t \leqslant T'$, $\|\boldsymbol{W}_1(\cdot,t) - \boldsymbol{W}_2(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} = 0$, 即积分方程组 (5.2.9) 最多有一解属于 $X(T')$.

积分方程组 (5.2.9) 对 t 求导两次, 并利用引理 5.2.1 和引理 1.8.13, 有

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{W}_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} &= \|L[\boldsymbol{F}(u(\cdot,t), v(\cdot,t))]\|_{H^s\times H^s} \\ &= \|L[f(v(\cdot,t)) + \sigma u(\cdot,t)]\|_{H^s} + \|Lg(v(\cdot,t))\|_{H^s} \\ &\leqslant \|f(v(\cdot,t)) + \sigma u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|g(v(\cdot,t))\|_{H^s} \\ &\leqslant 2K(K_2 a + K_2)\|v(\cdot,t)\|_{H^s} + \sigma\|u(\cdot,t)\|_{H^s} \\ &\leqslant [2K(K_2 a + K_2) + \sigma]\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}, \end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{W} \in C^2([0,T_0); H^s \times H^s).$$

现在, 设 $[0,T_0)$ 是 $\boldsymbol{W}\in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 下面仅剩下指出如果式 (5.2.16) 成立, 则 $T_0=\infty$. 此结论可以用证明定理 2.1.1 的方法证明. □

下面证明 Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) 解的延拓条件 (5.2.16) 转化为下面的解的延拓条件 (5.2.18), 即证明下列定理.

定理 5.2.2　假设 $s>\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{W}_0,\boldsymbol{W}_1\in H^s\times H^s$, $f\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$ 和 $g(0)=0$, 则 Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) 存在唯一局部解 $\boldsymbol{W}\in C^2([0,T_0);H^s\times H^s)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)}\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{L^\infty\times L^\infty}<M_1, \tag{5.2.18}$$

则 $T_0=\infty$.

证明　由方程组 (5.2.7) 和 Hölder 不等式推出

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{W}_t(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}\Big)\\
=&\frac{d}{dt}\Big(\|u(\cdot,t))\|^2_{H^s}+\|v(\cdot,t))\|^2_{H^s}+\|u_t(\cdot,t))\|^2_{H^s}+\|v_t(\cdot,t))\|^2_{H^s}\Big)\\
=&\frac{d}{dt}\Big(\|(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u(\cdot,t)\|^2+\|(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}v(\cdot,t)\|^2+\|(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\|^2\\
&+\|(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}v_t(\cdot,t)\|^2\Big)\\
=&2\Big\{\langle(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u(\cdot,t),(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\rangle+\langle(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}v(\cdot,t),(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}v_t(\cdot,t)\rangle\\
&+\langle(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t),(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_{tt}(\cdot,t)\rangle+\langle(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}v_t(\cdot,t),(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}v_{tt}(\cdot,t)\rangle\Big\}\\
=&2\Big\{\langle(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u(\cdot,t),(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\rangle+\langle(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}v(\cdot,t),(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}v_t(\cdot,t)\rangle\\
&+\langle(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}L[f(v(\cdot,t))+\sigma u(\cdot,t)],(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u_t(\cdot,t)\rangle\\
&+\langle(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}L[g(v(\cdot,t))],(I-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}v_t(\cdot,t)\rangle\Big\}\\
\leqslant&2\Big\{\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}+\|v(\cdot,t)\|_{H^s}\|v_t(\cdot,t)\|_{H^s}\\
&+\|L[f(v(\cdot,t))+\sigma u(\cdot,t)]\|_{H^s}\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}+\|L[g(v(\cdot,t))]\|_{H^s}\|v_t(\cdot,t)\|_{H^s}\Big\}.
\end{aligned}\tag{5.2.19}$$

利用引理 5.2.1, 引理 1.8.13 和式 (5.2.18) , 有

$$\begin{aligned}
\|L[f(v(\cdot,t))+\sigma u(\cdot,t)]\|_{H^s}&\leqslant\|f(v(\cdot,t))\|_{H^s}+\sigma\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\\
&\leqslant K(M_1)\|v(\cdot,t)\|_{H^s}+\sigma\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\\
&\leqslant(K(M_1)+\sigma)\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s},
\end{aligned}\tag{5.2.20}$$

$$\|L[g(v(\cdot,t))]\|_{H^s}\leqslant K(M_1)\|v(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant K(M_1)\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}. \tag{5.2.21}$$

将式 (5.2.20) 和式 (5.2.21) 代入式 (5.2.19), 并应用 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{W}_t(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}\Big)\\ &\leqslant[2K(M_1)+\sigma+2]\Big(\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{W}_t(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}\Big).\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{W}_t(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}\\ \leqslant&\Big(\|\boldsymbol{W}_0(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{W}_1(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}\Big)e^{[2K(M_1)+\sigma+2]t},\quad \forall t\in[0,T_0).\end{aligned}$$

由定理 5.2.1 知 $T_0=\infty$. □

2. Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) **整体广义解和整体古典解的存在性和唯一性**

现在, 证明问题 (5.2.5),(5.2.6) 整体广义解和整体古典解的存在性和唯一性. 为此, 引入下面有用的引理.

引理 5.2.3 假设 $s\geqslant 2$, $v_0\in H^s$, $\Lambda^{-1}v_1\in L^2$, $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $z(v)=\int_0^v g(y)dy$ 和 $z(v_0)\in L^1$, 则对于问题 (5.2.5),(5.2.6) 的广义解有能量等式

$$E(t)=\|\Lambda^{-1}v_t(\cdot,t)\|^2+\|v_t(\cdot,t)\|^2+2\int_{\mathbb{R}}z(v(x,t))dx=E(0).\tag{5.2.22}$$

证明 由定理 5.2.1 可知, 对于 $T<T_0$, $\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}_t,\boldsymbol{W}_{tt}\in H^s\times H^s$. 根据 Sobolev 嵌入定理有 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}_t,\boldsymbol{W}_{tt}\in L^\infty\times L^\infty$. 由方程组 (5.2.7) 推出

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{-2}\boldsymbol{W}_{tt}\|&=\||\xi|^{-2}\widehat{\boldsymbol{W}}_{tt}\|=\||\xi|^{-2}[\widehat{L\boldsymbol{F}(u,v)}]\|\\ &=\||\xi|^{-2}\frac{-|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\widehat{\boldsymbol{F}(u,v)}\|\\ &\leqslant\|\boldsymbol{F}(u,v)\|=\|f(v)+\sigma u\|+\|g(v)\|\\ &\leqslant 2K(K_2a+K_2)\|v\|+\sigma\|u\|\\ &\leqslant[2K(K_2a+K_2)+\sigma]\|\boldsymbol{W}\|,\end{aligned}$$

因此 $\Lambda^{-2}\boldsymbol{W}_{tt}\in L^2$. 由方程组 (5.2.7) 的第二个分量得

$$\Lambda^{-2}v_{tt}=\Lambda^{-2}L[g(v)].\tag{5.2.23}$$

式 (5.2.23) 两端取 Fourier 变换后, 两端同乘以 $(1+|\xi|^2)\hat{v}_t$, 且在 $\mathbb{R}$ 上对 ξ 积分, 有

$$\langle|\xi|^{-2}(1+|\xi|^2)\hat{v}_{tt},\hat{v}_t\rangle+\langle\widehat{g(v)},\hat{v}_t\rangle=0.\tag{5.2.24}$$

式 (5.2.24) 取 Fourier 逆变换可见

$$\langle \Lambda^{-2}v_{tt}+v_{tt}+g(v),v_t\rangle=0. \tag{5.2.25}$$

从式 (5.2.25) 推出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\Lambda^{-1}v_t(\cdot,t)\|^2+\|v_t(\cdot,t)\|^2+2\int_{\mathbb{R}}z(v(x,t))dx\Big)=0. \tag{5.2.26}$$

在 $(0,t)$ 上对式 (5.2.26) 积分, 便得式 (5.2.2). □

定理 5.2.3 假设 $s\geqslant 2$, $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1\in H^s\times H^s$, $\Lambda^{-1}\boldsymbol{W}_1\in L^2\times L^2$, $f\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, $g\in C^{[s]+1}(\mathbb{R})$, $g(0)=0$, $z(v)\geqslant 0$. 如果存在 γ $(1\leqslant\gamma\leqslant\infty)$, 使得

$$|g(v)|\leqslant A[z(v)]^{\frac{1}{\gamma}}|v|+B, \tag{5.2.27}$$

其中 A, $B>0$ 是常数, 则 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 有唯一整体广义解 $\boldsymbol{W}\in C^2([0,\infty);H^s\times H^s)$.

证明 依照定理 5.2.2 只需证明条件 (5.2.18) 成立即可. 方程组 (5.2.8) 的第二个分量两端同乘以 $v_t(x,t)$, 且两端各加上 $2v(x,t)v_t(x,t)$, 有

$$\frac{d}{dt}\Big[v_t^2(x,t)+v^2(x,t)+2z(v(x,t))\Big]=2(G*g(v))(x,t)v_t(x,t)+2v(x,t)v_t(x,t). \tag{5.2.28}$$

应用假设 (5.2.27) 和 Young 不等式, 可见

$$\begin{aligned}|(G*g(v))(x,t)|&\leqslant A[G*[z(v)]^{\frac{1}{\gamma}}|v|](x,t)+B\\&\leqslant A\|G\|_q\|[z(v)]^{\frac{1}{\gamma}}|v|\|_\gamma+B\\&\leqslant A\|G\|_q\|v\|_\infty\|z(v)\|_1^{\frac{1}{\gamma}}+B,\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

其中 $\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{q}=1$. 由引理 5.2.3, $\|G\|_q$ 的有界性和式 (4.2.29) 推得

$$|(G*g(v))(x,t)|\leqslant C_1\|v(\cdot,t)\|_\infty+B. \tag{5.2.30}$$

将式 (5.2.30) 代入式 (5.2.28) 可知

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[v_t^2(x,t)+v^2(x,t)+2z(v(x,t))\Big]\\&\leqslant 2C_1\|v(\cdot,t)\|_\infty\|v_t(\cdot,t)\|_\infty+2\|v(\cdot,t)\|_\infty\|v_t(\cdot,t)\|_\infty+2B\|v_t(\cdot,t)\|_\infty.\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

式 (5.2.31) 对 t 积分, 并应用 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\|v_t(\cdot,t)\|_\infty^2+\|v(\cdot,t)\|_\infty^2+2\|z(v(\cdot,t))\|_\infty^2\\&\leqslant\|v_1\|_\infty^2+\|v_0\|_\infty^2+2\|z(v_0)\|_\infty+C_2\\&\quad+C_3\int_0^t\Big(\|v_t(\cdot,\tau)\|_\infty^2+\|v(\cdot,\tau)\|_\infty^2\Big)d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned}$$

Gronwall 不等式给出

$$\|v(\cdot,t)\|_{\infty}^{2}+\|v_{t}(\cdot,t)\|_{\infty}^{2}\leqslant C_{4}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{5.2.32}$$

其中 $C_4(T)$ 表示依赖于 T 的常数. 方程组 (5.2.8) 的第一个分量两端同乘以 $u_t(x,t)$, 出现

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[u_{t}^{2}(x,t)+\sigma u^{2}(x,t)\Big]\\&=2(G*f(v))(x,t)u_{t}(x,t)+2\sigma(G*u)(x,t)u_{t}(x,t)-2f(v(x,t))u_{t}(x,t).\end{aligned} \tag{5.2.33}$$

因为 $\|v(\cdot,t)\|_{\infty}\leqslant\sqrt{C_4(T)}$,

$$|(G*f(v))(x,t)|\leqslant C_{5}(T).$$

易知

$$|(G*u)(x,t)|\leqslant\|u(\cdot,t)\|_{\infty}.$$

把上述不等式代入式 (5.2.33)，得

$$\frac{d}{dt}\Big[u_{t}^{2}(x,t)+\sigma u^{2}(x,t)\Big]\leqslant C_{6}(T)[\|u(\cdot,t)\|_{\infty}^{2}+\|u_{t}(\cdot,t)\|_{\infty}^{2}]+C_{7}(T).$$

Gronwall 不等式给出

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty}^{2}+\|u_{t}(\cdot,t)\|_{\infty}^{2}\leqslant C_{8}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5.2.34}$$

从式 (5.2.32) 和式 (5.2.34) 推出式 (5.2.18). □

注 5.2.1 如果 $s>\frac{5}{2}$, Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 的解 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 是整体古典解.

3. 源于 DNA 的非线性发展方程组 (5.1.1),(5.1.2) 的 Cauchy 问题

下面我们应用在子节 5.2.2 之 2. 中的 Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) 的结果到下列 Cauchy 问题

$$\frac{\rho}{a}\phi_{tt}=\beta\phi_{xx}+\frac{\beta}{2}(\psi^{2})_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^{2}}{12}\phi_{xxtt},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{5.1.1}$$

$$\frac{\rho}{a}\psi_{tt}=\frac{\beta}{2}(\psi^{3})_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^{2}}{12}\psi_{xxtt},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{5.1.2}$$

$$\phi(x,0)=\phi_{0}(x),\quad \phi_{t}(x,0)=\phi_{1}(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{5.2.35}$$

$$\psi(x,0)=\psi_{0}(x),\quad \psi_{t}(x,0)=\psi_{1}(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{5.2.36}$$

方程组 (5.1.1),(5.1.2) 可写成如下形式

$$\phi_{tt} - A\phi_{xx} - B\phi_{xxtt} = \frac{B}{2}(\psi^2)_{xx}, \tag{5.2.37}$$

$$\psi_{tt} - B\psi_{xxtt} = \frac{B}{2}(\psi^3)_{xx}, \tag{5.2.38}$$

其中 $A = \dfrac{a\beta}{\rho}$, $B = \dfrac{l^2}{12}$. 令

$$x = \sqrt{B}y, \quad t = t,$$

则方程组 (5.2.37), (5.2.38) 变为

$$\phi_{tt}(\sqrt{B}y, t) - \frac{A}{B}\phi_{yy}(\sqrt{B}y, t) - \phi_{yytt}(\sqrt{B}y, t) = \frac{A}{2B}(\psi^2(\sqrt{B}y, t))_{yy}, \tag{5.2.39}$$

$$\psi_{tt}(\sqrt{B}y, t) - \psi_{yytt}(\sqrt{B}y, t) = \frac{A}{2B}(\psi^3(\sqrt{B}y, t))_{yy}. \tag{5.2.40}$$

如果在式 (5.2.39) 和式 (5.2.40) 中用 x 表示 y 且 $\phi(\sqrt{B}y, t) = u(x, t)$, $\psi(\sqrt{B}y, t) = v(x, t)$, 则 Cauchy 问题 (5.1.1), (5.1.2), (5.2.35), (5.2.36) 可以写成

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) - \sigma u_{xx}(x,t) - u_{xxtt}(x,t) = \frac{A}{2B}(v^2(x,t))_{xx},\\
&v_{tt}(x,t) - v_{xxtt}(x,t) = \frac{A}{2B}(v^3(x,t))_{xx},\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x),\\
&v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x),
\end{aligned}$$

其中 $\sigma = \dfrac{A}{B}$, $u_0(x) = \phi_0(\sqrt{B}x)$, $u_1(x) = \phi_1(\sqrt{B}x)$, $v_0(x) = \psi_0(\sqrt{B}x)$ 和 $v_1(x) = \psi_1(\sqrt{B}x)$. 因为 $g(v) = \dfrac{1}{2}v^3$ 满足不等式 (5.2.27), 即存在 $\gamma = 2$, 使得

$$|g(v)| \leqslant \sqrt{\frac{2A}{B}}\left[\frac{A}{8B}v^4\right]^{\frac{1}{2}}|v| + 1.$$

所以应用定理 5.2.3 和注 5.2.1 有以下定理.

定理 5.2.4　假设 $s \geqslant 2$, $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1 \in H^s$, $\Lambda^{-1}\phi_1, \Lambda^{-1}\psi_1 \in L^2$, 则 Cauchy 问题 (5.1.1),(5.1.2),(5.2.35),(5.2.36) 存在唯一整体广义解 $\phi, \psi \in C^2([0,\infty); H^s)$. 若 $s > \dfrac{5}{2}$, 则 Cauchy 问题 (5.1.1),(5.1.2),(5.2.35),(5.2.36) 存在唯一整体古典解.

5.2.3　Cauchy 问题 (5.2.5),(5.2.6) 解的爆破

下面应用凸性方法研究 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 解的爆破.

定理 5.2.5 设 $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1 \in H^s \times H^s$ $\left(s > \frac{1}{2}\right)$, v_1, $\Lambda^{-1}v_1 \in L^2$, $g \in C(\mathbb{R})$, $z(v_0) \in L^1$, $f(v) = v$ 和

$$g(y)y \leqslant 2(1+2\alpha)z(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{5.2.41}$$

其中 $\alpha > 0$ 是一常数, 则 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 的解 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 在有限时刻发生爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E(0) < 0$;

(2) $E(0) = 0, \langle \Lambda^{-1}v_1, \Lambda^{-1}v_0\rangle + \langle v_1, v_0\rangle > 0$;

(3) $E(0) > 0, \langle \Lambda^{-1}v_1, \Lambda^{-1}v_0\rangle + \langle v_1, v_0\rangle > [E(0)(\|\Lambda^{-1}v_0\|^2 + \|v_0\|^2)]^{\frac{1}{2}}$, 其中

$$E(t) = \|\Lambda^{-1}v_t\|^2 + \|v_t\|^2 + 2\int_{\mathbb{R}} z(v)dx = E(0).$$

证明 设 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 解存在的最大时间为无穷. 由定理 5.2.1 可知, 对于 $T < T_0$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}_t$, $\boldsymbol{W}_{tt} \in H^s \times H^s$ $\left(s > \frac{1}{2}\right)$. 根据 Sobolev 嵌入定理有 $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}_t$, $\boldsymbol{W}_{tt} \in L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}) \times L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$. 令

$$H(t) = \|\Lambda^{-1}v(\cdot,t)\|^2 + \|v(\cdot,t)\|^2 + \beta_0(t+t_0)^2,$$

其中 β_0 和 t_0 是待定的非负常数, 则

$$\dot{H}(t) = 2\langle \Lambda^{-1}v, \Lambda^{-1}v_t\rangle + 2\langle v, v_t\rangle + 2\beta_0(t+t_0).$$

应用 Hölder 不等式, 有

$$\dot{H}(t)^2 \leqslant 4H(t)(\|\Lambda^{-1}v_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \beta_0). \tag{5.2.42}$$

依照式 (5.2.25) 和式 (5.2.41) 有

$$\begin{aligned}\ddot{H}(t) &= 2[-\langle g(v), v\rangle + \|\Lambda^{-1}v_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \beta_0] \\ &\geqslant 4(1+\alpha)(\|\Lambda^{-1}v_t\|^2 + \|v_t\|^2) + 2\beta_0 - 2(1+2\alpha)E(0).\end{aligned} \tag{5.2.43}$$

由式 (5.2.42) 和式 (5.2.43) 推出

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\alpha)\dot{H}(t)^2 \geqslant -2(1+2\alpha)(E(0)+\beta_0)H(t). \tag{5.2.44}$$

如果 $E(0) < 0$, 取 $\beta_0 = -E(0) > 0$, 式 (5.2.44) 变为

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\alpha)\dot{H}(t)^2 \geqslant 0.$$

我们有 $H(0) > 0$, 如果 t_0 充分大, 也有 $\dot{H}(0) > 0$. 由引理 1.8.7 知最多在 $T_0 = \dfrac{H(0)}{\alpha \dot{H}(0)} < \infty$ 时, $H(t)$ 变为无穷.

如果 $E(0) = 0$, 取 $\beta_0 = 0$, 得

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\alpha)\dot{H}(t)^2 \geqslant 0.$$

根据假设 (2) 有 $\dot{H}(0) > 0$. 由引理 1.8.7 知最多在 $T_0 = \dfrac{H(0)}{\alpha \dot{H}(0)} < \infty$ 时, $H(t)$ 变为无穷.

如果 $E(0) > 0$, 取 $\beta_0 = 0$, 式 (5.2.44) 变为

$$H(t)\ddot{H}(t) - (1+\alpha)\dot{H}(t)^2 \geqslant -2(1+2\alpha)E(0)H(t). \tag{5.2.45}$$

定义 $\psi(t) = H^{-\alpha}(t)$, 于是

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi}(t) = -\alpha H^{-\alpha-1}(t)\dot{H}(t), \\
&\ddot{\psi}(t) = -\alpha H^{-\alpha-2}(t)[H(t)\ddot{H}(t) - (1+\alpha)\dot{H}^2(t)] \leqslant 2\alpha(1+2\alpha)E(0)H^{-\alpha-1}.
\end{aligned} \tag{5.2.46}$$

根据假设 (3) 有 $\dot{\psi}(0) < 0$. 令

$$t^* = \sup\{\ t \mid \dot{\psi}(\tau) < 0,\ \tau \in [0,t)\ \}.$$

依照 $\dot{\psi}(t)$ 的连续性, t^* 是正的. 式 (5.2.46) 两端同乘以 $2\dot{\psi}(t)$, 得到

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\dot{\psi}(t)^2] \geqslant & -4\alpha^2(1+2\alpha)E(0)H^{-2\alpha-2}(t)\dot{H}(t) \\
& = 4\alpha^2 \frac{d}{dt}[H^{-2\alpha-1}(t)]E(0), \quad \forall t \in [0,t^*).
\end{aligned} \tag{5.2.47}$$

在 $(0,t)(0 \leqslant t < t^*)$ 上对式 (5.2.47) 积分, 有

$$\dot{\psi}(t)^2 \geqslant 4\alpha^2 E(0)H^{-2\alpha-1}(t) + \dot{\psi}(0)^2 - 4\alpha^2 E(0)H^{-2\alpha-1}(0).$$

从假定 (3) 推出

$$\dot{\psi}(0)^2 - 4\alpha^2 E(0)H^{-2\alpha-1}(0) > 0.$$

因此, 按照 $\dot{\psi}(t)$ 的连续性可知, 对于 $0 \leqslant t < t^*$,

$$\dot{\psi}(t) \leqslant -\left[\dot{\psi}(0)^2 - 4\alpha^2 E(0)H^{-2\alpha-1}(0)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2.48}$$

根据 t^* 的定义, 由式 (5.2.48) 知, 对于所有的 $t \geqslant 0$, 式 (5.2.48) 成立. 所以

$$\psi(t) \leqslant \psi(0) - \left[\psi(0)^2 - 4\alpha^2 E(0) H^{-2\alpha-1}(0)\right]^{\frac{1}{2}} t, \quad \forall\, t > 0.$$

于是对于某个 T_1,

$$0 < T_1 \leqslant T_0 = \frac{\psi(0)}{[\psi(0)^2 - 4\alpha^2 E(0) H^{-2\alpha-1}(0)]^{\frac{1}{2}}} \psi(T_1) = 0.$$

这样一来 $H(t)$ 在 T_1 处变为无穷. 所以在假设 (1) 或 (2) 或 (3) 的条件下 $H(t)$ 总在 T_1 处变为无穷.

类似于式 (5.2.25) , 可以从方程 (5.2.7) 的第一个分量, 有

$$\langle \Lambda^{-2} u_{tt} + u_{tt} + f(v) + \sigma u, v \rangle = 0. \tag{5.2.49}$$

因为 $f(v) = v$, 由式 (5.2.49) 可见

$$\begin{aligned}
\|v(\cdot,t)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} f(v(x,t)) v(x,t) dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \Big(\Lambda^{-2} u_{tt}(x,t) + u_{tt}(x,t) + \sigma u(x,t)\Big) v(x,t) dx \\
&\leqslant \frac{3}{2}\Big(\|\Lambda^{-2} u_{tt}(\cdot,t)\|^2 + \|u_{tt}(\cdot,t)\|^2 + \sigma^2 \|u(\cdot,t)\|^2\Big) + \frac{1}{2}\|v(\cdot,t)\|^2.
\end{aligned} \tag{5.2.50}$$

由式 (5.2.50) 推断出

$$\begin{aligned}
&\beta_0(1+t)^2 + \|\Lambda^{-1} v(\cdot,t)\|^2 + \|v(\cdot,t)\|^2 \\
\leqslant\, & 3\Big(\|\Lambda^{-2} u_{tt}(\cdot,t)\|^2 + \|u_{tt}(\cdot,t)\|^2 + \sigma^2 \|u(\cdot,t)\|^2\Big) + \|\Lambda^{-1} v(\cdot,t)\|^2 + \beta_0(1+t)^2.
\end{aligned} \tag{5.2.51}$$

因为在 $E(0) < 0$, $E(0) = 0$ 和 $E(0) > 0$ 三种情形下, 当 $t \to T_1$ (T_1 可能不同) 时, $H(t) \to \infty$, 由式 (5.2.51) 可知, 当 $t \to T_1$ 时,

$$3\Big(\|\Lambda^{-2} u_{tt}(\cdot,t)\|^2 + \|u_{tt}(\cdot,t)\|^2 + \sigma^2 \|u(\cdot,t)\|^2\Big) + \|\Lambda^{-1} v(\cdot,t)\|^2 + \beta_0(1+t)^2 \to \infty.$$

这与解存在的最大时间为无穷的事实矛盾, 所以解存在的最大时间是有限的. □

5.2.4 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 解在 $C([0,\infty); W^{m,p} \cap L^\infty \times W^{m,p} \cap L^\infty)$ 中的整体存在性和唯一性

现在我们通过二阶常微分方程的基本解化 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 为积分方程组. 为此, 假定 $\boldsymbol{W} \in C([0,T]; W^{2,p} \cap L^\infty \times W^{2,p} \cap L^\infty)$ 是 Cauchy 问题 (5.2.5),

(5.2.6) 的广义解. 方程组 (5.2.5) 可以重写为

$$[\boldsymbol{W}_{tt}+\boldsymbol{F}(u,v)]-[\boldsymbol{W}_{tt}+\boldsymbol{F}(u,v)]_{xx}=\boldsymbol{F}(u,v). \tag{5.2.52}$$

我们假设 $f(0)=0$, $g(0)=0$. 所以根据引理 1.8.16 知, 如果 f, $g\in C^2(\mathbb{R})$, 则 $f(u)$, $g(u)\in W^{2,p}$. 由式 (5.2.52) 得

$$\boldsymbol{W}_{tt}+\boldsymbol{F}(u,v)=G*\boldsymbol{F}(u,v), \tag{5.2.53}$$

其中 $G(x)=\dfrac{1}{2}\exp(-|x|)$.

从式 (5.2.53) 和式 (5.2.6) 知, Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 等价于下列积分方程组

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}(x,t)=&\boldsymbol{W}_0(x)+\boldsymbol{W}_1(x)t-\int_0^t(t-\tau)\boldsymbol{F}(u(x,\tau),v(x,\tau))d\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)(G*\boldsymbol{F}(u,v))(x,\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{5.2.54}$$

类似于定义 5.2.1, 给出下列定义.

定义 5.2.2　对于任意的 $T>0$, 如果 $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1\in W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty$ 和 $\boldsymbol{W}\in C^2([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$ $(m\geqslant 2)$ 满足积分方程组 (5.2.54), 其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 称为积分方程 (5.2.54) 的连续解或称为 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 的广义解. 若 $T<\infty$, 则 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 的局部广义解. 若 $T=\infty$, 则 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 的整体广义解.

现在应用压缩映射原理证明积分方程组 (5.2.54) 存在唯一局部广义解. 为此, 引入函数空间 $X(T)=C([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$ 并赋予下列范数

$$\|\boldsymbol{W}\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{L^\infty\times L^\infty}.$$

易知 $X(T)$ 是一 Banach 空间.

定义算子 $S:X(T)\mapsto X(T)$ 如下

$$\begin{aligned}S\boldsymbol{Q}(x,t)=&\boldsymbol{W}_0(x)+\boldsymbol{W}_1(x)t\\&+\int_0^t(t-\tau)\times\Big[(G*\boldsymbol{F}(\varphi,\psi))(x,\tau)-\boldsymbol{F}(\varphi(x,\tau),\psi(x,\tau))\Big]d\tau,\\&\forall\boldsymbol{Q}\in X(T),\end{aligned} \tag{5.2.55}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(x,t)=\begin{pmatrix}\varphi(x,t)\\\psi(x,t)\end{pmatrix}$. 显然, 由引理 1.8.16 易知, 如果 f, $g\in C^m(\mathbb{R})$ $(m\geqslant 2)$, $f(0)=0$, $g(0)=0$, 则 S 的定义是合理的.

对任意的初值 $\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \times W^{m,p} \cap L^\infty$, 令

$$a = \|\boldsymbol{W}_0\|_{W^{m,p}\cap L^\infty \times W^{m,p}\cap L^\infty} + \|\boldsymbol{W}_1\|_{W^{m,p}\cap L^\infty \times W^{m,p}\cap L^\infty}.$$

定义集合

$$K(a,T) = \{\boldsymbol{Q} | \boldsymbol{Q} \in X(T), \|\boldsymbol{Q}\|_{X(T)} \leqslant 2a+1\}.$$

显然, 对于每一个 a, $T>0$, $K(a,T)$ 是 $X(T)$ 中的非空有界闭凸子集. 我们的目的是指出 S 在 $K(a,T)$ 中有唯一不动点.

引理 5.2.4 设 $\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \times W^{m,p} \cap L^\infty$, $f, g \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ $(m \geqslant 0)$ 和 $f(0)=0$, $g(0)=0$, 则如果 T 相对于 a 适当小, 映射 $S: K(a,T) \mapsto K(a,T)$ 是严格压缩的.

证明 令 $\boldsymbol{Q} \in K(a,T)$. 应用引理 1.8.16 和 Young 不等式, 由式 (5.2.55) 推出

$$\begin{aligned}
\|S\boldsymbol{Q}(\cdot,t)\|_{L^\infty\times L^\infty} \leqslant{}& \|\boldsymbol{W}_0\|_{L^\infty\times L^\infty} + \|\boldsymbol{W}_1\|_{L^\infty\times L^\infty} T + T^2 \Big(\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|f(\psi(\cdot,t))\|_{L^\infty} \\
&+ \sigma \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\varphi(\cdot,t)\|_{L^\infty} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|g(\psi(\cdot,t))\|_{L^\infty} \Big) \\
\leqslant{}& \boldsymbol{W}_0\|_{L^\infty\times L^\infty} + \|\boldsymbol{W}_1\|_{L^\infty\times L^\infty} T \\
&+ T^2[2K_5(2a+1)+\sigma] \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\boldsymbol{Q}(\cdot,t)\|_{L^\infty\times L^\infty}.
\end{aligned} \tag{5.2.56}$$

类似地, 成立

$$\begin{aligned}
&\|S\boldsymbol{Q}(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}} \\
\leqslant{}& \|\boldsymbol{W}_0\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}} + \|\boldsymbol{W}_1\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}} T \\
&+ T^2 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\boldsymbol{F}(\varphi(\cdot,t),\psi(\cdot,t))\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}} \\
\leqslant{}& \|\boldsymbol{W}_0\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}} + \|\boldsymbol{W}_1\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}} T \\
&+ T^2[2K_5(2a+1)+\sigma] \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\boldsymbol{Q}(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}},
\end{aligned} \tag{5.2.57}$$

于是由式 (5.2.56), (5.2.57) 推出

$$\|S\boldsymbol{Q}\|_{X(T)} \leqslant a + aT + T^2[2K_5(2a+1)+\sigma]\|\boldsymbol{Q}\|_{X(T)}.$$

如果 T 满足

$$T = \min\left\{1, \frac{1}{[2K_5(2a+1)+\sigma](2a+1)}\right\}, \tag{5.2.58}$$

则 $\|S\boldsymbol{Q}\|_{X(T)} \leqslant 2a+1$. 因此, 如果式 (5.2.58) 成立, 则 S 映 $K(a,T)$ 到 $K(a,T)$.

现在证明 S 是严格压缩的. 令 $T>0$ 和 $\boldsymbol{Q}_i\in K(a,T)$ 给定, 其中 $\boldsymbol{Q}_i(x,t)=\begin{pmatrix}\varphi_i(x,t)\\ \psi_i(x,t)\end{pmatrix}$ $(i=1,2)$. 我们有

$$S\boldsymbol{Q}_1-S\boldsymbol{Q}_2=\int_0^t(t-\tau)\Big\{G*[\boldsymbol{F}(\varphi_1,\psi_1)-\boldsymbol{F}(\varphi_2,\psi_2)](x,\tau)\\ -[\boldsymbol{F}(\varphi_1(x,\tau),\psi_1(x,\tau))-\boldsymbol{F}(\varphi_2(x,\tau),\psi_2(x,\tau))]\Big\}d\tau. \quad (5.2.59)$$

应用中值定理, 得

$$\begin{aligned}&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|S\boldsymbol{Q}_1(\cdot,t)-S\boldsymbol{Q}_2(\cdot,t)\|_{L^\infty\times L^\infty}\\ \leqslant&T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{F}(\varphi_1,\psi_1)-\boldsymbol{F}(\varphi_2,\psi_2)\|_{L^\infty\times L^\infty}\\ =&T^2\Big\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(\psi_1(\cdot,t))-f(\psi_2(\cdot,t))\|_\infty+\sigma\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi_1(\cdot,t)-\varphi_2(\cdot,t)\|_\infty\\ &+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|g(\psi_1(\cdot,t))-g(\psi_2(\cdot,t))\|_\infty\Big\}\\ \leqslant&T^2\Big\{\sigma\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi_1(\cdot,t)-\varphi_2(\cdot,t)\|_\infty+\max_{|\eta|\leqslant 2a+1}|f'(\eta)|\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi_1(\cdot,t)-\psi_2(\cdot,t)\|_\infty\\ &+\max_{|\eta|\leqslant 2a+1}|g'(\eta)|\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi_1(\cdot,t)-\psi_2(\cdot,t)\|_\infty\Big\}\\ \leqslant&T^2\Big[\sigma+\max_{|\eta|\leqslant 2a+1}|f'(\eta)|+\max_{|\eta|\leqslant 2a+1}|g'(\eta)|\Big]\|\boldsymbol{Q}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{Q}_2(\cdot,t)\|_{L^\infty\times L^\infty}.\end{aligned} \quad (5.2.60)$$

利用引理 1.8.14, 有

$$\begin{aligned}&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|S\boldsymbol{Q}_1(\cdot,t)-S\boldsymbol{Q}_2(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}\\ \leqslant&T^2\Big\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(\psi_1(\cdot,t))-f(\psi_2(\cdot,t))\|_{m,p}+\sigma\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi_1(\cdot,t)-\varphi_2(\cdot,t)\|_{m,p}\\ &+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|g(\psi_1(\cdot,t))-g(\psi_2(\cdot,t))\|_{m,p}\Big\}.\end{aligned} \quad (5.2.61)$$

应用 Minkowski 积分不等式, 推论 1.8.1 和引理 1.8.15 推出

$$\begin{aligned}&\|f(\psi_1(\cdot,t))-f(\psi_2(\cdot,t))\|_{m,p}\\ =&\Big\|\int_0^1(\psi_1-\psi_2)f'(\psi_2+\lambda(\psi_1-\psi_2))d\lambda\Big\|_{m,p}\\ \leqslant&\int_0^1\|(\psi_1-\psi_2)f'(\psi_2+\lambda(\psi_1-\psi_2))\|_{m,p}d\lambda\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant K_4(2a+1)\int_0^1\Big[\|\psi_1-\psi_2\|_{m,p}\|f'(\psi_2+\lambda(\psi_1-\psi_2))\|_\infty\\
&\quad+\|\psi_1-\psi_2\|_\infty\|f'(\psi_2+\lambda(\psi_1-\psi_2))\|_{m,p}\Big]d\lambda\\
&\leqslant K_6(2a+1)\int_0^1\Big[\|\psi_1-\psi_2\|_{m,p}\|f'(\psi_2+\lambda(\psi_1-\psi_2))\|_\infty\\
&\quad+\|\psi_1-\psi_2\|_\infty\|\psi_2+\lambda(\psi_1-\psi_2)\|_{m,p}\Big]d\lambda\\
&\leqslant K_7(2a+1)[\|\psi_1-\psi_2\|_{m,p}+\|\psi_1-\psi_2\|_\infty].
\end{aligned}\tag{5.2.62}
$$

类似地, 有

$$
\|g(\psi_1(\cdot,t))-g(\psi_2(\cdot,t))\|_{m,p}\leqslant K_7(2a+1)[\|\psi_1-\psi_2\|_{m,p}+\|\psi_1-\psi_2\|_\infty].\tag{5.2.63}
$$

把式 (5.2.6) 和式 (5.2.63) 代入式 (5.2.61), 出现

$$
\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|S\boldsymbol{Q}_1(\cdot,t)-S\boldsymbol{Q}_2(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}\\
&\leqslant T^2[K_7(2a+1)+K_8(2a+1)+\sigma]\Big[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi_1(\cdot,t)-\psi_2(\cdot,t)\|_{m,p}\\
&\quad+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi_1(\cdot,t)-\psi_2(\cdot,t)\|_\infty+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi_1(\cdot,t)-\varphi_2(\cdot,t)\|_{m,p}\Big]\\
&\leqslant T^2[K_7(2a+1)+K_8(2a+1)+\sigma]\Big[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{Q}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{Q}_2(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}\\
&\quad+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{Q}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{Q}_2(\cdot,t)\|_{L^\infty\times L^\infty}\Big].
\end{aligned}\tag{5.2.64}
$$

由式 (5.2.60) 和式 (5.2.64) 知

$$
\begin{aligned}
\|S\boldsymbol{Q}_1-S\boldsymbol{Q}_2\|_{X(T)}\leqslant&\Big[3\sigma+\max_{|\eta|\leqslant 2a+1}|f'(\eta)|+\max_{|\eta|\leqslant 2a+1}|g'(\eta)|+2K_7(2a+1)\\
&+2K_8(2a+1)\Big]T^2\|\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2\|_{X(T)}.
\end{aligned}\tag{5.2.65}
$$

若 T 满足式 (5.2.58) 和

$$
T\leqslant\frac{1}{2}\Big[2\sigma+\max_{|\eta|\leqslant 2a+1}|f'(\eta)|+\max_{|\eta|\leqslant 2a+1}|g'(\eta)|+K_7(2a+1)+K_8(2a+1)\Big]^{-1},
$$

则 $\|S\boldsymbol{Q}_1-S\boldsymbol{Q}_2\|_{X(T)}\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2\|_{X(T)}$. □

定理 5.2.6 设 $\boldsymbol{W}_0,\boldsymbol{W}_1\in W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty$, $f,g\in C^{m+1}(\mathbb{R})$ $(m\geqslant 2)$, $f(0)=0$ 及 $g(0)=0$, 则 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 存在唯一局部广义解 $\boldsymbol{W}\in$

$C^2([0,T_0);W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)}\Big(\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty}+\|\boldsymbol{W}_t(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty}\Big)<\infty, \tag{5.2.66}$$

则 $T_0=\infty$.

注 5.2.2 如果 $\boldsymbol{W}\in C([0,T_0);W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$ 是 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 的广义解, 由式 (5.2.54) 和引理 1.8.16 看出 $\boldsymbol{W}\in C^2([0,T_0);W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$ 和方程 (5.2.53) 成立.

引理 5.2.5 设 $m\geqslant 2$, $v_0\in H^2$, $\Lambda^{-1}v_1\in L^2$, $g\in C^2(\mathbb{R})$, $z(v)=\displaystyle\int_0^v g(y)dy$ 和 $z(v_0)\in L^1$, 则对于 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 有能量等式

$$E(t)=\|\Lambda^{-1}v_t(\cdot,t)\|^2+\|v_t(\cdot,t)\|^2+2\int_{\mathbb{R}}z(v(x,t))dx=E(0). \tag{5.2.67}$$

证明 应用证明引理 5.2.3 的同样方法, 由方程组 (5.2.5) 的第二个分量, 可以证明式 (5.2.67) 成立. □

定理 5.2.7 设下列条件成立:

(1) $\boldsymbol{W}_0,\boldsymbol{W}_1\in W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty$ $(m\geqslant 2)$;

(2) $f,\ g\in C^{m+1}(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, $g(0)=0$ 和 $z(v)\geqslant 0$. 如果存在 γ $(1\leqslant\gamma\leqslant\infty)$, 使得

$$|g(v)|\leqslant A[z(v)]^{\frac{1}{\gamma}}|v|+B, \tag{5.2.68}$$

其中 $A,\ B>0$ 是常数, 则 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 存在唯一整体广义解 $\boldsymbol{W}\in C^3([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$.

证明 按照定理 5.2.6 只需证明 (5.2.66) 成立. 方程组 (5.2.53) 的第二个分量两端同乘以 $v_t(x,t)$, 得

$$\frac{d}{dt}[v_t^2(x,t)+2z(v(x,t))]=2(G*g(v))(x,t)v_t(x,t). \tag{5.2.69}$$

应用假定式 (5.2.68) 和 Hölder 不等式, 可知

$$\begin{aligned}|(G*g(v))(x,t)|&\leqslant A[G*[z(v)]^{\frac{1}{\gamma}}|v|](x,t)+B\\&\leqslant A\|G\|_q\|[z(v)]^{\frac{1}{\gamma}}|v|\|_\gamma+B\\&\leqslant A\|G\|_q\|v\|_\infty\|z(v)\|_1^{\frac{1}{\gamma}}+B,\end{aligned} \tag{5.2.70}$$

其中 $\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{q}=1$. 利用 $\|G\|_q$ 的有界性和式 (5.2.67), 由式 (5.2.70) 有

$$|(G*g(v))(x,t)|\leqslant C_9\|v(\cdot,t)\|_\infty+B. \tag{5.2.71}$$

将式 (5.2.71) 代入式 (5.2.69) 和两端各加上 $2v(\cdot,t)v_t(\cdot,t)$, 得

$$\frac{d}{dt}\Big[v_t^2(x,t)+v^2(x,t)+2z(v(x,t))\Big]$$
$$\leqslant 2C_9\|v(\cdot,t)\|_\infty\|v_t(\cdot,t)\|_\infty+2\|v(\cdot,t)\|_\infty\|v_t(\cdot,t)\|_\infty+2B\|v_t(\cdot,t)\|_\infty. \tag{5.2.72}$$

式 (5.2.72) 对 t 积分, 并利用 Cauchy 不等式, 可见

$$\begin{aligned}&\|v_t(\cdot,t)\|_\infty^2+\|v(\cdot,t)\|_\infty^2+2\|z(v(\cdot,t))\|_\infty^2\\ &\leqslant\|v_1\|_\infty^2+\|v_0\|_\infty^2+2\|z(v_0)\|_\infty+C_{10}\\ &\quad+C_{11}\int_0^t\Big(\|v_t(\cdot,\tau)\|_\infty^2+\|v(\cdot,\tau)\|_\infty^2\Big)d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned} \tag{5.2.73}$$

Gronwall 不等式给出

$$\|v(\cdot,t)\|_\infty^2+\|v_t(\cdot,t)\|_\infty^2\leqslant C_{12}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5.2.74}$$

方程组 (5.2.53) 的第一个分量两端乘以 $u_t(x,t)$, 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[u_t^2(x,t)+\sigma u^2(x,t)\Big]=&\,2(G*f(v))(x,t)u_t(x,t)+2\sigma(G*u)(x,t)u_t(x,t)\\ &-2f(v(x,t))u_t(x,t).\end{aligned} \tag{5.2.75}$$

因为 $\|v(\cdot,t)\|_\infty\leqslant\sqrt{C_{12}(T)}$, 所以

$$|(G*f(v))(x,t)|\leqslant C_{13}(T).$$

易知

$$|(G*u)(x,t)|\leqslant\|u(\cdot,t)\|_\infty.$$

把上述不等式代入式 (5.2.75), 得

$$\frac{d}{dt}\Big[u_t^2(x,t)+\sigma u^2(x,t)\Big]\leqslant C_{14}(T)\Big[\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2\Big]+C_{15}(T).$$

由 Gronwall 不等式推出

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty^2+\|u_t(\cdot,t)\|_\infty^2\leqslant C_{16}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5.2.76}$$

利用引理 1.8.16, 由积分方程组 (5.2.54) 可得

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}\\
\leqslant&\|\boldsymbol{W}_0\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}+\|\boldsymbol{W}_1\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}T+\int_0^t(t-\tau)\Big[\|f(v(\cdot,\tau))\|_{m,p}\\
&+\sigma\|u(\cdot,\tau)\|_{m,p}+\|g(v(\cdot,\tau))\|_{m,p}\Big]d\tau+\int_0^t(t-\tau)\Big[\|(G*f(v))(\cdot,\tau)\|_{m,p}\\
&+\sigma\|(G*u)(\cdot,\tau)\|_{m,p}+\|(G*g(v))(\cdot,\tau)\|_{m,p}\Big]d\tau\\
\leqslant&\|\boldsymbol{W}_0\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}+\|\boldsymbol{W}_1\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}T\\
&+T\int_0^t\Big[4K_5(\sqrt{C_{12}(T)})\|v(\cdot,\tau)\|_{m,p}+2\sigma\|u(\cdot,\tau)\|_{m,p}\Big]d\tau\\
\leqslant&\|\boldsymbol{W}_0\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}+\|\boldsymbol{W}_1\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}T\\
&+T\Big[4K_5(\sqrt{C_{12}(T)})+2\sigma\Big]\int_0^t\|\boldsymbol{W}(\cdot,\tau)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}d\tau.
\end{aligned}
\tag{5.2.77}
$$

Gronwall 不等式给出

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}\leqslant&\Big(\|\boldsymbol{W}_0\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}+\|\boldsymbol{W}_1\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}T\Big)\\
&\times e^{T^2[4K_5(\sqrt{C_{12}(T)})+2\sigma]},\quad 0\leqslant t\leqslant T.
\end{aligned}
\tag{5.2.78}
$$

方程组 (5.2.54) 对 t 求导知

$$
\boldsymbol{W}_t(x,t)=\boldsymbol{W}_1(x)-\int_0^t\boldsymbol{F}(u(x,\tau),v(x,\tau))d\tau+\int_0^t(G*\boldsymbol{F}(u,v))(x,\tau)d\tau. \tag{5.2.79}
$$

由式 (5.2.79) 得

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{W}_t(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}\\
\leqslant&\|\boldsymbol{W}_1\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}+2\int_0^t\Big[\|f(v(\cdot,\tau))\|_{m,p}+\sigma\|u(\cdot,\tau)\|_{m,p}+\|g(v(\cdot,\tau))\|_{m,p}\Big]d\tau\\
\leqslant&\|\boldsymbol{W}_1\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}+2\Big[2K_5(\sqrt{C_{12}(T)})+\sigma\Big]\int_0^t\|\boldsymbol{W}(\cdot,\tau)\|_{W^{m,p}\times W^{m,p}}d\tau\\
\leqslant&C_{17}(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T.
\end{aligned}
\tag{5.2.80}
$$

从式 (5.2.74), (5.2.76), (5.2.78) 和式 (5.2.80) 推知, 式 (5.2.66) 成立.

式 (5.2.53) 关于 t 求导, 得

$$
\boldsymbol{W}_{ttt}(x,t)=G*\boldsymbol{F}(u,v)_t(x,\tau)-\boldsymbol{F}(u,v)_t \tag{5.2.81}
$$

和 $\boldsymbol{W}_{ttt}\in C([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$. 因此, 我们有 $\boldsymbol{W}\in C^3([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$. □

引理 5.2.6 设定理 5.2.7 的条件成立, $f,g\in C^{k+m+1}(\mathbb{R})$, 其中 $k\geqslant 0$ 是任意整数, 则 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 的广义解 $\boldsymbol{W}(x,t)\in C^{k+3+l}([0,T];W^{m-l,p}\cap L^\infty\times W^{m-l,p}\cap L^\infty)$ $(\forall\, T>0)$, $0\leqslant l\leqslant m$.

证明 首先证明 $\boldsymbol{W}\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$. 用数学归纳法证明. 当 $k=0$ 时, 由定理 5.2.7 知 $\boldsymbol{W}\in C^3([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$. 假定

$$\boldsymbol{W}\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty),\quad 0\leqslant k<s. \tag{5.2.82}$$

当 $k=s$ 时, 式 (5.2.81) 关于 t 求导 s 次, 得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{W}_{t^{s+3}}\\
=&-\boldsymbol{F}(u,v)_{t^{s+1}}+(G*\boldsymbol{F})(u,v)_{t^{s+1}}\\
=&-\begin{pmatrix} f(v)_{t^{s+1}}+\sigma u_{t^{s+1}}\\ g(v)_{t^{s+1}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(G*f(v))_{t^{s+1}}+\sigma(G*u)_{t^{s+1}}\\ (G*g(v))_{t^{s+1}}\end{pmatrix}\\
=&-\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\frac{(s+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_{s+1}!}\left(\frac{v_t}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{v_{t^{s+1}}}{(s+1)!}\right)^{i_{s+1}}f^{(i_1+i_2+\cdots+i_{s+1})}(v)+\sigma u_{t^{s+1}}\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\frac{(s+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_{s+1}!}\left(\frac{v_t}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{v_{t^{s+1}}}{(s+1)!}\right)^{i_{s+1}}g^{(i_1+i_2+\cdots+i_{s+1})}(v)\end{pmatrix}\\
&+\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\frac{(s+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_{s+1}!}\left(\frac{v_t}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{v_{t^{s+1}}}{(s+1)!}\right)^{i_{s+1}}G*f^{(i_1+i_2+\cdots+i_{s+1})}(v)+\sigma(G*u)_{t^{s+1}}\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\frac{(s+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_{s+1}!}\left(\frac{v_t}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{v_{t^{s+1}}}{(s+1)!}\right)^{i_{s+1}}(G*g)^{(i_1+i_2+\cdots+i_{s+1})}(v),\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.2.83}$$

其中 $i_1+i_2+\cdots+i_{s+1}=\rho$, $i_1+2i_2+\cdots+(s+1)i_{s+1}=s+1$, i_j $(j=1,\cdots,s+1)$ 是非负整数. 利用推论 1.8.1 和式 (5.2.82), 由式 (5.2.83) 得到 $\boldsymbol{W}\in C^{s+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$, $\forall\, k\geqslant 0$, $m\geqslant 0$. 下面证明

$$\boldsymbol{W}\in C^{k+3+l}([0,T];W^{m-l,p}\cap L^\infty\times W^{m-l,p}\cap L^\infty),\quad 0<l\leqslant m. \tag{5.2.84}$$

式 (5.2.81) 对 t 求导 $k+1$ 次, 有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{W}_{t^{k+4}}\\
=&-\boldsymbol{F}(u,v)_{t^{k+2}}+(G*\boldsymbol{F})(u,v)_{t^{k+2}}\\
=&-\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\frac{(k+2)!}{i_1!i_2!\cdots i_{k+2}!}\left(\frac{v_t}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{v_{t^{k+2}}}{(k+2)!}\right)^{i_{k+2}}f^{(i_1+i_2+\cdots+i_{k+2})}(v)+\sigma u_{t^{k+2}}\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\frac{(k+2)!}{i_1!i_2!\cdots i_{k+2}!}\left(\frac{v_t}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{v_{t^{k+2}}}{(k+2)!}\right)^{i_{k+2}}g^{(i_1+i_2+\cdots+i_{k+2})}(v)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$+\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\frac{(k+2)!}{i_1!i_2!\cdots i_{k+2}!}\left(\frac{v_t}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{v_{t^{k+2}}}{(k+2)!}\right)^{i_{k+2}}G*f^{(i_1+i_2+\cdots+i_{k+2})}(v)+\sigma(G*u)_{t^{k+2}}\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\frac{(k+2)!}{i_1!i_2!\cdots i_{k+2}!}\left(\frac{v_t}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{v_{t^{s+1}}}{(k+2)!}\right)^{i_{k+2}}(G*g)^{(i_1+i_2+\cdots+i_{k+2})}(v)\end{pmatrix},\tag{5.2.85}$$

其中 $i_1+i_2+\cdots+i_{k+2}=\rho$, $i_1+2i_2+\cdots+(k+2)i_{k+2}=k+2$. 应用推论 1.8.1, 式 (5.2.85) 和 $\boldsymbol{W}\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$, 得到 $\boldsymbol{W}\in C^{k+4}([0,T];W^{m-1,p}\cap L^\infty\times W^{m-1,p}\cap L^\infty)$.

式 (5.2.85) 对 t 求导, 可知 $\boldsymbol{W}\in C^{k+5}([0,T];W^{m-2,p}\cap L^\infty\times W^{m-2,p}\cap L^\infty)$. 重复这个过程 $m-2$ 次, 得式 (5.2.84). □

由引理 5.2.6 得下面的定理成立.

定理 5.2.8 设引理 5.2.6 的条件成立和 $k=0$, $l=0$, $m>2+\dfrac{1}{p}$, 则 Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 存在唯一整体古典解 $\boldsymbol{W}(x,t)\in C^3([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\times W^{m,p}\cap L^\infty)$, 即 $\boldsymbol{W}(x,t)\in C^3([0,\infty);C^2(\mathbb{R})\cap L^\infty\times C^2(\mathbb{R})\cap L^\infty)$.

注 5.2.3 应用定理 5.2.7 和定理 5.2.8 的结果知, 在某些条件下 Cauchy 问题 (5.1.1), (5.1.2), (5.2.35), (5.2.36) 有如定理 5.2.8 的唯一整体广义解和有如定理 5.2.8 的整体古典解.

5.2.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [317]. 与本节内容有关的文献见 [32], [35], [43], [53], [311], [312], [164], [174], [175], [308]–[310], [313], [316].

5.3 耦合 IMBq 型方程组的 Cauchy 问题 (I)

5.3.1 引言

5.1 节和 5.2 节研究了源于 DNA 的广义非线性发展方程组初边值问题和 Cauchy 问题整体广义解与整体古典解的存在性和唯一性. 本节讨论更一般的源于 DNA 的广义 IMBq 型方程组的 Cauchy 问题

$$u_{tt}-\alpha^2u_{xxtt}=f(u,v)_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\tag{5.3.1}$$

$$v_{tt}-\alpha^2v_{xxtt}=g(u,v)_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\tag{5.3.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R},\tag{5.3.3}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad v_t(x,0)=v_1(x),\quad x\in\mathbb{R},\tag{5.3.4}$$

其中 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是未知函数; $\alpha>0$ 是常数; $f(u,v)$ 和 $g(u,v)$ 是给定的非线性函数; $u_0(x), u_1(x), v_0(x)$ 和 $v_1(x)$ 是给定的初值函数.

5.3.2 局部解的存在性和唯一性

下面应用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (5.3.1)–(5.3.4) 局部解的存在性和唯一性.

为此, 将方程组 (5.3.1), (5.3.2) 改写为下列向量形式

$$\boldsymbol{U}_{tt}=L[\boldsymbol{F}(u,v)],\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{5.3.5}$$

其中

$$\boldsymbol{U}=(u,v),\quad \boldsymbol{F}(u,v)=(f(u,v),g(u,v))$$

和通过 Fourier 变换 Lu 可表为

$$Lu=(I-\alpha^2\partial_x^2)^{-1}\partial_x^2u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}-e^{ix\xi}\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}\hat{u}(\xi,t)d\xi.$$

式 (5.3.5) 对 t 积分两次, 问题 (5.3.1)–(5.3.4) 的形式解满足

$$\boldsymbol{U}(x,t)=\boldsymbol{U}_0(x)+\boldsymbol{U}_1(x)t+\int_0^t(t-\tau)L[\boldsymbol{F}(u(x,\tau),v(x,\tau))]d\tau, \tag{5.3.6}$$

其中

$$\boldsymbol{U}_0(x)=(u_0(x),v_0(x)),\quad \boldsymbol{U}_1(x)=(u_1(x),v_1(x)). \tag{5.3.7}$$

不失一般性, 假定 $f(0,0)=0$ 和 $g(0,0)=0$. 否则分别以 $f(u,v)-f(0,0)$ 和 $g(u,v)-g(0,0)$ 代替 $f(u,v)$ 和 $g(u,v)$. 应用积分方程组 (5.3.6) 和压缩映射原理可证明下列定理.

定理 5.3.1 设 $s>\dfrac{1}{2}$, $\boldsymbol{U}_0\in H^s\times H^s$, $\boldsymbol{U}_1\in H^s\times H^s$ 和 $f,g\in C^{N_0}(\mathbb{R}^2)$, 其中 $N_0\geqslant\max\{1,s\}$ 是一整数, 则存在仅依赖于 $\boldsymbol{U}_0$ 和 $\boldsymbol{U}_1$ 的最大时间 T_0, 使得对于每一个 $T<T_0$, 积分方程组 (5.3.6) 有唯一解 $\boldsymbol{U}\in C([0,T];H^s\times H^s)$, 即 Cauchy 问题 (5.3.1)–(5.3.4) 有唯一解 $(u,v)\in C([0,T_0);H^s\times H^s)$. 同时, 有

(1) $T_0=\infty$ 或

(2) $T_0<\infty$ 和 $\sup_{t\in[0,T]}[\|\boldsymbol{U}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{U}_t(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}]=\infty$.

证明 因为证明方法是标准的, 我们只给出证明的概要.

步骤 1. 对于 $s>\dfrac{1}{2}$, 定义 Banach 空间

$$X(T)=C([0,T];H^s\times H^s),$$

并赋予范数

$$\|\boldsymbol{U}\|_{X(T)} = \max_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{U}\|_{H^s\times H^s}, \quad \forall \boldsymbol{U} \in H^s \times H^s.$$

根据 Sobolev 嵌入定理, 如果 $\boldsymbol{U} \in X(T)$, 则 $\boldsymbol{U} \in C([0,T]; L^\infty \times L^\infty)$. 对于 $\boldsymbol{U}_0 \in H^s \times H^s, \boldsymbol{U}_1 \in H^s \times H^s$, 令 $a = \|\boldsymbol{U}_0\|_{H^s\times H^s} + \|\boldsymbol{U}_1\|_{H^s\times H^s}$ 和

$$Y(T) = \{\boldsymbol{U} \in X(T) | \|\boldsymbol{U}\|_{X(T)} \leqslant 2a+1\}.$$

显然, $Y(T)$ 对于所有的 $T>0$ 是 $X(T)$ 的闭凸子集. 定义映射 Φ 如下

$$\Phi(\boldsymbol{U}(t)) = \boldsymbol{U}_0(x) + \boldsymbol{U}_1(x)t + \int_0^t (t-\tau)L[\boldsymbol{F}(u,v)]d\tau, \quad \forall \boldsymbol{U} \in Y(T).$$

注意到对于所有的 $s \geqslant 0$, 算子 L 在 H^s 上是有界的. 事实上,

$$\|Lg\|_{H^s}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\xi^2)^s \xi^4}{(1+\alpha^2\xi^2)^2} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \leqslant \alpha^{-4} \|g\|_{H^s}^2, \quad \forall g \in H^s,$$

即 $\|Lg\|_{H^s} \leqslant \alpha^{-2}\|g\|_{H^s}$. 利用 Minkowski 积分不等式和引理 1.8.13, 对 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in Y(T)$ 可得估计

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(\boldsymbol{U})\|_{X(T)} \leqslant a + T[a + K_1(a)(2a+1)T], \\
&\|\Phi(\boldsymbol{U}) - \Phi(\boldsymbol{V})\|_{X(T)} \leqslant T^2 K_2(a) \|\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}\|_{X(T)},
\end{aligned}$$

其中 $K_1(a)$ 和 $K_2(a)$ 是依赖于 a 的常数. 所以积分方程组 (5.3.6) 在 $Y(T)$ 中存在唯一解 $\boldsymbol{U}$.

步骤 2. 易证对于任意的 $T>0$, 积分方程组 (5.3.6) 在 $X(T)$ 中最多有一解. 利用标准的技巧可得一数 T_0, 积分方程组 (5.3.6) 在此最大时间 $[0, T_0)$ 上存在解 $\boldsymbol{U}$, 且如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)} [\|\boldsymbol{U}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} + \|\boldsymbol{U}_t(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}] < \infty,$$

则 $T_0 = \infty$. □

定理 5.3.2　设定理 5.3.1 的假定成立和 $T_0>0$ 是积分方程组 (5.3.6) 对应解 $\boldsymbol{U}(x,t)$ 存在的最大时间. 如果 $T_0<\infty$, 则

$$\limsup_{t\to T_0} \|\boldsymbol{U}(\cdot,t)\|_{L^\infty\times L^\infty} = 0.$$

证明　让我们证明, 如果

$$\limsup_{t\to T_0^-} \|\boldsymbol{U}(\cdot,t)\|_{L^\infty\times L^\infty} = M < \infty,$$

则 $T_0=\infty$. 利用方程 (5.3.5) 和引理 1.8.13, 可得

$$\|\boldsymbol{U}_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}=\|L[\boldsymbol{F}(u,v)]\|_{H^s\times H^s}$$
$$\leqslant C\|\boldsymbol{F}(u,v)\|_{H^s\times H^s}\leqslant C(M)\|\boldsymbol{U}\|_{H^s\times H^s},\quad \forall t\in(0,T_0).$$

因此, 对所有 $t\in[0,T_0)$,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\|\boldsymbol{U}(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{U}_t(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}\right]\\&=2(\boldsymbol{U}_{tt},\boldsymbol{U}_t)_{H^s\times H^s}+2(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}_t)_{H^s\times H^s}\\&\leqslant 2\|\boldsymbol{U}_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}\|\boldsymbol{U}_t(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}+2\|\boldsymbol{U}_t(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}\|\boldsymbol{U}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}\\&\leqslant (C(M)+1)(\|\boldsymbol{U}(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{U}_t(\cdot,t)\|^2_{H^s\times H^s}).\end{aligned}$$

上不等式对 t 积分, 并利用 Gronwall 不等式, 得

$$\limsup_{t\to T_0^-}[\|\boldsymbol{U}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}+\|\boldsymbol{U}(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}]<\infty,$$

于是由定理 5.3.1 知, $T_0=\infty$. □

5.3.3 整体解的存在性和唯一性

现在, 证明 Cauchy 问题 (5.3.1)–(5.3.4) 在空间 $H^s\times H^s$ 中存在唯一整体古典解. 为此, 作 Cauchy 问题 (5.3.1)–(5.3.4) 局部解的先验估计.

引理 5.3.1 设 $s>\frac{1}{2}$, $(u_0,v_0)\in H^s\times H^s$, $(u_1,v_1)\in(H^s\times H^s)\cap(\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^{-1})$, $f,g\in C^{N_0}(\mathbb{R}^2)$, 以及

$$f(u,v)=f_0(u,v)+\sum_{k=1}^n f_k(u,v),$$
$$g(u,v)=g_0(u,v)+\sum_{k=1}^n g_k(u,v),$$

其中 $N_0\geqslant\max\{1,s\}$ 是一整数, n 是一正整数. 如果存在 $Q_k(u,v)$, 使得 $Q_k(u_0,v_0)\in L^1$, 且

$$dQ_k(u,v)=f_k(u,v)du+g_k(u,v)dv,$$

于是成立等式

$$\begin{aligned}E(t)=&\|(-\partial_x^2)^{-\frac12}u_t\|^2+\|(-\partial_x^2)^{-\frac12}v_t\|^2+\alpha^2\|u_t\|^2+\alpha^2\|v_t\|^2\\&+2\sum_{k=1}^n\int_{-\infty}^{\infty}Q_k(u,v)dx+2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[f_0(u,v)u_t+g_0(u,v)v_t]dxdt\\=&E(0).\end{aligned}\tag{5.3.8}$$

证明 令 $\boldsymbol{U}=(u,v)\in H^s\times H^s$ 是由定理 5.3.1 确定的 Cauchy 问题 (5.3.1)-(5.3.4) 的解. 根据式 (5.3.6) 可知 $u_{tt}\in C([0,T];L^2)$, $v_{tt}\in C([0,T];L^2)$ 和

$$(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}_t=(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}_1+\int_0^t(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}L[\boldsymbol{F}(u,v)]d\tau, \tag{5.3.9}$$

$$(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}_{tt}=(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}L[\boldsymbol{F}(u,v)]. \tag{5.3.10}$$

应用引理 1.8.13 和对于 $s\geqslant 0$, 由 H^s 到 H^{s+1} 的算子 $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}L$ 的有界性, 得

$$\begin{aligned}&(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\in C([0,T];L^2),\quad (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_t\in C([0,T];L^2),\\&(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_{tt}\in C([0,T];H^1),\quad (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_{tt}\in C([0,T];H^1).\end{aligned}$$

应用方程 (5.3.1) 和 (5.3.2) 知

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t)=&2\Big((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_{tt},(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\Big)+2\Big((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_{tt},(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_t\Big)+2\alpha^2(u_{tt},u_t)\\&+2\alpha^2(v_{tt},v_t)+2\sum_{k=1}^n(f_k(u,v),u_t)+2\sum_{k=1}^n(g_k(u,v),v_t)\\&+2(f_0(u,v),u_t)+2(g_0(u,v),v_t)\\=&2\Big((-\partial_x^2)^{-1}u_{tt}+\alpha^2u_{tt}+f(u,v),u_t\Big)+2\Big((-\partial_x^2)^{-1}v_{tt}+\alpha^2v_{tt}+g(u,v),v_t\Big)\\=&0,\end{aligned}$$

上面的等式在 $[0,t]$ 上对 t 积分, 得式 (5.3.8). □

应用 Fourier 变换易知

$$Lf=\partial_x^2(G_0*f)=\alpha^{-2}(G_0*f)-\alpha^{-2}f,$$

其中 $G_0(x)=(2\alpha)^{-1}e^{-\alpha^{-1}|x|}$. 所以方程 (5.3.1) 和 (5.3.2) 可以改写为

$$u_{tt}+\alpha^{-2}f(u,v)=\alpha^{-2}G_0*f(u,v), \tag{5.3.11}$$

$$v_{tt}+\alpha^{-2}g(u,v)=\alpha^{-2}G_0*g(u,v). \tag{5.3.12}$$

显然, 函数 $G_0(x)$ 满足下列性质 (见引理 1.8.3):

(1) $G_0(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且 $G_0(x)>0$;

(2) $G_0(x)\in L^q(\mathbb{R})$ $(1\leqslant q\leqslant\infty)$ 和 $\|G_0(x)\|_1=1$.

定理 5.3.3 在引理 5.3.1 的假定下, 如果 $Q_k(u,v)\geqslant 0$, 且存在 ρ_k $(1\leqslant\rho_k\leqslant\infty$, $k=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\sum_{k=1}^n[|f_k(u,v)|+|g_k(u,v)|]\leqslant\sum_{k=1}^nA_kQ_k(u,v)^{\frac{1}{\rho_k}}(|u|+|v|)+B, \tag{5.3.13}$$

$$|f_0(u,v)|^2 + |g_0(u,v)|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} C_k Q_k(u,v), \tag{5.3.14}$$

其中 $A_k \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ 和 $C_k \geqslant 0$ 是常数, 那么问题 (5.3.1)–(5.3.4) 存在唯一整体解 $(u,v) \in C([0,\infty); H^s \times H^s)$, 且解有估计

$$\|(u,v)\|^2_{L^\infty \times L^\infty} + \|(u_t,v_t)\|^2_{L^\infty \times L^\infty} \leqslant M(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.3.15}$$

其中 $M(T)$ 是依赖于 T 的常数.

证明 应用式 (5.3.8) 和 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}
&\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} v_t\|^2 + \alpha^2 \|u_t\|^2 + \alpha^2 \|v_t\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} Q_k(u,v)dx \\
\leqslant & E(0) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [|f_0(u,v)|^2 + |g_0(u,v)|^2 + |u_t|^2 + |v_t|^2] dx d\tau \\
\leqslant & E(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} C_k Q_k(u,v) dx dt + \int_0^t [\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2] d\tau.
\end{aligned}$$

Gronwall 不等式给出

$$\begin{aligned}
&\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} v_t\|^2 + \alpha^2 \|u_t\|^2 + \alpha^2 \|v_t\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} Q_k(u,v)dx \\
\leqslant & M_1(T), \quad \forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

其中 $M_1(T) = E(0)\exp(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{C_k, \alpha^{-2}\}T)$ 是一依赖于 T 的常数. 因此

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} Q_k(u,v)dx \leqslant \frac{1}{2} M_1(T), \\
&\int_{-\infty}^{\infty} |f_0(u,v)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g_0(u,v)|^2 dx \leqslant M_2(T),
\end{aligned}$$

其中 $M_2(T) = \frac{1}{2} M_1(T) \sum_{k=1}^{n} C_k$. 式 (5.3.11) 和式 (5.3.12) 分别两端同乘以 u_t和 v_t 后, 两方程相加得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[u_t^2 + v_t^2 + 2\alpha^{-2}\sum_{k=1}^{n} Q_k(u,v)\right] \\
=& 2\alpha^{-2}\sum_{k=1}^{n}(G_0 * f_k(u,v))u_t + 2\alpha^{-2}\sum_{k=1}^{n}(G_0 * g_k(u,v))v_t + 2\alpha^{-2}(G_0 * f_0(u,v))u_t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\alpha^{-2}(G_0*g_0(u,v))v_t-2\alpha^{-2}f_0(u,v)u_t-2\alpha^{-2}g_0(u,v)v_t\\
\leqslant &2\alpha^{-2}\sum_{k=1}^{n}[G_0*(|f_k(u,v)|+|g_k(u,v)|)](|u_t|+|v_t|)\\
&+2\alpha^{-2}[G_0*(|f_0(u,v)|+|g_0(u,v)|)](|u_t|+|v_t|)\\
&+\alpha^{-2}(|f_0(u,v)|^2+|g_0(u,v)|^2)+\alpha^{-2}(|u_t|^2+|v_t|^2).
\end{aligned}\tag{5.3.16}
$$

应用式 (5.3.13),(5.3.14) 和 Young 不等式知

$$
G_0*[|f_0(u,v)|+|g_0(u,v)|]\leqslant\|G_0\|[\|f_0(u,v)\|+\|g_0(u,v)\|]\leqslant M_3(T),
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}G_0*(|f_k(u,v)|+|g_k(u,v)|)\leqslant&\sum_{k=1}^{n}A_kG_0*\left[Q_k(u,v)^{\frac{1}{\rho_k}}(|u|+|v|)\right]+B\\
\leqslant&\sum_{k=1}^{n}A_k\|G_0\|_{q_k}\left\|Q_k(u,v)^{\frac{1}{\rho_k}}(|u|+|\omega|)\right\|_{\rho_k}+B\\
\leqslant&\sum_{k=1}^{n}A_k\|G_0\|_{q_k}(\|u\|_\infty+\|v\|_\infty)\|Q_k(u,v)\|_1^{\frac{1}{\rho_k}}+B\\
\leqslant&M_4(T)(\|u\|_\infty+\|v\|_\infty)+B,
\end{aligned}
$$

其中 $\dfrac{1}{q_k}+\dfrac{1}{\rho_k}=1,\ k=1,2,\cdots,n$ 和

$$
M_3(T)=\|G_0\|M_2(T),\quad M_4(T)=\sum_{k=1}^{n}A_k\|G_0\|_{q_k}(M_1(T)/2)^{\frac{1}{\rho_k}}.
$$

将上面的不等式代入式 (5.3.16) 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[u_t^2+v_t^2+2\alpha^{-2}\sum_{k=1}^{n}Q_k(u,v)\right]\\
\leqslant&2\alpha^{-2}M_4(T)(\|u\|_\infty+\|v\|_\infty)(\|u_t\|_\infty+\|v_t\|_\infty)+2\alpha^{-2}(M_3(T)+B)(\|u_t\|_\infty+\|v_t\|_\infty)\\
&+\alpha^{-2}\sum_{k=1}^{n}C_kQ_k(u,v)+\alpha^{-2}(\|u_t\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2).
\end{aligned}\tag{5.3.17}
$$

注意到

$$
\frac{d}{dt}(u^2+v^2)=2uu_t+2vv_t\leqslant\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2+\|u_t\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2,\tag{5.3.18}
$$

得

$$\|u_t\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2+\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2+2\alpha^{-2}\sum_{k=1}^n\|Q_k(u,v)\|_\infty$$

$$\leqslant M_5(T)+M_6(T)\int_0^t\Big(\|u\|_\infty^2+\|u_t\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2$$

$$+2\alpha^{-2}\sum_{k=1}^n\|Q_k(u,v)\|_\infty\Big)d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{5.3.19}$$

其中

$$M_5(T)=\|u_1\|_\infty^2+\|v_1\|_\infty^2+\|u_0\|_\infty^2+\|v_0\|_\infty^2$$

$$+2\alpha^{-2}\sum_{k=1}^n\|Q_k(u_0,v_0)\|_\infty+\alpha^{-2}(M_3(T)+B)^2,$$

$$M_6(T)=2\alpha^{-2}(M_4(T)+1)+1+\max_{1\leqslant k\leqslant n}C_k.$$

Gronwall 不等式和式 (5.3.19) 给出

$$\|u_t\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2+\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2\leqslant M_5(T)e^{M_6(T)T},\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

所以式 (5.3.15) 成立. 根据定理 5.3.2 知 $T_0=\infty$. □

5.3.4 整体解的不存在性

下面应用凸性方法考虑 Cauchy 问题 (5.3.1)–(5.3.4) 解的爆破.

定理 5.3.4 设 $s>\frac{1}{2}$, $(u_0,v_0)\in H^s\times H^s$, $(u_1,v_1)\in(H^s\times H^s)\cap(\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^{-1})$, $f,g\in C^{N_0}(\mathbb{R}^2)$, 且存在一函数 $Q(u,v)$ 以及常数 $\gamma>0$, 使得 $Q(u_0,v_0)\in L^1$ 和

$$dQ(u,v)=f(u,v)du+g(u,v)dv,$$

$$f(u,v)u+g(u,v)v\leqslant 2(1+2\gamma)Q(u,v),\quad \forall u,v\in\mathbb{R}\tag{5.3.20}$$

成立, 则 Cauchy 问题 (5.3.1)–(5.3.4) 的解在有限时刻爆破, 如果下列条件之一成立:

(1) $E(0)<0$;

(2) $E(0)\geqslant 0$ 且

$$((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_1,(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_0)+((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_1,(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_0)+\alpha^2(u_1,u_0)+\alpha^2(v_1,v_0)$$

$$>[E(0)(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_0\|^2+\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_0\|^2+\alpha^2\|u_0\|^2+\alpha^2\|v_0\|^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

证明　设 Cauchy 问题 (5.3.1)–(5.3.4) 解存在的最大时间为无穷, 由凸性引理将得到一矛盾. 事实上, 令

$$\phi(t) = \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u\|^2 + \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v\|^2 + \alpha^2\|u\|^2 + \alpha^2\|v\|^2 + \beta_0(t+t_0)^2, \tag{5.3.21}$$

其中 β_0 和 t_0 是待定常数. 显然

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) =& 2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t, (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u) + 2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_t, (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v)\\ &+ 2\alpha^2(u_t, u) + 2\alpha^2(v_t, v) + 2\beta_0(t+t_0).\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式有

$$\dot{\phi}(t)^2 \leqslant 4\phi(t)[\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_t\|^2 + \alpha^2\|u_t\|^2 + \alpha^2\|v_t\|^2 + \beta_0]. \tag{5.3.22}$$

借助于方程 (5.3.1),(5.3.2) 和等式 (5.3.8) 可见

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}(t) =& 2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_{tt}, (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u) + 2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_{tt}, (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v) + 2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2\\ &+ 2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_t\|^2 + 2\alpha^2(u_{tt}, u) + 2\alpha^2(v_{tt}, v) + 2\alpha^2\|u_t\|^2 + 2\alpha^2\|v_t\|^2 + 2\beta_0\\ =& 2((-\partial_x^2)^{-1}u_{tt} + \alpha^2 u_{tt}, u) + 2((-\partial_x^2)^{-1}v_{tt} + \alpha^2 v_{tt}, v)\\ &+ 2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + 2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_t\|^2 + 2\alpha^2\|u_t\|^2 + 2\alpha^2\|v_t\|^2 + 2\beta_0\\ =& -2(f(u,v), u) - 2(g(u,v), v) + 2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2\\ &+ 2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}v_t\|^2 + 2\alpha^2\|u_t\|^2 + 2\alpha^2\|v_t\|^2 + 2\beta_0.\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

由式 (5.3.21)–(5.3.23) 和式 (5.3.8),(5.3.20) 得

$$\begin{aligned}&\phi(t)\ddot{\phi}(t) - (1+\gamma)\dot{\phi}(t)^2\\ \geqslant& 2\phi(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}[2(1+2\gamma)Q(u,v) - f(u,v)u - g(u,v)v]dx - (1+2\gamma)[E(0)+\beta_0]\right\}\\ \geqslant& -2(1+2\gamma)[E(0)+\beta_0]\phi(t).\end{aligned} \tag{5.3.24}$$

若 $E(0) < 0$, 取 $\beta_0 = -E(0) > 0$, 则

$$\phi(t)\ddot{\phi}(t) - (1+\gamma)\dot{\phi}(t)^2 \geqslant 0.$$

现在选 t_0 充分大, 使得 $\dot{\phi}(0) > 0$. 根据引理 1.8.7 知 $\phi(t)$ 在时间 T_1 最多等于

$$T_2 = \frac{\phi(0)}{\gamma\dot{\phi}(0)} < \infty$$

时, $\phi(t)$ 变成无穷.

如果 $E(0)=0$, 取 $\beta_0=0$, 则式 (5.3.24) 变为

$$\phi(t)\phi''(t)-(1+\gamma)(\phi'(t))^2\geqslant 0.$$

根据假定 (2) 还知 $\phi(0)>0$, $\dot{\phi}(0)>0$. 所以由引理 1.8.7 知 $\phi(t)$ 在时间 T_1 最多等于

$$T_2=\frac{\phi(0)}{\gamma\dot{\phi}(0)}<\infty$$

时, $\phi(t)$ 变为无穷.

如果 $E(0)>0$, 取 $\beta_0=0$. 令 $\Phi(t)=\phi^{-\gamma}(t)$, 则应用不等式 (5.3.24) 知

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t)=&-\gamma\phi^{-\gamma-1}(t)\dot{\phi}(t),\\ \ddot{\Phi}(t)=&-\gamma\phi^{-\gamma-2}(t)[\phi(t)\ddot{\phi}(t)-(1+\gamma)(\dot{\phi}(t))^2]\\ \leqslant&\, 2\gamma(1+2\gamma)E(0)\phi^{-\gamma-1}(t).\end{aligned}\tag{5.3.25}$$

利用假定 (2), 有 $\dot{\Phi}(0)<0$. 令

$$t^*=\sup\{t\mid\Phi'(\tau)<0,\ \tau\in[0,t)\}.$$

根据 $\dot{\Phi}(t)$ 的连续性, t^* 是正的. 式 (5.3.25) 两端同乘以 $2\dot{\Phi}(t)$ 给出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\dot{\Phi}(t)^2]\geqslant&-4\gamma^2(1+2\gamma)E(0)\phi^{-2\gamma-2}(t)\dot{\phi}(t)\\ =&\,4\gamma^2\frac{d}{dt}[\phi^{-2\gamma-1}(t)]E(0),\quad\forall t\in[0,t^*).\end{aligned}\tag{5.3.26}$$

式 (5.3.26) 在 $[0,t)$ 上对 t 积分, 得

$$\dot{\Phi}(t)^2\geqslant 4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(t)+\dot{\Phi}(0)^2-4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0).$$

由假定 (2) 知

$$\dot{\Phi}(0)^2-4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)>0.$$

所以由 $\dot{\Phi}(t)$ 的连续性得

$$\dot{\Phi}(t)\leqslant-[\dot{\Phi}(0)^2-4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)]^{\frac{1}{2}},\quad t\in[0,t^*).\tag{5.3.27}$$

由 t^* 的定义推出不等式 (5.3.27) 对所有的 $t\geqslant 0$ 成立. 所以

$$\Phi(t)\leqslant\Phi(0)-[\dot{\Phi}(0)^2-4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)]^{\frac{1}{2}}t,\quad\forall\, t>0.$$

于是对于某个 T_1, $0<T_1\leqslant T_2=\Phi(0)[\dot{\Phi}(0)^2-4\gamma^2E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)]^{-\frac{1}{2}}$, $\Phi(T_1)=0$. 因此 $\phi(t)$ 在 T_1 时刻变成无穷.

总之, 在假定 (1) 或假定 (2) 下, $\phi(t)$ 在 T_1 时刻变为无穷. 这与解存在的最大时间为无穷的事实矛盾. 所以解存在的时间为有限.

5.3.5 例子

下面给出定理 5.3.3 和定理 5.3.4 应用的两个例子.

例 5.3.1 考虑下列偏微分方程组的 Cauchy 问题

$$\frac{\rho}{a}u_{tt}=\beta u_{xx}+\frac{\beta}{2}(v^2)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}u_{xxtt},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\tag{5.3.28}$$

$$\frac{\rho}{a}v_{tt}=\frac{\beta}{2}(v^3)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}v_{xxtt},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,\tag{5.3.29}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R},\tag{5.3.30}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad v_t(x,0)=v_1(x),\quad x\in\mathbb{R},\tag{5.3.31}$$

其中 β, ρ, a 和 l 均为正常数. 关于方程组 (5.3.28),(5.3.29) 见 5.1 节.

令 $f(u,v)=\dfrac{a}{\rho}\left(\beta u+\dfrac{\beta}{2}v^2\right)$, $g(u,v)=\dfrac{a\beta}{2\rho}v^3$, 取 $f_1(u,v)=\dfrac{a\beta}{\rho}u$, $f_0(u,v)=\dfrac{a\beta}{2\rho}v^2$, $g_1(u,v)=\dfrac{a\beta}{2\rho}v^3$, $g_0(u,v)=0$, $Q_1(u,v)=\dfrac{a\beta}{2\rho}\left(u^2+\dfrac{1}{4}v^4\right)\geqslant 0$, 则 $dQ_1(u,v)=f_1(u,v)du+g_1(u,v)dv$ 和

$$|f_1(u,v)|+|g_1(u,v)|\leqslant\frac{a\beta}{\rho}(|u|^2+|v|^3)+\frac{a\beta}{4}\leqslant 2\sqrt{\frac{a\beta}{\rho}}Q_1(u,v)^{\frac{1}{2}}(|u|+|v|)+\frac{a\beta}{4\rho},$$

$$|f_0(u,v)|^2+|g_0(u,v)|^2=\frac{a^2\beta^2}{4\rho^2}v^4\leqslant\frac{2a\beta}{\rho}Q_1(u,v).$$

因此不等式 (5.3.13) 和 (5.3.14) 成立. 根据定理 5.3.3, 对于所有 u_0, $v_0\in H^s$, u_1, $v_1\in H^s\cap\dot{H}^{-1}$, Cauchy 问题 (5.3.28)–(5.3.31) 存在唯一整体解 (u,v), 使得 $u\in C([0,\infty);H^s)$, $v\in C([0,\infty);H^s)$.

例 5.3.2 考虑下列偏微分方程组的 Cauchy 问题

$$\frac{\rho}{a}u_{tt}=\beta u_{xx}-\frac{\beta^2}{2}(u^2)_{xx}+\frac{\beta}{2}(v^2)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}u_{xxtt},\quad x\in\mathbb{R},\quad t\geqslant 0,\tag{5.3.32}$$

$$\frac{\rho}{a}v_{tt}=\beta(u,v)_{xx}+\frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}v_{xxtt},\quad x\in\mathbb{R},\quad t\geqslant 0,\tag{5.3.33}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbb{R},\tag{5.3.34}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad v_t(x,0)=v_1(x),\quad x\in\mathbb{R}.\tag{5.3.35}$$

令 $f(u,v)=\dfrac{a}{\rho}\left(\beta u-\dfrac{\beta^2}{2}u^2+\dfrac{\beta}{2}v^2\right)$, $g(u,v)=\dfrac{a\beta}{\rho}uv$, 取

$$Q(u,v)=\frac{a}{2\rho}\left(\beta u^2-\frac{1}{3}\beta^2u^3+\beta uv^2\right),$$

则 $dQ(u,v) = f(u,v)du + g(u,v)dv$ 和

$$f(u,v)u + g(u,v)v \leqslant 2(1+2\gamma)Q(u,v),$$

其中 $\gamma = \dfrac{1}{4}$. 根据定理 5.3.4, 对于适当的初值条件, Cauchy 问题(5.3.32)–(5.3.35) 的解在有限时刻爆破. 这意味着, 在适当的初值条件下满足定理 5.3.4 的条件 (1) 或 (2). 在文献 [174] 中给出了下列初值的例子:

$$u_0 = c\left(1 - \frac{2}{3}x^2\right)e^{-\frac{1}{3}x^2}, \quad v_0 = -\frac{2}{3}xe^{-\frac{1}{3}x^2},$$

$$u_1 = d\left(\frac{a}{\rho\beta}\right)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad v_1 = -\left(\frac{a}{\rho\beta}\right)^{\frac{1}{2}}xe^{-\frac{1}{2}x^2},$$

对于充分大的 $c > 0$, Cauchy 问题 (5.3.32)–(5.3.35) 满足 $E(0) < 0$.

5.3.6 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [318], 与本节内容有关的文献见 [30], [35], [36], [43], [74], [95], [151], [160], [161], [167], [174], [196], [197], [308]–[311], [313], [315], [316], [319]–[323].

5.4 耦合 IMBq 型方程组的 Cauchy 问题 (II)

5.4.1 引言

本节继续介绍下列 N 维耦合 IMBq 型方程组的 Cauchy 问题

$$u_{tt} - a\Delta u_{tt} = \Delta f(u,v), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{5.4.1}$$

$$v_{tt} - a\Delta v_{tt} = \Delta g(u,v), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{5.4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.4.3}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.4.4}$$

其中 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是未知函数; $a > 0$ 是常数; $f(u,v)$ 和 $g(u,v)$ 是给定的非线性函数; $u_0(x)$, $u_1(x)$, $v_0(x)$ 和 $v_1(x)$ 是已知的初值函数.

为了讨论方便起见, 我们将 Cauchy 问题 (5.4.1)–(5.4.4) 改写为以下向量形式

$$\boldsymbol{W}_{tt} - A\Delta\boldsymbol{W}_{tt} = \Delta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{5.4.5}$$

$$\boldsymbol{W}(x,0) = \boldsymbol{W}_0(x), \quad \boldsymbol{W}_t(x,0) = \boldsymbol{W}_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.4.6}$$

其中

$$\boldsymbol{W}(x,t) = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{W}) \\ g(\boldsymbol{W}) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{W}_0(x)=\begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{W}_1(x)=\begin{pmatrix} u_1(x) \\ v_1(x) \end{pmatrix}.$$

5.4.2 Cauchy 问题 (5.4.5),(5.4.6) 的解在空间 $C^3([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$ 中的存在性和唯一性

1. Cauchy 问题 (5.4.5),(5.4.6) 的局部解

应用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 存在唯一局部解. 为此, 形式地将方程组 (5.4.5) 写为

$$\boldsymbol{W}_{tt}=L[\boldsymbol{F}(W)],\tag{5.4.7}$$

其中 $L=(I-a\Delta)^{-1}\Delta$. 为了将 Cauchy 问题 (5.4.5),(5.4.6) 化为一等价的积分方程组, 我们引入偏微分方程

$$y(x)-a\Delta y(x)=\delta(x)$$

的基本解

$$G_1(x)=\frac{1}{(4\pi a)^{\frac{N}{2}}}\int_0^\infty e^{-\xi}e^{-\frac{|x|^2}{4a\xi}}\xi^{-\frac{N}{2}}d\xi,\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

其中 $\delta(x)$ 是 Dirac 函数. $G_1(x)$ 有如引理 1.8.3 中 $G(x)$ 的性质.

当 $Lh=a^{-1}G_1*h-a^{-1}h$ 时, 方程组 (5.4.7) 也可以形式地重写为

$$\boldsymbol{W}_{tt}=a^{-1}G_1*\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})-a^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}).\tag{5.4.8}$$

方程组 (5.4.8) 对 t 积分两次, 并注意到初值条件 (5.4.6), Cauchy 问题 (5.2.5), (5.2.6) 化为下列积分方程组

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}(x,t)=&\boldsymbol{W}_0(x)+\boldsymbol{W}_1(x)t-a^{-1}\int_0^t(t-\tau)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}(x,\tau))d\tau\\&+a^{-1}\int_0^t(t-\tau)(G_1*\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}))(x,\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{5.4.9}$$

定义 5.4.1　对于任意的 $T>0$, 如果 $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1\in W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2$ 和 $\boldsymbol{W}\in C([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$ (即 $u\in C([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2), v\in C([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$) ($m\geqslant 0$ 是一整数, $1\leqslant p\leqslant\infty$) 满足积分方程 (5.4.9), 则 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 称为积分方程 (5.4.9) 的连续解或 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 的广义解. 若 $T<\infty$, 则 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 的局部广义解. 若 $T=\infty$, 则 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 称为 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 的整体广义解.

现在应用压缩映射原理来证明积分方程组 (5.4.9) 存在唯一局部广义解. 为此, 定义函数空间 $X(T)=C([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$, 并赋予范数如下

$$\|\boldsymbol{W}\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{m,p}+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_\infty+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|.\tag{5.4.10}$$

易知 $X(T)$ 是一 Banach 空间.

定义映射 $\boldsymbol{S}: X(T) \mapsto X(T)$ 如下

$$\boldsymbol{S\Psi}(x,t) = \boldsymbol{W}_0(x) + \boldsymbol{W}_1(x)t - a^{-1}\int_0^t (t-\tau)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}(x,\tau))d\tau + a^{-1}\int_0^t (t-\tau)(G_1 * \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}))(x,\tau)d\tau, \quad \forall\, \boldsymbol{\Psi} \in X(T), \tag{5.4.11}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}(x,t) = \begin{pmatrix} y(x,t) \\ z(x,t) \end{pmatrix}$. 显然, 根据引理 1.8.16, 如果 $\boldsymbol{F} \in C^m(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ $(m \geqslant 0)$ 且 $\boldsymbol{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 即 $f(0,0) = 0$, $g(0,0) = 0$, 易知 S 有意义.

对于任意初值 $\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2$, 令

$$b = \|\boldsymbol{W}_0\|_{m,p} + \|\boldsymbol{W}_0\|_\infty + \|\boldsymbol{W}_0\| + \|\boldsymbol{W}_1\|_{m,p} + \|\boldsymbol{W}_1\|_\infty + \|\boldsymbol{W}_1\|.$$

定义集合

$$Q(b,T) = \{\boldsymbol{\Psi} | \boldsymbol{\Psi} \in X(T), \|\boldsymbol{\Psi}\|_{X(T)} \leqslant 2b+1\}.$$

显然, 对每一对 $b, T > 0$, $Q(b,T)$ 是 $X(T)$ 中的非空闭凸子集. 我们的目的是指出 $\boldsymbol{S}$ 在 $Q(b,T)$ 中有唯一不动点.

引理 5.4.1 设 $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2$, $\boldsymbol{F} \in C^{m+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})(m \geqslant 0)$, 且 $\boldsymbol{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 如果 T 相对于 b 适当小, 则映射 $\boldsymbol{S}: Q(b,T) \mapsto Q(b,T)$ 是严格压缩的.

证明 设 $\boldsymbol{\Psi} \in Q(b,T)$. 应用引理 1.8.16 和 Young 不等式, 由式 (5.4.11) 得到

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{S\Psi}(\cdot,t)\|_\infty &\leqslant \|\boldsymbol{W}_0\|_\infty + \|\boldsymbol{W}_1\|_\infty T + a^{-1}\bigg(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}(\cdot,t))\|_\infty \\
&\quad + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|G_1 * \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi})(\cdot,t)\|_\infty\bigg)\frac{T^2}{2} \\
&\leqslant \|\boldsymbol{W}_0\|_\infty + \|\boldsymbol{W}_1\|_\infty T + a^{-1}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}(\cdot,t))\|_\infty T^2 \\
&\leqslant \|\boldsymbol{W}_0\|_\infty + \|\boldsymbol{W}_1\|_\infty T \\
&\quad + a^{-1}K_2(2b+1)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\Psi}(\cdot,t)\|_\infty T^2,
\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

其中 $K_2(2b+1)$ 是出于引理 1.8.16, 且是依赖于 $2b+1$ 的常数.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{S\Psi}(\cdot,t)\|_{m,p} &\leqslant \|\boldsymbol{W}_0\|_{m,p} + \|\boldsymbol{W}_1\|_{m,p}T + a^{-1}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}(\cdot,t))\|_{m,p}T^2 \\
&\leqslant \|\boldsymbol{W}_0\|_{m,p} + \|\boldsymbol{W}_1\|_{m,p}T \\
&\quad + a^{-1}K_2(2b+1)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\Psi}(\cdot,t)\|_{m,p}T^2.
\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

类似于式 (5.4.13) , 有

$$\|\boldsymbol{S\Psi}(\cdot,t)\| \leqslant \|\boldsymbol{W}_0\| + \|\boldsymbol{W}_1\|T + a^{-1}K_2(2b+1)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\Psi}(\cdot,t)\|T^2. \tag{5.4.14}$$

则从 (5.4.12)–(5.4.14) 推出

$$\|\boldsymbol{S\Psi}\|_{X(T)} \leqslant b + bT + a^{-1}K_2(2b+1)T^2\|\boldsymbol{\Psi}\|_{X(T)}. \tag{5.4.15}$$

如果 T 满足

$$T \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{a^{-1}K_2(2b+1)}\right\}, \tag{5.4.16}$$

则 $\|\boldsymbol{S\Psi}\|_{X(T)} \leqslant 2b+1$. 因此, 如果 (5.4.16) 成立, 则 $\boldsymbol{S}$ 映 $Q(b,T)$ 到 $Q(b,T)$.

现在证明映射 $\boldsymbol{S}$ 是严格压缩的. 令 $T>0$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_i \in Q(b,T)$ 给定, 其中 $\boldsymbol{\Psi}_i = \begin{pmatrix} y_i(x,t) \\ z_i(x,t) \end{pmatrix}$ $(i=1,2)$. 由式 (5.4.11) 知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S\Psi}_1(x,t) - \boldsymbol{S\Psi}_2(x,t) = &- a^{-1}\int_0^t (t-\tau)[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}_1(x,\tau)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}_2(x,\tau))]d\tau \\ &+ a^{-1}\int_0^t (t-\tau)\Big\{G_1 * [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}_1) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}_2)](x,\tau)\Big\}d\tau.\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

所以应用引理 1.8.16 和推论 1.8.1 看出

$$\begin{aligned}&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{S\Psi}_1(\cdot,t) - \boldsymbol{S\Psi}_2(\cdot,t)\|_\infty \\ \leqslant\, & a^{-1}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}_1(\cdot,t)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}_2(\cdot,t))\|_\infty T^2 \\ =\, & a^{-1}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\|f(y_1,z_1) - f(y_2,z_2)\|_\infty + \|g(y_1,z_1) - g(y_2,z_2)\|_\infty\Big)T^2 \\ \leqslant\, & a^{-1}T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\|f(y_1,z_1) - f(y_2,z_1)\|_\infty + \|f(y_2,z_1) - f(y_2,z_2)\|_\infty \\ &+ \|g(y_1,z_1) - g(y_2,z_1)\|_\infty + \|g(y_2,z_1) - g(y_2,z_2)\|_\infty\Big) \\ =\, & a^{-1}T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Bigg(\left\|\int_0^1 (y_1-y_2)f'(y_2+\lambda(y_1-y_2),z_1)d\lambda\right\|_\infty \\ &+ \left\|\int_0^1 (z_1-z_2)f'(y_2,z_2+\lambda(z_1-z_2))d\lambda\right\|_\infty \\ &+ \left\|\int_0^1 (y_1-y_2)g'(y_2+\lambda(y_1-y_2),z_1)d\lambda\right\|_\infty \\ &+ \left\|\int_0^1 (z_1-z_2)g'(y_2,z_2+\lambda(z_1-z_2))d\lambda\right\|_\infty\Bigg) \\ \leqslant\, & 2a^{-1}K_2(2b+1)T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\Psi}_1(\cdot,t) - \boldsymbol{\Psi}_2(\cdot,t)\|_\infty,\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

$$
\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{S\Psi}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{S\Psi}_2(\cdot,t)\|_{m,p}\\
\leqslant{}& a^{-1}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}_1(\cdot,t))-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Psi}_2(\cdot,t))\|_{m,p}T^2\\
={}& a^{-1}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\|f(y_1,z_1)-f(y_2,z_2)\|_{m,p}+\|g(y_1,z_1)-g(y_2,z_2)\|_{m,p}\Big)T^2\\
\leqslant{}& a^{-1}T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\|f(y_1,z_1)-f(y_2,z_1)\|_{m,p}+\|f(y_2,z_1)-f(y_2,z_2)\|_{m,p}\\
&+\|g(y_1,z_1)-g(y_2,z_1)\|_{m,p}+\|g(y_2,z_1)-g(y_2,z_2)\|_{m,p}\Big)\\
={}& a^{-1}T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\left\|\int_0^1(y_1-y_2)f'(y_2+\lambda(y_1-y_2),z_1)d\lambda\right\|_{m,p}\right.\\
&+\left\|\int_0^1(z_1-z_2)f'(y_2,z_2+\lambda(z_1-z_2))d\lambda\right\|_{m,p}\\
&+\left\|\int_0^1(y_1-y_2)g'(y_2+\lambda(y_1-y_2),z_1)d\lambda\right\|_{m,p}\\
&\left.+\left\|\int_0^1(z_1-z_2)g'(y_2,z_2+\lambda(z_1-z_2))d\lambda\right\|_{m,p}\right)\\
\leqslant{}& a^{-1}T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\|f'(y_2+\lambda(y_1-y_2)\|_\infty\|y_1-y_2\|_{m,p}\\
&+\|f'(y_2,z_2+\lambda(z_1-z_2))\|_\infty\|z_1-z_2\|_{m,p}\\
&+\|g'(y_2+\lambda(y_1-y_2),z_1)\|_\infty\|y_1-y_2\|_{m,p}\\
&+\|g'(y_2,z_2+\lambda(z_1-z_2))\|_\infty\|z_1-z_2\|_{m,p}\Big)\\
\leqslant{}& K_3(2b+1)T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\Psi}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{\Psi}_2(\cdot,t)\|_{m,p},
\end{aligned}\tag{5.4.19}
$$

其中 $K_3(2b+1)$ 是依赖于 $2b+1$ 的常数.

类似于式 (5.4.19), 得到

$$
\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{S\Psi}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{S\Psi}_2(\cdot,t)\|\leqslant K_4(2b+1)T^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\Psi}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{\Psi}_2(\cdot,t)\|.\tag{5.4.20}
$$

由 (5.4.18)–(5.4.20) 推出

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{S\Psi}_1-\boldsymbol{S\Psi}_2\|_{X(T)}\\
\leqslant{}& K_5(2b+1)T^2\Big[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\Psi}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{\Psi}_2(\cdot,t)\|_{m,p}+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\Psi}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{\Psi}_2(\cdot,t)\|_\infty\\
&+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\Psi}_1(\cdot,t)-\boldsymbol{\Psi}_2(\cdot,t)\|\Big]\\
={}& K_5(2b+1)T^2\|\boldsymbol{\Psi}_1-\boldsymbol{\Psi}_2\|_{X(T)}.
\end{aligned}\tag{5.4.21}
$$

如果 T 满足

$$T \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{K_2(2b+1)}, \frac{1}{2K_5(2b+1)}\right\}, \tag{5.4.22}$$

则 $\|\boldsymbol{S\Psi}_1 - \boldsymbol{S\Psi}_2\|_{X(T)} \leqslant \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Psi}_1 - \boldsymbol{\Psi}_2\|_{X(T)}$. □

定理 5.4.1　设 $\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1 \in W^{m,p}\cap L^\infty \cap L^2$, $\boldsymbol{F} \in C^{m+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ $(m\geqslant 0)$, 且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, 则 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 存在唯一局部广义解 $\boldsymbol{W} \in C([0,T_0); W^{m,p}\cap L^\infty \cap L^2)$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)} \left(\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2} + \|\boldsymbol{W}_t(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\cap L^\infty \cap L^2}\right) < \infty, \tag{5.4.23}$$

则 $T_0 = \infty$. 这里 $\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2} = \|u(\cdot,t)\|_{m,p} + \|u(\cdot,t)\|_\infty + \|u(\cdot,t)\| + \|v(\cdot,t)\|_{m,p} + \|v(\cdot,t)\|_\infty + \|v(\cdot,t)\|$.

证明　由引理 5.4.1 和压缩映射原理推出, 对于适当选取的 $T>0$, S 有唯一不动点 $\boldsymbol{W} \in Q(b,T)$, 它显然是积分方程 (5.4.9) 的解. 对每一个 $T'>0$, 积分方程组 (5.4.9) 最多有一解属于 $X(T')$. 事实上, 设 $\widetilde{\boldsymbol{W}}_1, \widetilde{\boldsymbol{W}}_2 \in X(T')$ 是积分方程 (5.4.9) 的任意两个解, 其中 $\widetilde{\boldsymbol{W}}_i(x,t) = \begin{pmatrix} u_i(x,t) \\ v_i(x,t)\end{pmatrix} (i=1,2)$, 则对于 $0\leqslant t\leqslant T'$, 有

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{W}}_1(x,t) - \widetilde{\boldsymbol{W}}_2(x,t) = &- a^{-1}\int_0^t (t-\tau)\Big\{[\boldsymbol{F}(\widetilde{\boldsymbol{W}}_1(x,\tau)) - \boldsymbol{F}(\widetilde{\boldsymbol{W}}_2(x,\tau))] \\ &- [G_1 * \boldsymbol{F}(\widetilde{\boldsymbol{W}}_1)(x,\tau) - G_1 * \boldsymbol{F}(\widetilde{\boldsymbol{W}}_2)(x,\tau)]\Big\} d\tau. \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

类似于引理 5.4.1, 可得

$$\begin{aligned}&\left\|\widetilde{\boldsymbol{W}}_1(\cdot,t) - \widetilde{\boldsymbol{W}}_2(\cdot,t)\right\|_{W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2} \\ \leqslant{}& C(b,T')\int_0^t \left\|\widetilde{\boldsymbol{W}}_1(\cdot,t) - \widetilde{\boldsymbol{W}}_2(\cdot,t)\right\|_{W^{m,p}\cap L^\infty \cap L^2} d\tau,\end{aligned}$$

其中 $C(b,T')$ 是依赖于 b 和 T' 的常数. Gronwall 不等式推出, 对于 $0\leqslant t\leqslant T'$,

$$\left\|\widetilde{\boldsymbol{W}}_1(\cdot,t) - \widetilde{\boldsymbol{W}}_2(\cdot,t)\right\|_{W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2} = 0,$$

即积分方程组 (5.4.9) 最多有一解属于 $X(T')$.

令 $[0,T_0)$ 是 $\boldsymbol{W} \in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 所以现在只剩下指出, 如果式 (5.4.23) 成立, 则 $T_0 = \infty$. 为此考虑积分方程组

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}(x,t) = {}&\boldsymbol{W}(x,T') + \boldsymbol{W}_t(x,T')t - a^{-1}\int_0^t (t-\tau)\boldsymbol{F}(Y(x,\tau))d\tau \\ &+ a^{-1}\int_0^t (t-\tau)(G_1 * \boldsymbol{F}(Y))(x,\tau)d\tau,\end{aligned} \tag{5.4.25}$$

其中 $\boldsymbol{Y}(x,t)=\begin{pmatrix}\varphi(x,t)\\ \psi(x,t)\end{pmatrix}$.

根据式 (5.4.23), $\|\boldsymbol{W}(\cdot,T')\|_{W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2}+\|\boldsymbol{W}_t(\cdot,T')\|_{W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2}$ 对于每一个 $T'\in[0,T_0)$ 是一致有界的, 这就允许我们选择 $T^*\in(0,T_0)$, 使得对于每一个 $T'\in[0,T_0)$, 积分方程组 (5.4.25) 有唯一解 $\boldsymbol{Y}\in X(T^*)$. 如此 T^* 的存在是由引理 5.4.1 和压缩映射原理得来的. 特别地, 式 (5.4.22) 显示 T^* 的选择不依赖于 $T'\in[0,T_0)$. 置 $T'=T_0-\dfrac{T^*}{2}$, 令 $\boldsymbol{Y}(x,t)$ 表示积分方程 (5.4.25) 对应的解, 并定义 $\overline{\boldsymbol{W}}(x,t)$ 如下

$$\overline{\boldsymbol{W}}(x,t)=\begin{cases}\boldsymbol{W}(x,t), & t\in[0,T'],\\ \boldsymbol{Y}(x,t-T'), & t\in\left[T',T_0+\dfrac{T^*}{2}\right],\end{cases}\tag{5.4.26}$$

根据构造, $\overline{\boldsymbol{W}}(x,t)$ 是积分方程 (5.4.9) 在 $\left[0,T_0+\dfrac{T^*}{2}\right]$ 的解, 由于局部解的唯一性 $\overline{\boldsymbol{W}}(x,t)$ 是 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 的延拓. 这就破坏了 $[0,T_0)$ 的最大性. 所以, 如果式 (5.4.23) 成立, 则 $T_0=\infty$. □

注 5.4.1 如果 $\boldsymbol{W}\in C([0,T_0);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$ $(m\geqslant 0)$ 是 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 的广义解, 由式 (5.4.9) 和引理 1.8.16 知, $\boldsymbol{W}\in C^2([0,T_0);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$ $(m\geqslant 0)$ 和方程 (5.4.8) 成立.

2. 整体解

现在证明 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 的整体广义解和整体古典解的存在性和唯一性. 为此先证明下面有用的引理.

引理 5.4.2 设 $m\geqslant 0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1\in W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2$, $f,g\in L^2([0,T];\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $f(\boldsymbol{W})=f_0(\boldsymbol{W})+f_1(\boldsymbol{W})$, $g(\boldsymbol{W})=g_0(\boldsymbol{W})+g_1(\boldsymbol{W})$, $Z\in C^1([0,T];\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $Z(\boldsymbol{W}_0)\in L^1$ 和

$$dZ(\boldsymbol{W})=f_1(\boldsymbol{W})du+g_1(\boldsymbol{W})dv,$$

则对于 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 的广义解有能量等式

$$\begin{aligned}E(t)=&a\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2+a\|v_t(\cdot,t)\|^2+\|\Lambda^{-1}v_t(\cdot,t)\|^2\\&+2\int_{\mathbb{R}^N}Z(\boldsymbol{W})dx+2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}[f_0(\boldsymbol{W})u_\tau+g_0(\boldsymbol{W})v_\tau]dxd\tau\\=&E(0).\end{aligned}\tag{5.4.27}$$

证明 由注 5.4.1 知, 当 $T<T_0$ 时, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}_t$, $\boldsymbol{W}_{tt}\in C([0,T];L^2)$. 从方程组

(5.4.7) 推得

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda^{-2}\boldsymbol{W}_{tt}\| &= \||\xi|^{-2}\widehat{\boldsymbol{W}}_{tt}\| = \||\xi|^{-2}L[\widehat{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})}]\| \\
&= \left\||\xi|^{-2}\frac{-|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\widehat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{W})\right\| \\
&\leqslant \|\widehat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{W})\| = \|f(\boldsymbol{W})\| + \|g(\boldsymbol{W})\| \\
&\leqslant 2K_2(\|\boldsymbol{W}\|_\infty)\|\boldsymbol{W}\|,
\end{aligned} \tag{5.4.28}
$$

因此 $\Lambda^{-2}\boldsymbol{W}_{tt} \in C([0,T];L^2)$.

类似有

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda^{-1}\boldsymbol{W}_t\| \leqslant & \|\Lambda^{-1}\boldsymbol{W}_1\| + \int_0^t \|\Lambda^{-1}L[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})]\|d\tau \\
=&\|\Lambda^{-1}\boldsymbol{W}_1\| + \int_0^t \left\||\xi|^{-1}\frac{-|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\widehat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{W})\right\| d\tau \\
\leqslant&\|\Lambda^{-1}\boldsymbol{W}_1\| + 2TK_2(\|\boldsymbol{W}\|_\infty)\|\boldsymbol{W}\|,
\end{aligned} \tag{5.4.29}
$$

所以 $\Lambda^{-1}\boldsymbol{W}_t \in C([0,T];L^2)$. 由方程组 (5.4.7) 得

$$
\Lambda^{-2}\boldsymbol{W}_{tt} = \Lambda^{-2}L[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})]. \tag{5.4.30}
$$

式 (5.4.30) 两端作 Fourier 变换后, 第一个分量乘以 $(1+a|\xi|^2)\widehat{u_t}$, 而第二个分量乘以 $(1+a|\xi|^2)\widehat{v_t}$, 且在 $\mathbb{R}^N$ 上对 ξ 积分, 有

$$
\begin{pmatrix}
\langle|\xi|^{-2}(1+a|\xi|^2)\widehat{u_{tt}}, \widehat{u_t}\rangle + \langle\widehat{f(\boldsymbol{W})}, \hat{u}_t\rangle \\
\langle|\xi|^{-2}(1+a|\xi|^2)\widehat{v_{tt}}, \widehat{v_t}\rangle + \langle\widehat{g(\boldsymbol{W})}, \hat{v}_t\rangle
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4.31}
$$

式 (5.4.31) 作 Fourier 逆变换得

$$
\begin{pmatrix}
\langle\Lambda^{-2}u_{tt} + au_{tt} + f(\boldsymbol{W}), u_t\rangle \\
\langle\Lambda^{-2}v_{tt} + av_{tt} + g(\boldsymbol{W}), v_t\rangle
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4.32}
$$

由式 (5.4.32) 推出

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigg(\|\Lambda^{-1}u_t(\cdot,t)\|^2 + a\|u_t(\cdot,t)\|^2 + \|\Lambda^{-1}v_t(\cdot,t)\|^2 + a\|v_t(\cdot,t)\|^2 \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}^N} Z(\boldsymbol{W})dx + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}[f_0(\boldsymbol{W})u_\tau + g_0(\boldsymbol{W})v_\tau]dxd\tau\bigg) = 0.
\end{aligned} \tag{5.4.33}
$$

式 (5.4.33) 在 $(0,t)$ 上对 t 积分, 即得式 (5.4.27).

注 5.4.2 在引理 5.4.2 中作 $f(\boldsymbol{W})$ 的分解 $f(\boldsymbol{W}) = f_0(\boldsymbol{W}) + f_1(\boldsymbol{W})$ 和 $g(\boldsymbol{W})$ 的分解 $g(\boldsymbol{W}) = g_0(\boldsymbol{W}) + g_1(\boldsymbol{W})$, 使得 $f_1(\boldsymbol{W})$ 和 $g_1(\boldsymbol{W})$ 组成 $Z(\boldsymbol{W})$ 的全微分 $dZ(\boldsymbol{W}) = f_1(\boldsymbol{W})du + g_1(\boldsymbol{W})dv$. 例如见后面 Cauchy 问题 (5.4.63)–(5.4.66).

定理 5.4.2 设 $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2$ $(m \geqslant 0)$, $\Lambda^{-1}\boldsymbol{W}_1 \in L^2 \times L^2$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) \in C^{m+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $f(\boldsymbol{W}) = f_0(\boldsymbol{W}) + f_1(\boldsymbol{W})$, $g(\boldsymbol{W}) = g_0(\boldsymbol{W}) + g_1(\boldsymbol{W})$, $Z(\boldsymbol{W}) \geqslant 0$ 满足 $Z \in C^1([0,T]; L^1 \times L^\infty)$, $Z(\boldsymbol{W}_0) \in L^\infty$ 且

$$dZ(\boldsymbol{W}) = f_1(\boldsymbol{W})du + g_1(\boldsymbol{W})dv.$$

若存在 ν $(1 \leqslant \nu \leqslant \infty)$, 使得

$$|f_1(\boldsymbol{W})| + |g_1(\boldsymbol{W})| \leqslant C_1[Z(\boldsymbol{W})]^{\frac{1}{\nu}}(|u| + |v|) + C_2, \tag{5.4.34}$$

$$|f_0(\boldsymbol{W})|^2 + |g_0(\boldsymbol{W})|^2 \leqslant C_3 Z(\boldsymbol{W}), \tag{5.4.35}$$

其中 $C_1, C_2, C_3 > 0$ 是常数, 则 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 存在唯一整体古典解 $\boldsymbol{W} \in C^3([0,\infty); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)$.

证明 根据定理 5.4.1, 只需证明式 (5.4.23) 成立. 方程组 (5.4.8) 的第一个分量乘以 $u_t(x,t)$, 而方程组 (5.4.8) 的第二个分量乘以 $v_t(x,t)$, 所得的第一方程和第二个方程相加, 可见

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[u_t^2 + v_t^2 + 2Z(\boldsymbol{W})] \\
&= 2a^{-1}\Big[(G_1 * f(\boldsymbol{W}))u_t + (G_1 * g(\boldsymbol{W}))v_t - f_0(\boldsymbol{W})u_t - g_0(\boldsymbol{W})v_t\Big] \\
&= 2a^{-1}\Big[(G_1 * f_1(\boldsymbol{W}))u_t + (G_1 * g_1(\boldsymbol{W}))v_t + (G_1 * f_0(\boldsymbol{W}))u_t \\
&\quad + (G_1 * g_0(\boldsymbol{W}))v_t - f_0(\boldsymbol{W})u_t - g_0(\boldsymbol{W})v_t\Big] \\
&\leqslant 2a^{-1}[G_1 * (|f_1(\boldsymbol{W})| + |g_1(\boldsymbol{W})|)](|u_t| + |v_t|) + 2a^{-1}[G_1 * (|f_0(\boldsymbol{W})| + |g_0(\boldsymbol{W})|)] \\
&\quad \times (|u_t| + |v_t|) + a^{-2}(|f_0(\boldsymbol{W})|^2 + |g_0(\boldsymbol{W})|^2) + (|u_t|^2 + |v_t|^2).
\end{aligned} \tag{5.4.36}$$

应用假设式 (5.4.34) 和式 (5.4.35), Hölder 不等式及式 (5.4.27), 发现

$$\begin{aligned}
\big|G_1 * (|f_1(\boldsymbol{W})| + |g_1(\boldsymbol{W})|)\big| &\leqslant C_1[G_1 * [Z(\boldsymbol{W})]^{\frac{1}{\nu}}(|u| + |v|)] + C_2 \\
&\leqslant C_1\|G_1\|_q\|[Z(\boldsymbol{W})]^{\frac{1}{\nu}}(|u| + |v|)\|_\nu + C_2 \\
&\leqslant C_1\|G_1\|_q(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)\|Z(\boldsymbol{W})\|_1^{\frac{1}{\nu}} + C_2 \\
&\leqslant C_4(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) + C_2,
\end{aligned} \tag{5.4.37}$$

其中 $\dfrac{1}{\nu} + \dfrac{1}{q} = 1$, $C_4 = C_1\|G_1\|_q\left(\dfrac{1}{2}E(0)\right)^{\frac{1}{\nu}}$,

$$\begin{aligned}
\big|G_1 * (|f_0(\boldsymbol{W})| + |g_0(\boldsymbol{W})|)\big| &\leqslant \|G_1\|(\|f_0(\boldsymbol{W})\| + \|g_0(\boldsymbol{W})\|) \\
&\leqslant (2C_3)^{\frac{1}{2}}\|G_1\|\|Z(\boldsymbol{W})\|_1^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant (2C_3)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}E(0)\right)^{\frac{1}{2}}\|G_1\| = C_5.
\end{aligned} \tag{5.4.38}$$

把式 (5.4.37) 和式 (5.4.38) 代入式 (5.4.36), 并两边都加上 $2uu_t+2vv_t$, 可见

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[u^2+u_t^2+v^2+v_t^2+2Z(\boldsymbol{W})\Big]\\ \leqslant\ &2a^{-1}[C_4(\|u\|_\infty+\|v\|_\infty)+C_2](\|u_t\|_\infty+\|v_t\|_\infty)\\ &+2a^{-1}C_5(\|u_t\|_\infty+\|v_t\|_\infty)+a^{-2}C_3\|Z(\boldsymbol{W})\|_\infty+(\|u_t\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2)\\ &+\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2+\|u_t\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2\\ \leqslant\ &C_6(\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2+\|u_t\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2+2\|Z(\boldsymbol{W})\|_\infty)+C_7.\end{aligned}\tag{5.4.39}$$

式 (5.4.39) 关于 t 积分有

$$\begin{aligned}&\|u\|_\infty^2+\|u_t\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2+2\|Z(\boldsymbol{W})\|_\infty\\ \leqslant\ &\|u_0\|_\infty^2+\|v_0\|_\infty^2+\|u_1\|_\infty^2+\|v_1\|_\infty^2+2\|Z(\boldsymbol{W}_0)\|_\infty\\ &+C_6\int_0^t[\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2+\|u_t\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2+2\|Z(\boldsymbol{W})\|_\infty]d\tau+C_8(T).\end{aligned}\tag{5.4.40}$$

Gronwall 不等式给出

$$\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2+\|u_t\|_\infty^2+\|v_t\|_\infty^2\leqslant C_9(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

即

$$\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_\infty^2+\|\boldsymbol{W}_t(\cdot,t)\|_\infty^2\leqslant C_9(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{5.4.41}$$

由积分方程组 (5.4.9) 和引理 1.8.16 得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant\ &\|\boldsymbol{W}_0\|_{m,p}+\|\boldsymbol{W}_1\|_{m,p}T\\ &+a^{-1}\int_0^t(t-\tau)[\|G_1*\mathbf{F}(\boldsymbol{W})(\cdot,\tau)\|_{m,p}+\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})(\cdot,\tau)\|_{m,p}]d\tau\\ \leqslant\ &\|\boldsymbol{W}_0\|_{m,p}+\|\boldsymbol{W}_1\|_{m,p}T\\ &+2a^{-1}TK_2(\sqrt{C_9(T)})\int_0^t\|\boldsymbol{W}(\cdot,\tau)\|_{m,p}d\tau.\end{aligned}\tag{5.4.42}$$

Gronwall 不等式给出

$$\|\boldsymbol{W}(\cdot,t)\|_{m,p}\leqslant(\|\boldsymbol{W}_0\|_{m,p}+\|\boldsymbol{W}_1\|_{m,p}T)e^{2a^{-1}T^2K_2(\sqrt{C_9(T)})},\quad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{5.4.43}$$

同理可得

$$\|\boldsymbol{W}\|\leqslant(\|\boldsymbol{W}_0\|+\|\boldsymbol{W}_1\|T)e^{2a^{-1}T^2K_2(\sqrt{C_9(T)})},\quad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{5.4.44}$$

式 (5.4.9) 关于 t 求导, 得

$$\boldsymbol{W}_t(x,t)=\boldsymbol{W}_1(x)-a^{-1}\int_0^t\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})(x,\tau)d\tau+a^{-1}\int_0^t(G_1*\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}))(x,\tau)d\tau.\tag{5.4.45}$$

显然, 由式 (5.4.45) 得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{W}_t\|_{m,p} &\leqslant \|\boldsymbol{W}_1\|_{m,p} + 2a^{-1}\int_0^t \|F(\boldsymbol{W})(\cdot,\tau)\|_{m,p}d\tau \\ &\leqslant \|\boldsymbol{W}_1\|_{m,p} + 2a^{-1}K_2(\sqrt{C_9(T)})\int_0^t \|\boldsymbol{W}(\cdot,\tau)\|_{m,p}d\tau \\ &\leqslant C_{10}(T), \quad 0\leqslant t\leqslant T. \end{aligned} \tag{5.4.46}$$

类似于式 (5.4.44) 得

$$\|\boldsymbol{W}_t\| \leqslant C_{11}(T). \tag{5.4.47}$$

由式 (5.4.41) , (5.4.44) , (5.4.46) 和式 (5.4.47) 知式 (5.4.23) 成立.

式 (5.4.8) 对 t 求导, 得

$$\boldsymbol{W}_{ttt}(x,t) = a^{-1}G_1 * \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})_t(x,t) - a^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}(x,t))_t \tag{5.4.48}$$

及 $\boldsymbol{W}_{ttt}\in C([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. 于是 $\boldsymbol{W}\in C^3([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. □

引理 5.4.3 设定理 5.4.2 的条件成立, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})\in C^{k+m+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, 其中 $k\geqslant 0, m\geqslant 2$ 是任意整数, 则 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 的广义解 $\boldsymbol{W}(x,t)\in C^{k+3+l}([0,T];W^{m-l,p}\cap L^\infty\cap L^2)$ $(\forall\, T>0)$, $0\leqslant l\leqslant m$.

证明 首先证明 $\boldsymbol{W}\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. 当 $k=0$ 时, 由定理 5.4.2 知 $\boldsymbol{W}\in C^3([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. 令

$$\boldsymbol{W}\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2), \quad 0\leqslant k<s. \tag{5.4.49}$$

当 $k=s$ 时, 式 (5.4.49) 对 t 求导 s 次, 得

$$\begin{aligned}&2\boldsymbol{W}_{t^{s+3}}\\ &=a^{-1}(G_1*\boldsymbol{F})(\boldsymbol{W})_{t^{s+1}} - a^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})_{t^{s+1}}\\ &=a^{-1}\begin{pmatrix}(G_1*f(\boldsymbol{W}))_{t^{s+1}}\\(G_1*g(\boldsymbol{W}))_{t^{s+1}}\end{pmatrix} - a^{-1}\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{W})_{t^{s+1}}\\ g(\boldsymbol{W})_{t^{s+1}}\end{pmatrix}\\ &=a^{-1}\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\left[(s+1)!\frac{\partial^\rho(G*f(u,v))}{\partial u^{\rho_1}\partial v^{\rho_2}}\sum_{P(\rho,s+1)}\prod_{j=1}^{s_1}\frac{(\partial_{t^j}u)^{\alpha_j}}{\alpha_j!(j!)^{\alpha_j}}\prod_{k=1}^{s_2}\frac{(\partial_{t^k}v)^{\beta_k}}{\beta_k!(k!)^{\beta_k}}\right]\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\left[(s+1)!\frac{\partial^\rho(G*g(u,v))}{\partial u^{\rho_1}\partial v^{\rho_2}}\sum_{P(\rho,s+1)}\prod_{j=1}^{s_1}\frac{(\partial_{t^j}u)^{\alpha_j}}{\alpha_j!(j!)^{\alpha_j}}\prod_{k=1}^{s_2}\frac{(\partial_{t^k}v)^{\beta_k}}{\beta_k!(k!)^{\beta_k}}\right]\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
-a^{-1}\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\left[(s+1)!\frac{\partial^{\rho}f(u,v)}{\partial u^{\rho_1}\partial v^{\rho_2}}\sum_{P(\rho,s+1)}\prod_{j=1}^{s_1}\frac{(\partial_{t^j}u)^{\alpha_j}}{\alpha_j!(j!)^{\alpha_j}}\prod_{k=1}^{s_2}\frac{(\partial_{t^k}v)^{\beta_k}}{\beta_k!(k!)^{\beta_k}}\right]\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant s+1}\left[(s+1)!\frac{\partial^{\rho}g(u,v)}{\partial u^{\rho_1}\partial v^{\rho_2}}\sum_{P(\rho,s+1)}\prod_{j=1}^{s_1}\frac{(\partial_{t^j}u)^{\alpha_j}}{\alpha_j!(j!)^{\alpha_j}}\prod_{k=1}^{s_2}\frac{(\partial_{t^k}v)^{\beta_k}}{\beta_k!(k!)^{\beta_k}}\right]\end{pmatrix}, \tag{5.4.50}
$$

其中 $P(\rho,s+1)=\{\rho_1+\rho_2=\rho, s_1+s_2=s+1, \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s_1}=\rho_1, \alpha_1+2\alpha_2+\cdots+s_1\alpha_{s_1}=s_1, \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{s_2}=\rho_2, \beta_1+2\beta_2+\cdots+s_2\beta_{s_2}=s_2\}$.

应用推论 1.8.1 和式 (5.4.49), 由式 (5.4.50) 得 $\boldsymbol{W}\in C^{s+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$.

从以上证明知, $\boldsymbol{W}\in C^{k+3}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$, $\forall\ k\geqslant 0$, $m\geqslant 2$. 下面证明

$$
\boldsymbol{W}\in C^{k+3+l}([0,T];W^{m-l,p}\cap L^\infty\cap L^2),\quad 0<l\leqslant m. \tag{5.4.51}
$$

式 (5.4.48) 对 t 求导 $k+1$ 次, 得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{W}_{t^{k+4}}\\
&=a^{-1}(G*\boldsymbol{F})(\boldsymbol{W})_{t^{k+2}}-a^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})_{t^{k+2}}\\
&=a^{-1}\begin{pmatrix}(G*f(\boldsymbol{W}))_{t^{k+2}}\\(G*g(\boldsymbol{W}))_{t^{k+2}}\end{pmatrix}-a^{-1}\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{W})_{t^{k+2}}\\g(\boldsymbol{W})_{t^{k+2}}\end{pmatrix}\\
&=a^{-1}\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\left[(k+2)!\frac{\partial^{\rho}(G*f(u,v))}{\partial u^{\rho_1}\partial v^{\rho_2}}\sum_{P(\rho,k+2)}\prod_{j=1}^{s_1}\frac{(\partial_{t^j}u)^{\alpha_j}}{\alpha_j!(j!)^{\alpha_j}}\prod_{k=1}^{s_2}\frac{(\partial_{t^k}v)^{\beta_k}}{\beta_k!(k!)^{\beta_k}}\right]\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\left[(k+2)!\frac{\partial^{\rho}(G*g(u,v))}{\partial u^{\rho_1}\partial v^{\rho_2}}\sum_{P(\rho,k+2)}\prod_{j=1}^{s_1}\frac{(\partial_{t^j}u)^{\alpha_j}}{\alpha_j!(j!)^{\alpha_j}}\prod_{k=1}^{s_2}\frac{(\partial_{t^k}v)^{\beta_k}}{\beta_k!(k!)^{\beta_k}}\right]\end{pmatrix}\\
&\quad -a^{-1}\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\left[(k+2)!\frac{\partial^{\rho}f(u,v)}{\partial u^{\rho_1}\partial v^{\rho_2}}\sum_{P(\rho,k+2)}\prod_{j=1}^{s_1}\frac{(\partial_{t^j}u)^{\alpha_j}}{\alpha_j!(j!)^{\alpha_j}}\prod_{k=1}^{s_2}\frac{(\partial_{t^k}v)^{\beta_k}}{\beta_k!(k!)^{\beta_k}}\right]\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant\rho\leqslant k+2}\left[(k+2)!\frac{\partial^{\rho}g(u,v)}{\partial u^{\rho_1}\partial v^{\rho_2}}\sum_{P(\rho,k+2)}\prod_{j=1}^{s_1}\frac{(\partial_{t^j}u)^{\alpha_j}}{\alpha_j!(j!)^{\alpha_j}}\prod_{k=1}^{s_2}\frac{(\partial_{t^k}v)^{\beta_k}}{\beta_k!(k!)^{\beta_k}}\right]\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5.4.52}
$$

其中 $P(\rho,k+2)=\{\rho_1+\rho_2=\rho, s_1+s_2=k+2, \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s_1}=\rho_1, \alpha_1+2\alpha_2+\cdots+s_1\alpha_{s_1}=s_1, \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{s_2}=\rho_2, \beta_1+2\beta_2+\cdots+s_2\beta_{s_2}=s_2\}$. 利用推论 1.8.1, 式 (5.4.52) 和 $\boldsymbol{W}\in C^{k+2}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$ 有 $\boldsymbol{W}\in C^{k+4}([0,T];W^{m-1,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. 式 (5.4.48) 对 t 求导, 可得 $\boldsymbol{W}\in C^{k+5}([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. 重复这个过程 $m-2$ 次, 得式 (5.4.51). □

由引理 5.4.3 知下面的定理成立.

定理 5.4.3 设引理 5.4.3 的条件成立和 $k=0$, $l=0$, $m>2+\frac{N}{p}$, 则 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 存在唯一整体古典解 $\boldsymbol{W}(x,t)\in C^3([0,\infty);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$, 即 $\boldsymbol{W}(x,t)\in C^3([0,\infty);C^2(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty\cap L^2)$.

5.4.3 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 解的爆破

下面应用凸性引理证明 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 解的爆破.

定理 5.4.4 设 $\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1\in L^2$, $\Lambda^{-1}u_1, \Lambda^{-1}v_1\in L^2$, $f_0(\boldsymbol{W})=0$, $g_0(\boldsymbol{W})=0$ 和

$$f(\boldsymbol{\Phi})\varphi_1+g(\boldsymbol{\Phi})\varphi_2\leqslant 2(1+2\gamma)Z(\boldsymbol{\Phi}),\quad \forall\ \boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}, \tag{5.4.53}$$

其中 $\gamma>0$ 是一个常数, 则 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 的解在有限时刻发生爆破, 如果下面条件之一成立:

(1) $E(0)<0$;

(2) $E(0)=0$, $a\langle u_0,u_1\rangle+\langle\Lambda^{-1}u_0,\Lambda^{-1}u_1\rangle+a\langle v_0,v_1\rangle+\langle\Lambda^{-1}v_0,\Lambda^{-1}v_1\rangle>0$;

(3) $E(0)>0$,

$$\begin{aligned}&a\langle u_0,u_1\rangle+\langle\Lambda^{-1}u_0,\Lambda^{-1}u_1\rangle+a\langle v_0,v_1\rangle+\langle\Lambda^{-1}v_0,\Lambda^{-1}v_1\rangle\\ >&[E(0)(a\|u_0\|^2+a\|v_0\|^2+\|\Lambda^{-1}u_0\|^2+\|\Lambda^{-1}v_0\|^2)]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中

$$E(0)=\|\Lambda^{-1}u_1\|^2+a\|u_1\|^2+\|\Lambda^{-1}v_1\|^2+a\|v_1\|^2+2\int_{\mathbb{R}^N}Z(\boldsymbol{W}_0(x))dx. \tag{5.4.54}$$

证明 假定 Cauchy 问题 (5.4.5), (5.4.6) 解存在的最大时间区间是无穷. 由注 5.4.1 知对于 $T<T_0$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}_t$, $\boldsymbol{W}_{tt}\in C([0,T];W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. 令

$$H(t)=\|\Lambda^{-1}u(\cdot,t)\|^2+a\|u(\cdot,t)\|^2+\|\Lambda^{-1}v(\cdot,t)\|^2+a\|v(\cdot,t)\|^2+\mu(t+t_0)^2, \tag{5.4.55}$$

其中 μ 和 t_0 是待定非负常数. 于是

$$\dot{H}(t)=2[\langle\Lambda^{-1}u,\Lambda^{-1}u_t\rangle+a\langle u,u_t\rangle+\langle\Lambda^{-1}v,\Lambda^{-1}v_t\rangle+a\langle v,v_t\rangle+\mu(t+t_0)].$$

利用 Hölder 不等式, 得

$$\dot{H}(t)^2\leqslant 4H(t)\big[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+a\|u_t\|^2+\|\Lambda^{-1}v_t\|^2+a\|v_t\|^2+\mu\big]. \tag{5.4.56}$$

借助于方程 (5.4.30), 式 (5.4.53) 和式 (5.4.54) 推出

$$\begin{aligned}\ddot{H}(t) =& 2[\langle\Lambda^{-2}u_{tt}+au_{tt},u\rangle+\langle\Lambda^{-2}v_{tt}+av_{tt},v\rangle\\&+\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+a\|u_t\|^2+\|\Lambda^{-1}v_t\|^2+a\|v_t\|^2+\mu]\\=&2\left[\langle-f(u,v),u\rangle+\langle-g(u,v),v\rangle+\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+a\|u_t\|^2+\|\Lambda^{-1}v_t\|^2+a\|v_t\|^2+\mu\right]\\=&4(1+\gamma)\left[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+a\|u_t\|^2+\|\Lambda^{-1}v_t\|^2+a\|v_t\|^2\right]+2\mu-2(1+2\alpha)E(0)\\&+2\int_{\mathbb{R}^N}[2(1+2\gamma)Z(\boldsymbol{W})-f(\boldsymbol{W})u-g(\boldsymbol{W})v]dx\\\geqslant&4(1+\gamma)\left[\|\Lambda^{-1}u_t\|^2+a\|u_t\|^2+\|\Lambda^{-1}v_t\|^2+a\|v_t\|^2\right]\\&+2\mu-2(1+2\alpha)E(0).\end{aligned}\tag{5.4.57}$$

由式 (5.4.55)–(5.4.57) 知

$$\ddot{H}(t)H(t)-(1+\gamma)\dot{H}(t)^2\geqslant-2(1+2\gamma)(E(0)+\mu)H(t).\tag{5.4.58}$$

如果 $E(0)<0$, 取 $\mu=-E(0)>0$, 式 (5.4.58) 变成

$$H(t)\ddot{H}(t)-(1+\gamma)\dot{H}(t)^2\geqslant 0.$$

若 t_0 充分大, $H(0)>0$ 和 $\dot{H}(0)>0$. 由引理 1.8.7 知至多存在 t 等于

$$T_0=\frac{H(0)}{\gamma\dot{H}(0)}<\infty$$

时, $H(t)$ 变为无穷.

如果 $E(0)=0$, 取 $\mu=0$, 则由式 (5.4.58) 得

$$H(t)\ddot{H}(t)-(1+\gamma)\dot{H}(t)^2\geqslant 0.$$

由假定 (2) 也有 $\dot{H}(0)>0$. 根据引理 1.8.7 看出, t 在至多等于

$$T_0=\frac{H(0)}{\gamma\dot{H}(0)}<\infty$$

时, $H(t)$ 变为无穷.

如果 $E(0)>0$, 取 $\mu=0$, 式 (5.4.58) 变为

$$H(t)\ddot{H}(t)-(1+\gamma)\dot{H}(t)^2\geqslant-2(1+2\gamma)E(0)H(t).\tag{5.4.59}$$

定义 $h(t)=H^{-\gamma}(t)$, 则

$$\dot{h}(t)=-\gamma H^{-\gamma-1}(t)\dot{H}(t),$$

$$\ddot{h}(t) = -\gamma H^{-\gamma-2}(t)\left[H(t)\ddot{H}(t) - (1+\gamma)\dot{H}^2(t)\right]$$
$$\leqslant 2\gamma(1+2\gamma)E(0)H^{-\gamma-1}(t). \tag{5.4.60}$$

根据假定 (3) 有 $\dot{h}(0) < 0$. 令

$$t^* = \sup\left\{t \middle| \dot{h}(\tau) < 0, \tau \in [0,t)\right\}.$$

由 $\dot{h}(t)$ 的连续性知, t^* 是正的. 式 (5.4.60) 两端同乘以 $2\dot{h}(t)$, 得

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{h}(t)^2\right] \geqslant -4\gamma^2(1+2\gamma)E(0)H^{-2\gamma-2}(t)\dot{H}(t)$$
$$= 4\gamma^2\frac{d}{dt}\left[H^{-2\gamma-1}(t)\right]E(0), \quad \forall t \in [0,t^*). \tag{5.4.61}$$

式 (5.4.61) 在 $(0,t)$ ($0 \leqslant t < t^*$) 上对 t 积分, 有

$$\dot{h}(t)^2 \geqslant 4\gamma^2 E(0)H^{-2\gamma-1}(t) + \dot{h}(0)^2 - 4\gamma^2 E(0)H^{-2\gamma-1}(0).$$

由假设 (3) 推得

$$\dot{h}(0)^2 - 4\gamma^2 E(0)H^{-2\gamma-1}(0) > 0.$$

所以根据 $\dot{h}(t)$ 的连续性知, 对于 $0 \leqslant t < t^*$,

$$\dot{h}(t) \leqslant -[\dot{h}(0)^2 - 4\gamma^2 E(0)H^{-2\gamma-1}(0)]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.4.62}$$

从 t^* 的定义看出, 式 (5.4.62) 对所有的 $t \geqslant 0$ 成立. 因此,

$$h(t) \leqslant h(0) - [\dot{h}(0)^2 - 4\gamma^2 E(0)H^{-2\gamma-1}(0)]^{\frac{1}{2}}t, \quad \forall\, t > 0.$$

从而对于某个 T_1,

$$0 < T_1 \leqslant T_0 = \frac{h(0)}{[\dot{h}(0)^2 - 4\gamma^2 E(0)H^{-2\gamma-1}(0)]^{\frac{1}{2}}},$$

$h(T_1) = 0$. 所以 $H(t)$ 在 T_1 时变为无穷. 这与解存在的最大时间区间为无穷的事实矛盾. 因而解存在的最大时间为有限. □

5.4.4 定理的应用

首先考虑下列 Cauchy 问题

$$\frac{\rho}{a}u_{tt} = \beta\Delta u + \frac{\beta}{2}\Delta(v^2) + \frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}\Delta u_{tt}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{5.4.63}$$

$$\frac{\rho}{a}v_{tt} = \frac{\beta}{2}\Delta(v^3) + \frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}\Delta v_{tt}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{5.4.64}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.4.65}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.4.66}$$

其中 l 和 $\frac{1}{b}$ 是模型的特征长度, 它们的比率用 $\beta = lb$ 表示, ρ 表示线性质量的密度和 $a > 0$ 是常数. 事实上, 当 $N = 1$ 时, 方程组 (5.4.63), (5.4.64) 变为方程组 (4.1.1), (4.1.2).

Cauchy 问题 (5.4.63)–(5.4.66) 可以改写成向量形式

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{W}_{tt} - A\Delta \boldsymbol{W}_{tt} = \Delta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0,\\
&\boldsymbol{W}(x,0) = \boldsymbol{W}_0(x), \quad \boldsymbol{W}_t(x,0) = \boldsymbol{W}_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,
\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{W}(x,t) = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) = -\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\rho}\left(\beta u + \dfrac{\beta}{2} v\right) \\ \dfrac{a\beta}{2\rho} v^3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{l^2}{12}, & 0 \\ 0, & \dfrac{l^2}{12} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{W}_0(x) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W}_1(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ v_1(x) \end{pmatrix}.$$

定理 5.4.5　设 $\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2$ $(m \geqslant 0)$, $\Lambda^{-1}\boldsymbol{W}_1 \in L^2 \times L^2$, $\boldsymbol{F} \in C^{m+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, 则 Cauchy 问题 (5.4.63)–(5.4.66) 存在唯一的整体广义解 $\boldsymbol{W} \in C^3([0,\infty); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)$.

证明　显然 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. 令

$$\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{W}) &= \frac{a\beta}{\rho} u, \quad f_0(\boldsymbol{W}) = \frac{a\beta}{2\rho} v^2,\\
g_1(\boldsymbol{W}) &= \frac{a\beta}{2\rho} v^3, \quad g_0(\boldsymbol{W}) = 0,\\
Z(\boldsymbol{W}) &= \frac{a\beta}{2\rho} u^2 + \frac{a\beta}{8\rho} v^4 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

则

$$dZ(\boldsymbol{W}) = f_1(\boldsymbol{W})du + g_1(\boldsymbol{W})dv,$$

$$\begin{aligned}
|f_1(\boldsymbol{W}) + g_1(\boldsymbol{W})| &\leqslant \frac{a\beta}{\rho}(|u| + |v|^3) \leqslant \frac{a\beta}{\rho}(|u|^2 + |v|^3) + \frac{a\beta}{2\rho}\\
&\leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{a\beta}{\rho}} Z(\boldsymbol{W})^{\frac{1}{2}}(|u| + |v|) + \frac{a\beta}{2\rho},
\end{aligned}$$

$$|f_0(\boldsymbol{W})|^2 + |g_0(\boldsymbol{W})|^2 = \frac{a^2\beta^2}{4\rho^2} v^4 \leqslant \frac{2a\beta}{\rho} Z(\boldsymbol{W}).$$

从而定理 5.4.2 的假定成立, 所以 Cauchy 问题 (5.4.63)–(5.4.66) 存在唯一整体广义解 $\boldsymbol{W} \in C^3([0,\infty); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)$. □

易证下列引理和定理成立.

引理 5.4.4 设定理 5.4.5 的条件成立, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) \in C^{k+m+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, 其中 $k \geqslant 0$ 和 $m \geqslant 2$ 是任意整数, 那么 Cauchy 问题 (5.4.63)–(5.4.66) 的广义解 $\boldsymbol{W}(x,t) \in C^{k+3+l}([0,T]; W^{m-l,p} \cap L^\infty \cap L^2)$ $(\forall\, T > 0)$, $0 \leqslant l \leqslant m$.

定理 5.4.6 设引理 5.4.4 的条件成立, 且 $k = 0$, $l = 0$, $m > 2 + \dfrac{N}{p}$, 则问题 (5.4.63)–(5.4.66) 存在唯一的整体古典解 $\boldsymbol{W}(x,t) \in C^3([0,T]; W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)$, 即 $\boldsymbol{W}(x,t) \in C^3([0,T]; C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty \cap L^2)$.

其次, 考虑下面的 Cauchy 问题

$$\frac{\rho}{a} u_{tt} = \beta \Delta u - \frac{\beta^2}{2} \Delta u^2 + \frac{\beta}{2} \Delta (v^2) + \frac{\rho}{a} \frac{l^2}{12} \Delta u_{tt}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{5.4.67}$$

$$\frac{\rho}{a} v_{tt} = \beta \Delta (uv) + \frac{\rho}{a} \frac{l^2}{12} \Delta v_{tt}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \tag{5.4.68}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.4.69}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.4.70}$$

其中常数 a, ρ, β, l 的意义同方程组 (4.1.1), (4.1.2) 中的常数. 事实上, 当 $N = 1$ 时, 方程组 (5.4.67), (5.4.69) 变为方程组 (4.1.1), (4.1.2).

Cauchy 问题 (5.4.67), (5.4.68) 可以改写为

$$\boldsymbol{W}_{tt} - \boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{W}_{tt} = \Delta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}), \quad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \tag{5.4.71}$$

$$\boldsymbol{W}(x,0) = \boldsymbol{W}_0(x), \quad \boldsymbol{W}_t(x,0) = \boldsymbol{W}_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.4.72}$$

其中

$$\boldsymbol{W}(x,t) = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) = \begin{pmatrix} \dfrac{a\beta}{\rho} \left(u - \dfrac{\beta}{2} u^2 + \dfrac{1}{2} v^2 \right) \\ \dfrac{a\beta}{\rho} uv \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{l^2}{12}, & 0 \\ 0, & \dfrac{l^2}{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W}_0(x) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W}_1(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ v_1(x) \end{pmatrix}.$$

定理 5.4.7 设 $\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1 \in W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2$ $(m \geqslant 0)$, 则 Cauchy 问题 (5.4.71), (5.4.72) 存在唯一局部广义解 $\boldsymbol{W} \in C([0,T_0); W^{m,p} \cap L^\infty \cap L^2)$, 其中 $[0, T_0)$ 是解存在的最大时间区间.

证明　显然 $\boldsymbol{F}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 及 $\boldsymbol{F}\in C^{m+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. 由定理 5.4.1 可知 Cauchy 问题 (5.4.71), (5.4.72) 存在唯一局部广义解 $\boldsymbol{W}\in C([0,T_0);W^{m,p}\cap L^\infty\cap L^2)$. □

定理 5.4.8　设 $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1\in W^{2,2}$, $\Lambda^{-1}\boldsymbol{W}_1\in L^2$, 则 Cauchy 问题 (5.4.71), (5.4.72) 的解 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 在有限时刻发生爆破, 当且仅当下列条件之一成立:

(1) $E(0)<0$;

(2) $E(0)=0$, $\frac{l^2}{12}\langle u_0,u_1\rangle+\langle\Lambda^{-1}u_0,\Lambda^{-1}u_1\rangle+\frac{l^2}{12}\langle v_0,v_1\rangle+\langle\Lambda^{-1}v_0,\Lambda^{-1}v_1\rangle>0$;

(3) $E(0)>0$,

$$\begin{aligned}&\frac{l^2}{12}\langle u_0,u_1\rangle+\langle\Lambda^{-1}u_0,\Lambda^{-1}u_1\rangle+\frac{l^2}{12}\langle v_0,v_1\rangle+\langle\Lambda^{-1}v_0,\Lambda^{-1}v_1\rangle\\&>\left[E(0)\left(\frac{l^2}{12}\|u_0\|^2+\frac{l^2}{12}\|v_0\|^2+\|\Lambda^{-1}u_0\|^2+\|\Lambda^{-1}v_0\|^2\right)\right]^{\frac12},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}E(0)=&\|\Lambda^{-1}u_1\|^2+\frac{l^2}{12}\|u_1\|^2+\|\Lambda^{-1}v_1\|^2+\frac{l^2}{12}\|v_1\|^2\\&+2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{a\beta}{2\rho}\left(u_0^2-\frac{\beta}{3}u_0^3+u_0v_0^2\right)dx.\end{aligned}\tag{5.4.73}$$

证明　根据定理 5.4.4, 只需证明式 (5.4.53) 成立. 事实上, 我们知道

$$f(\boldsymbol{W})=\frac{a\beta}{\rho}\left(u-\frac{\beta}{2}u^2+\frac12v^2\right),\quad g(\boldsymbol{W})=\frac{a\beta}{\rho}uv.$$

令

$$Z(\boldsymbol{W})=\frac{a\beta}{2\rho}\left(u^2-\frac{\beta}{3}u^3+uv^2\right),$$

则

$$dZ(\boldsymbol{W})=\frac{a\beta}{\rho}\left(u-\frac{\beta}{2}u^2+\frac{v^2}{2}\right)du+\frac{a\beta}{\rho}uvdv=f(\boldsymbol{W})du+g(\boldsymbol{W})dv$$

及

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{W})u+g(\boldsymbol{W})v=&\frac{a\beta}{\rho}\left(u^2-\frac{\beta}{2}u^3+\frac{3uv^2}{2}\right)\\&\leqslant 3\frac{a\beta}{2\rho}\left(u^2-\frac{\beta}{3}u^3+uv^2\right)=2(1+2\gamma)Z(\boldsymbol{W}),\end{aligned}$$

其中 $\gamma=\frac14$. □

5.4.5 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [324]. 与本节内容有关的文献见 [25], [30], [35], [43], [74], [151], [160], [161], [174], [196], [197], [253], [308]–[312], [316]–[319], [322], [323].

5.5 一维非线性 Schrödinger-IMBq 方程的耦合方程组的 Cauchy 问题

5.5.1 引言

本节研究下列广义 Schrödinger-IMBq 方程耦合方程组的 Cauchy 问题

$$i\varepsilon_t + \varepsilon_{xx} = n\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{5.5.1}$$

$$n_{tt} - n_{xxtt} - n_{xx} = f(n)_{xx} + |\varepsilon|^2_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{5.5.2}$$

$$\varepsilon(x,0) = \varepsilon_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.5.3}$$

$$n(x,0) = n_0(x), \quad n_t(x,0) = n_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.5.4}$$

其中 $\varepsilon(x,t)$ 表示变量 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t \in [0,\infty)$ 的复未知函数, $n(x,t)$ 表示变量 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t \in [0,\infty)$ 的实未知函数, $\varepsilon_0(x)$ 是给定的复值函数, $n_0(x)$ 和 $n_1(x)$ 是给定的实值函数, $f(n)$ 是给定的非线性实值函数.

5.5.2 局部解的存在性

下面证明 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 局部解的存在性和唯一性. 应用的方法是压缩映射原理. 当我们尝试用压缩映射原理证明 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 局部解的存在唯一性时, 遇到来自方程 (5.5.1) 和方程 (5.5.2) 的非线性项的导数损失的困难. 很多作者引进某些解析函数空间 (见文献 [325]–[327]) 处理这类问题. 此处引进某些辅助函数, 应用文献 [328] 中的时间微分法解决非线性波动方程. 在没有导数损失的情况下可以改写方程 (5.5.1) 和 (5.5.2)(见文献 [329]). 为了应用不动点定理, 我们可以利用关于自由 Schrödinger 解的 L^2-范数等式.

方程 (5.5.1) 对 t 求导和置 $u = \varepsilon_t$, 得

$$iu_t + u_{xx} = u_t\varepsilon + nu.$$

考虑方程组

$$iu_t + u_{xx} = n_t\tilde{\varepsilon} + nu, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{5.5.5}$$

$$n_{tt} - n_{xxtt} - n_{xx} = f(n)_{xx} + |\varepsilon|^2_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{5.5.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x) = i(\varepsilon_{0xx} - n_0(x)\varepsilon_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.5.7}$$

$$n(x,0) = n_0(x), \qquad n_t(x,0) = n_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.5.8}$$

其中依赖于 u 的 ε 和 $\tilde{\varepsilon}$ 给定如下

$$\tilde{\varepsilon}(x,t) = \varepsilon_0(x) + \int_0^t u(x,s)ds,$$
$$\varepsilon(x,t) = (I-\partial_x^2)^{-1}[iu(x,t) + (1-n(x,t))\tilde{\varepsilon}(x,t)]. \tag{5.5.9}$$

显然, 如果 $\varepsilon \in C^1((0,T);L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,T);H^2(\mathbb{R}))$, $n \in C^1((0,T);H^2(\mathbb{R}))$ 和 (ε,n) 是 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 的广义解, 则 $u \in C((0,T);L^2(\mathbb{R}))$ 和 (u,n) 是 Cauchy 问题 (5.5.5)–(5.5.8) 的广义解.

$\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 表示一个参数的 Schrödinger 群

$$S(t)g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4it}}g(y)dy$$

和 $L=(I-\partial_x^2)^{-1}\partial_x^2$. 于是 Cauchy 问题 (5.5.5)–(5.5.8) 可以形式地写为

$$u(x,t) = S(t)u_0(x) + \int_0^t S(t-s)\left[n_t(x,s)\tilde{\varepsilon}(x,s) + n(x,s)u(x,s)\right]ds, \tag{5.5.10}$$

$$n(x,t) = n_0(x)+n_1(x)t+\int_0^t (t-s)L[n(x,s)+f(n(x,s))+|\varepsilon(x,s)|^2]ds. \tag{5.5.11}$$

为了证明以后的主要定理, 我们引入下面有用的引理.

引理 5.5.1 (L^2-范数不等式)[330]　对于所有的 $g \in L^2$,

$$\|S(t)g\| = \|g\|, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

引理 5.5.2　算子 L 在 H^s 上对所有的 $s \geqslant 0$ 在 $H^s \cap L^\infty$ 上是有界的, 且

$$\|Lg\|_{H^s} \leqslant \|g\|_{H^s}, \quad \forall g \in H^s,$$
$$\|Lg\|_\infty \leqslant 2\|g\|_\infty, \quad \forall g \in L^2 \cap L^\infty.$$

证明　对于 $g \in H^s$, $s \geqslant 0$, 有

$$\|Lg\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s|\widehat{Lg}(\xi)|^2d\xi = \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s\frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^2}|\hat{g}(\xi)|^2d\xi \leqslant \|g\|_{H^s}^2.$$

另一方面, 注意到

$$(I-\partial_x^2)^{-1}g = G*g, \quad g \in L^2,$$

其中 $G(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. 易知

$$\partial_x^2(G*g) = G*g - g, \quad g \in L^2.$$

由上面的等式推出

$$Lg = G*g - g, \quad g \in L^2.$$

由 Young 不等式有

$$\|Lg\|_\infty \leqslant 2\|g\|_\infty, \quad g \in L^2 \cap L^\infty.$$ □

引理 5.5.3 设 $s \geqslant 0$ 是一整数, $f(u) \in C^s(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $u \in H^s \cap L^\infty$, 则如果 $\|u\|_\infty \leqslant M$, 那么

$$\|f(u)\|_{H^s} \leqslant K(M)\|u\|_{H^s},$$

其中 $C(M)$ 是依赖于常数 M 的常数.

引理 5.5.3 的证明见文献 [331], [161].

应用 Sobolev 嵌入定理和文献 [178] 中的引理 3, 可得下面的引理.

引理 5.5.4 设 $s \geqslant 1$ 是一整数, $f(u) \in C^{s+1}(\mathbb{R})$, $u, v \in H^s$, 则

$$\|f(u) - f(v)\|_{H^s} \leqslant K\|u - v\|_{H^s},$$

其中 K 是依赖于 $\|u\|_{H^s}$ 和 $\|v\|_{H^s}$ 的常数.

下面假定 $f(0)=0$, 否则可以利用 $f(n)-f(0)$ 代替 $f(0)$. 假定 $\varepsilon_0 \in H^2$, $n_0 \in H^2$ 和 $n_1 \in H^2$, 于是由式 (5.5.7) 知 $u_0 \in L^2$. 令 $T > 0$, 定义 Banach 空间

$$X(T) = \{(u, n) \mid u \in C((0, T); L^2), n \in C^1((0, T); H^2)\},$$

并赋予范数

$$\|(u, n)\|_{X(T)} = \|u\|_{C((0,T);L^2)} + \|n\|_{C((0,T);H^2)} + \|n_t\|_{C((0,T);H^2)}.$$

根据 Sobolev 嵌入定理, 如果 $(u, n) \in X(T)$, 有

$$\|n\|_{C((0,T);L^\infty)} \leqslant \|n\|_{C((0,T);H^2)}, \quad \|n_t\|_{C((0,T);L^\infty)} \leqslant \|n_t\|_{C((0,T);H^2)}.$$

置

$$a = \|u_0\| + \|\varepsilon_0\| + \|n_0\|_{H^2} + \|n_1\|_{H^2}.$$

定义映射 $\Theta : (u, n) \mapsto (\theta_1, \theta_2)$, 而 (θ_1, θ_2) 定义如下

$$\theta_1(u, n) = S(t)u_0(x) + \int_0^t S(t - s)\left[n_t(x, s)\tilde{\varepsilon}(x, s) + n(x, s)u(x, s)\right] ds,$$

$$\theta_2(u, n) = n_0(x) + n_1(x)t + \int_0^t (t - s)L[n(x, s) + f(n(x, s)) + |\varepsilon(x, s)|^2]ds.$$

考虑

$$Y(T) = \left\{(u, n) \in X(T) \mid \|u\|_{C((0,T);L^2)} + \|n\|_{C((0,T);H^2)} + \|n_t\|_{C((0,T);H^2)} \leqslant 2a\right\}.$$

显然, 对所有的 $T > 0$, $Y(T)$ 是 $X(t)$ 的不空闭凸子集.

引理 5.5.5　设 $f \in C^3(\mathbb{R})$. 对于足够小的 T, Θ 是一个从 $Y(T)$ 到自身的严格压缩映射.

证明　首先证明对于足够小的 T, Θ 映 $Y(T)$ 到自身. 令 $(u,n) \in Y(T)$, 于是

$$\|\theta_1\|_{C((0,T);L^2)} \leqslant \|u_0\| + \left\|\int_0^t S(t-s)n_t(s)\tilde{\varepsilon}(s)ds\right\|_{C((0,T);L^2)} + \left\|\int_0^t S(t-s)n(s)u(s)ds\right\|_{C((0,T);L^2)}.$$

根据引理 5.5.1 和式 (5.6.9), 有

$$\left\|\int_0^t S(t-s)n(s)u(s)ds\right\|_{C((0,T);L^2)} \leqslant T\|u\|_{C((0,T);L^2)}\|n\|_{C((0,T);L^\infty)},$$

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t S(t-s)n_t(s)\tilde{\varepsilon}(s)ds\right\|_{C((0,T);L^2)} &\leqslant T\|n_t\|_{C((0,T);L^\infty)}\|\tilde{\varepsilon}\|_{C((0,T);L^2)} \\ &\leqslant T\|n_t\|_{C((0,T);L^\infty)}\left(\|\varepsilon_0\| + T\|u\|_{C((0,T);L^2)}\right).\end{aligned}$$

从而由 Sobolev 嵌入定理有

$$\begin{aligned}\|\theta_1\|_{C((0,T);L^2)} \leqslant& \|u_0\| + \frac{T}{4}\left(\|u\|_{C((0,T);L^2)} + \|n\|_{C((0,T);H^2)}\right)^2 \\ &+ Ta\|n_t\|_{C((0,T);H^2)} + \frac{T^2}{4}\left(\|u\|_{C((0,T);L^2)} + \|n_t\|_{C((0,T);H^2)}\right)^2 \\ \leqslant& \|u_0\| + (3T+T^2)a^2.\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

现在估计 ε 在 $L^\infty((0,T);H^2)$ 中的范数, 它将对估计 θ_2 有用. 对于 $0 \leqslant t \leqslant T$, 由式 (5.5.9) 得

$$\begin{aligned}\|\varepsilon\|_{H^2} &\leqslant \|u\| + (1 + \|n(x,t)\|_{L^\infty})\|\tilde{\varepsilon}\| \\ &\leqslant \|u\| + (1 + \|n(x,t)\|_{L^\infty})\left(\|\varepsilon_0\| + T\|u\|_{C((0,T);L^2)}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\|\varepsilon\|_{C((0,T);H^2)} \leqslant \|u\|_{C((0,T);L^2)} + (1+2a)\left[a + T\|u\|_{C((0,T);L^2)}\right]. \tag{5.5.13}$$

由引理 5.5.2, 引理 5.5.3 和式 (5.5.13) 可得

$$\begin{aligned}\|\theta_2\|_{C((0,T);H^2)} \leqslant& \|n_0\|_{H^2} + T\|n_1\|_{H^2} + T^2\left\|L\left[n + f(n) + |\varepsilon|^2\right]\right\|_{C((0,T);H^2)} \\ \leqslant& \|n_0\|_{H^2} + T\|n_1\|_{H^2} \\ &+ T^2\left[\|n+f(n)\|_{C((0,T);H^2)} + \||\varepsilon|^2\|_{C((0,T);H^2)}\right] \\ \leqslant& \|n_0\|_{H^2} + T\|n_1\|_{H^2} + T^2K_1(a)\left[\|n\|_{C((0,T);H^2)} + \|\varepsilon\|_{C((0,T);H^2)}\right] \\ \leqslant& \|n_0\|_{H^2} + aT + a(3+2a)K_1(a)T^2 + 2a(1+2a)K_1(a)T^3,\end{aligned} \tag{5.5.14}$$

其中 $K_1(a)$ 是一依赖于 a, 而不依赖于 T 的整数. 类似地, 注意到

$$\theta_{2t}(u,n) = n_1(x) + \int_0^t L[n(x,s) + f(n(x,s)) + |\varepsilon(x,s)|^2]ds,$$

有

$$\|\theta_{2t}\|_{C((0,T);H^2)} \leqslant \|n_1\|_{H^2} + a(3+2a)K_1(a)T + 2a(1+2a)K_1(a)T^2. \quad (5.5.15)$$

这样, 由式 (5.5.12),(5.5.14) 和式 (5.5.15) 得

$$\begin{aligned}\|(\theta_1,\theta_2)\|_{X(T)} &\leqslant a + a\left[(1+3a) + (3+2a)K_1(a)\right]T + a\left[a + (5+6a)K_1(a)\right]T^2 \\ &\quad + 2a(1+2a)K_1(a)T^3 \\ &\leqslant a + 3a(1+a)\left[1+2K_1(a)\right](T+T^2+T^3).\end{aligned}$$

若 T 选择得足够小, 使得

$$3(1+a)\left[1+2K_1(a)\right](T+T^2+T^3) \leqslant 1,$$

则有

$$\|(\theta_1,\theta_2)\|_{X(T)} \leqslant 2a.$$

这样已指出 $\Theta(Y(T)) \subset Y(T)$.

现在证明, 对于足够小的 T, Θ 是 $Y(T)$ 的严格压缩映射. 令 $(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}})$, $(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}}) \in Y(T)$. 于是 $(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}})$ 和 $(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}})$ 分别对应由式 (5.5.9) 确定的 $(\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{I}},\varepsilon^{\mathrm{I}})$ 和 $(\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{II}},\varepsilon^{\mathrm{II}})$. 像式 (5.5.12) 的同样计算, 有

$$\begin{aligned}&\|\theta_1(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}}) - \theta_1(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}})\|_{C((0,T);L^2)} \\ &\leqslant \left\|\int_0^t S(t-s)n_t^{\mathrm{I}}(s)\left(\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{I}}(s) - \tilde{\varepsilon}^{\mathrm{II}}(s)\right)ds\right\|_{C((0,T);L^2)} \\ &\quad + \left\|\int_0^t S(t-s)\left(n_t^{\mathrm{I}}(s) - n_t^{\mathrm{II}}(s)\right)\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{II}}(s)ds\right\|_{C((0,T);L^2)} \\ &\quad + \left\|\int_0^t S(t-s)n^{\mathrm{I}}(s)\left(u^{\mathrm{I}}(s) - u^{\mathrm{II}}(s)\right)ds\right\|_{C((0,T);L^2)} \\ &\quad + \left\|\int_0^t S(t-s)\left(n^{\mathrm{I}}(s) - n^{\mathrm{II}}(s)\right)u^{\mathrm{II}}(s)ds\right\|_{C((0,T);L^2)} \\ &\leqslant 2a(T+T^2)\|u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);L^2)} \\ &\quad + a(T+2T^2)\|n_t^{\mathrm{I}} - n_t^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)} + 2aT\|n^{\mathrm{I}} - n^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}.\end{aligned}$$

应用引理 5.5.4, 式 (2.5.10), (5.5.14) 和式 (5.5.15) 的同样计算可知

$$
\begin{aligned}
&\|\theta_2(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}})-\theta_2(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}})\|_{C((0,T);H^2)}\\
\leqslant& T^2\left[\|n^{\mathrm{I}}+f(n^{\mathrm{I}})-n^{\mathrm{II}}-f(n^{\mathrm{II}})\|_{C((0,T);H^2)}+\||\varepsilon^{\mathrm{I}}|^2-|\varepsilon^{\mathrm{II}}|^2\|_{C((0,T);H^2)}\right]\\
\leqslant& K_2(a)T^2\left[\|n^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}+\|\varepsilon^{\mathrm{I}}-\varepsilon^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}\right]\\
\leqslant& K_2(a)T^2\left[\|n^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}+\|u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);L^2)}\right.\\
&\left.+\|\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{I}}-\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);L^2)}+\|n^{\mathrm{I}}(\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{I}}-\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{II}})\|_{C((0,T);L^2)}+\|\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{II}}(n^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{II}})\|_{C((0,T);L^2)}\right]\\
\leqslant& K_2(a)T^2(1+a+2aT)\|n^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}\\
&+T^2K_2(a)(1+T+2aT)\|u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);L^2)}.\\
&\|\theta_{2t}(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}})-\theta_{2t}(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}})\|_{C((0,T);H^2)}\\
\leqslant& T\left[\|n^{\mathrm{I}}+f(n^{\mathrm{I}})-n^{\mathrm{II}}-f(n^{\mathrm{II}})\|_{C((0,T);H^2)}+\||\varepsilon^{\mathrm{I}}|^2-|\varepsilon^{\mathrm{II}}|^2\|_{C((0,T);H^2)}\right]\\
\leqslant& K_2(a)T(1+a+2aT)\|n^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}\\
&+K_2(a)T(1+T+2aT)\|u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);L^2)},
\end{aligned}
$$

这里 $K_2(a)$ 是依赖于 a 而不依赖于 T 的正常数. 因而得到

$$
\begin{aligned}
&\|(\theta_1(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}}),\theta_2(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}}))-(\theta_1(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}}),\theta_2(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}}))\|_{X(T)}\\
\leqslant& T(1+T)\left[2a+K_2(a)(1+T+2aT)\right]\|u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);L^2)}\\
&+T\left[2a+K_2(a)(1+T)(1+a+2aT)\right]\|n^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}\\
&+aT(1+2T)\|n_t^{\mathrm{I}}-n_t^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}\\
\leqslant& T(1+T)\left[2a+K_2(a)(1+a+T+2aT)\right]\left[\|u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);L^2)}\right.\\
&\left.+\|n_t^{\mathrm{I}}-n_t^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}+\|n^{\mathrm{I}}-n^{\mathrm{II}}\|_{C((0,T);H^2)}\right].
\end{aligned}
$$

选择 T 足够小使得

$$
T(1+T)\left[2a+K_2(a)(1+a+T+2aT)\right]\leqslant\frac{1}{2},
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\|(\theta_1(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}}),\theta_2(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}}))-(\theta_1(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}}),\theta_2(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}}))\|_{X(T)}\\
\leqslant&\frac{1}{2}\|(u^{\mathrm{I}},n^{\mathrm{I}})-(u^{\mathrm{II}},n^{\mathrm{II}})\|_{X(T)}.
\end{aligned}
$$

□

定理 5.5.1 设 $f\in C^3(\mathbb{R})$, $\varepsilon_0\in H^2(\mathbb{R})$ 和 $n_0,n_1\in H^2(\mathbb{R})$, 则存在 $T_0>0$ 和 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 存在唯一广义解 (ε,n), 而 $\varepsilon\in C^1((0,T_0);L^2(\mathbb{R}))\cap$

$C((0,T_0);H^2(\mathbb{R}))$, $n\in C^1((0,T_0);H^2(\mathbb{R}))$, 其中 $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)}(\|\varepsilon(t)\|_{H^2}+\|n(t)\|_{H^2}+\|n_t(t)\|_{H^2})<\infty, \tag{5.5.16}$$

则 $T_0=\infty$.

证明 由引理 5.5.4 和压缩映射原理, 对于适当选择的 $T>0$, Θ 有唯一的不动点 $(u,n)\in Y(T)$, 它是 Cauchy 问题 (5.5.6)–(5.5.8) 的广义解, 且 $u\in C((0,T);L^2)$ 和 $n\in C^1((0,T);H^2)$.

应用文献 [30] 中证明定理 2.1 的同样方法可证对于每一个 $T'>0$, Cauchy 问题 (5.5.6)–(5.5.8) 最多有一解属于 $X(T')$. 同时, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)}(\|u(t)\|+\|n(t)\|_{H^2}+\|n_t(t)\|_{H^2})<\infty \tag{5.5.17}$$

成立, 则 $T_0=\infty$.

由式 (5.5.9) 有 $\tilde{\varepsilon}\in C^1((0,T);L^2)$ 和 $\varepsilon\in C((0,T);H^2)$. 为了证明 (ε,n) 是 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 的广义解, 只需证明 $\varepsilon(x,0)=\varepsilon_0(x)$ 和 $u=\varepsilon_t$. 事实上, 由方程 (5.5.5) 易知

$$(1-\partial_x^2)u=iu_t+(1-n)u-n_t\tilde{\varepsilon}.$$

式 (5.5.9) 对 t 求导, 得

$$(1-\partial_x^2)\varepsilon_t=iu_t+(1-n)\tilde{\varepsilon}_t-n_t\tilde{\varepsilon}=iu_t+(1-n)u-n_t\tilde{\varepsilon},$$

所以在 $H^{-2}(\mathbb{R})$ 中

$$u=\varepsilon_t. \tag{5.5.18}$$

由式 (5.5.18) 和式 (5.5.9) 可见 $\varepsilon\in C^1((0,T);L^2)\cap C((0,T);H^2)$ 和

$$i\varepsilon_t=\varepsilon_{xx}+n\varepsilon,$$

而且

$$(1-\partial_x^2)\varepsilon(x,0)=iu_0(x)+(1-n_0(x))\tilde{\varepsilon}(x,0)=(1-\partial_x^2)\varepsilon_0(x).$$

根据 $u_0(x)$ 的选择, 使得 $\varepsilon(x,0)=\varepsilon_0$.

为了完成定理 5.5.1 的证明, 必须证明, 如果式 (5.5.16) 成立, 则式 (5.5.17) 成立. 事实上, 由式 (5.5.9) 和式 (5.5.18) 有 $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon$ 和

$$\|u\|\leqslant\|\varepsilon\|_{H^2}+(1+\|n\|_\infty)\|\varepsilon\|.$$

这就表示, 由式 (5.5.16) 推出式 (5.5.17). □

5.5.3　整体解

现在证明 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 在空间 $H^2(\mathbb{R})\times H^2(\mathbb{R})$ 中存在唯一整体广义解. 为此, 将给出 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 局部解的两个不变式和一些估计.

引理 5.5.6　设 $f\in C^3(\mathbb{R})$, $\varepsilon_0\in H^2$, $n_0,n_1\in H^2$, $(-\partial_x^2)^{-1/2}n_1\in L^2$, $F(n)=\int_0^n f(s)ds\geqslant 0$ 和 $F(n_0)\in L^1$. 对于每一个 $T>0$, 如果 $\varepsilon\in C^1((0,T);L^2)\cap C((0,T);H^2)$, $n\in C^1((0,T);H^2)$ 和 (ε,n) 是 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 的广义解, 则有下列不变式

$$I_1(t)=\int_{\mathbb{R}}|\varepsilon|^2dx,\quad t\in[0,T], \tag{5.5.19}$$

$$\begin{aligned}I_2(t)=&\int_{\mathbb{R}}|\varepsilon_x|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(|(-\partial_x^2)^{-1/2}n_t|^2+|n_t|^2+|n|^2\right)dx\\&+\int_{\mathbb{R}}n|\varepsilon|^2dx+\int_{\mathbb{R}}F(n)dx,\quad t\in[0,T]\end{aligned} \tag{5.5.20}$$

和估计

$$\|\varepsilon_x\|^2+\|(-\partial_x^2)^{-1/2}n_t\|^2+\|n_t\|^2+\|n\|^2+\|F(n)\|_1\leqslant M_1,\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{5.5.21}$$

成立, 这里 M_1 是仅依赖于初值函数的常数.

证明　因为 $\varepsilon\in C^1((0,T);L^2)\cap C((0,T);H^2)$, $n\in C^1((0,T);H^2)$, 所以对于每一个 $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in L^2$, $\varepsilon_{xx}\in L^2$ 和 $n\varepsilon\in L^2$. 方程 (5.5.1) 两端同乘以 ε 的共轭 $\bar{\varepsilon}$ 并在 $\mathbb{R}\times(0,t)$ 上积分, 取其虚部得 $I_1(t)$ 的守恒律.

同时, 方程 (5.5.1) 两端同乘以 ε_t 的共轭 $\bar{\varepsilon}_t$, 其积的实部在 $\mathbb{R}$ 上积分得

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}|\varepsilon_x|^2dx=-\int_{\mathbb{R}}n|\varepsilon|_t^2dx. \tag{5.5.22}$$

应用方程 (5.5.2), 经直接计算有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|(-\partial_x^2)^{-1/2}n_t\|^2+\|n_t\|^2+\|n\|^2+2\int_{\mathbb{R}}F(n)dx\right)+\int_{\mathbb{R}}|\varepsilon|^2n_tdx=0. \tag{5.5.23}$$

式 (5.5.2) 和式 (5.5.23) 相加可见

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|\varepsilon_x\|^2+\int_{\mathbb{R}}n|\varepsilon|^2dx\right)\\&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|(-\partial_x^2)^{-1/2}n_t\|^2+\|n_t\|^2+\|n\|^2+2\int_{\mathbb{R}}F(n)dx\right)=0.\end{aligned}$$

上式对 t 积分得式 (5.5.20).

利用 Young 不等式, 由不变式 (5.5.20) 发现

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon_x\|^2+\frac{1}{2}\left(\|(-\partial_x^2)^{-1/2}n_t\|^2+\|n_t\|^2+\|n\|^2\right)+\|F(n)\|_1\\&=I_2(0)-\int_{\mathbb{R}}n|\varepsilon|^2dx\leqslant I_2(0)+\frac{1}{4}\|n\|^2+\|\varepsilon\|_4^4.\end{aligned}\tag{5.5.24}$$

根据不变式 (5.5.19) 和 Gagliardo-Nirenberg 插值定理有

$$\|\varepsilon\|_4\leqslant C_0\|\varepsilon_x\|^{1/4}\|\varepsilon\|^{3/4}\leqslant C_0\|\varepsilon_x\|^{1/4}\|\varepsilon_0\|^{3/4}.$$

所以

$$\|\varepsilon\|_4^4\leqslant\frac{1}{2}\|\varepsilon_x\|^2+\frac{1}{2}C_0^2\|\varepsilon_0\|^6.\tag{5.5.25}$$

将式 (5.5.25) 代入式 (5.5.24) 得

$$\|\varepsilon_x\|^2+\|(-\partial_x^2)^{-1/2}n_t\|^2+\|n_t\|^2+\frac{1}{2}\|n\|^2+2\|F(n)\|_1\leqslant 2I_2(0)+C_0^2\|\varepsilon_0\|^6.$$

这说明 $(-\partial_x^2)^{-1/2}n_t\in C((0,T);L^2)$. □

引理 5.5.7 设引理 5.5.6 的假定成立. 如果存在分解 $f=f_1+f_2+\cdots+f_m$, 使得对于某个 $1\leqslant q_i\leqslant\infty$, $i=1,2,\cdots,m$ 和常数 $A,B>0$,

$$f_i(n)\leqslant AF(n)^{1/q_i},\quad i=1,2,\cdots,m,\quad n\in\mathbb{R}\tag{5.5.26}$$

或

$$f_i(n)\leqslant AF(n)^{1/q_i}|n|+B,\quad i=1,2,\cdots,m,\quad n\in\mathbb{R},\tag{5.5.27}$$

则 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 的广义解有估计

$$\|n_t\|_\infty^2+\|n\|_\infty^2\leqslant M_2(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{5.5.28}$$

此处和以后的 $M_i(T)$ $(i=2,3,\cdots)$ 是依赖于 T 的常数.

证明 由 Sobolev 嵌入定理知, $n_0,n_1\in L^\infty(\mathbb{R})$. 注意到

$$n_{tt}+n+f(n)=\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}(n+f(n))+L|\varepsilon|^2,$$

有

$$\frac{d}{dt}\left[n_t^2+n^2+2F(n)\right]=2\left[G*n+G*f(n)+L|\varepsilon|^2\right]n_t.\tag{5.5.29}$$

应用引理 5.5.2 和 Sobolev 嵌入定理, 由式 (5.5.19) 和 (5.5.21) 得

$$\left|L|\varepsilon|^2\right|\leqslant 2\|\varepsilon\|_\infty^2\leqslant C_1(T).$$

此处和以后的 $C_i(T)$ $(i=1,2,\cdots)$ 是依赖于 T 和初值的常数. 利用 Young 不等式和式 (5.5.21), 如果式 (5.5.26) 成立, 则

$$
\begin{aligned}
|G*f(n)| &\leqslant \sum_{i=1}^{m}[G*|f_i(n)|] \leqslant \sum_{i=1}^{m} A\left[G*(F(n))^{1/q_i}\right] \\
&\leqslant A\sum_{i=1}^{m}\|G\|_{r_i}\|F(n)^{1/q_i}\|_{q_i} \leqslant A\sum_{i=1}^{m}\|G\|_{r_i}\|F(n)\|_1^{1/q_i} \leqslant C_2(T),
\end{aligned}
$$

其中 $\dfrac{1}{r_i}+\dfrac{1}{q_i}=1$, $i=1,2,\cdots,m$. 类似地, 如果式 (5.5.27) 成立, 则

$$
|G*f(n)| \leqslant A\sum_{i=1}^{m}\|G\|_{r_i}\|F(n)\|_1^{1/q_i}\|n\|_\infty + mB \leqslant C_3(T)\|n\|_\infty + mB.
$$

将上面的不等式代入式 (5.5.29), 且注意到 $|G*n|\leqslant \|n\|_\infty$, 得

$$
\frac{d}{dt}\left[n_t^2+n^2+2F(n)\right] \leqslant \left[C_4(T)\|n\|_\infty + C_5(T)\right]\|n_t\|_\infty. \tag{5.5.30}
$$

式 (5.5.30) 对 t 积分和应用 Cauchy 不等式知

$$
\begin{aligned}
&\|n_t\|_\infty^2 + \|n\|_\infty^2 + 2\|F(n)\|_\infty \\
\leqslant\ & \|n_1\|_\infty + \|n_0\|_\infty + 2\|F(n_0)\|_\infty + C_6(T) \\
&+ C_7(T)\int_0^t \left[\|n_\tau(\tau)\|_\infty^2 + \|n(\tau)\|_\infty^2\right] d\tau, \quad 0\leqslant t\leqslant T.
\end{aligned}
$$

由上面的不等式断定估计 (5.5.28) 成立. □

引理 5.5.8 设引理 5.5.7 的条件成立, 则有估计

$$
\|\varepsilon_t\|^2 \leqslant M_3(T), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{5.5.31}
$$

$$
\|\varepsilon\|_{H^2} \leqslant M_4(T), \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5.5.32}
$$

证明 方程 (5.5.1) 对 t 求导, 得

$$
i\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{xxt} = n\varepsilon_t + n_t\varepsilon. \tag{5.5.33}
$$

方程 (5.5.33) 两端同乘以 $\bar{\varepsilon}_t$, 并在 $\mathbb{R}$ 上积分, 由乘积的虚部知

$$
\frac{d}{dt}\|\varepsilon_t\|^2 = 2\int_{\mathbb{R}} n_t \mathrm{Im}(\varepsilon\bar{\varepsilon}_t)dx.
$$

注意到 $\|n_t\|_\infty^2 \leqslant M_2(T)$, $\|\varepsilon\| = \|\varepsilon_0\|$, Cauchy 不等式给出

$$\frac{d}{dt}\|\varepsilon_t\|^2 \leqslant M_2(T)\left(\|\varepsilon_0\|^2 + \|\varepsilon_t\|^2\right), \quad t \in [0,T]. \tag{5.5.34}$$

由方程 (5.5.1) 有

$$\|\varepsilon_t(x,0)\| \leqslant \|\varepsilon_0\|_{H^2} + \|n_0\|_\infty \|\varepsilon_0\|.$$

由式 (5.5.34) 和 Gronwall 不等式给出估计 (5.5.31).

方程 (5.5.1) 还能给出

$$\|\varepsilon\|_{H^2} = \|(I - \partial_x^2)\varepsilon\| \leqslant \|\varepsilon_t\| + (1 + \|n\|_\infty)\|\varepsilon\|,$$

即估计 (5.5.32) 成立. □

引理 5.5.9 设引理 5.5.8 的条件成立, 则有估计

$$\|n\|_{H^2} \leqslant M_5(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.5.35}$$

$$\|n_t\|_{H^2} \leqslant M_6(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.5.36}$$

证明 由方程 (5.5.2) 有

$$\begin{aligned} n(x,t) = &\, n_0(x) + n_1(x)t \\ &+ \int_0^t (t-s)L\left[n(x,s) + f(n(x,s)) + |\varepsilon(x,s)|^2\right] ds. \end{aligned} \tag{5.5.37}$$

应用引理 5.5.2, 引理 5.5.3, 引理 5.5.7, 引理 5.5.8 以及 Sobolev 嵌入定理, 由式 (5.5.37) 推得

$$\begin{aligned} \|n\|_{H^2} \leqslant &\, \|n_0\|_{H^2} + T\|n_1\|_{H^2} \\ &+ T\int_0^t \left[\|n(s)\|_{H^2} + \|f(n(s))\|_{H^2} + \||\varepsilon(s)|^2\|_{H^2}\right] ds \\ \leqslant &\, C_8(T) + C_9(T)\int_0^t \|n(s)\|_{H^2} ds. \end{aligned}$$

上式由 Gronwall 不等式给出估计 (5.5.36).

方程 (5.5.37) 对 t 求导, 得

$$n_t(x,t) = n_1(x) + \int_0^t L\left[n(x,s) + f(n(x,s)) + |\varepsilon(x,s)|^2\right] ds \tag{5.5.38}$$

和

$$\|n_t\|_{H^2} \leqslant \|n_1\|_{H^2} + \int_0^t \left[\|n(s)\|_{H^2} + \|f(n(s))\|_{H^2} + \||\varepsilon(s)|^2\|_{H^2}\right] ds \leqslant M_6(T). \quad \square$$

定理 5.5.2 设 $\varepsilon_0 \in H^2$, $n_0, n_1 \in H^2$, $(-\partial_x)^{-1/2} n_1 \in L^2$, $F(n_0) \in L^1$, $f \in C^3(\mathbb{R})$ 满足条件 (5.5.26) 或 (5.5.27), 且 $F(n) \geqslant 0$, 则 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 存在唯一整体广义解 (ε, n), 且

$$\varepsilon \in C^1((0,T);L^2) \cap C((0,T);H^2), \quad n \in C^2((0,T);H^2) \cap C^3((0,T);L^2),$$

并对所有 $T > 0$, $(-\partial_x^2)^{-1/2} n_t \in C((0,T);L^2)$.

证明 根据定理 5.5.1 和引理 5.5.7–引理 5.5.9 知

$$\varepsilon \in C^1((0,T);L^2) \cap C((0,T);H^2), \quad n \in C^1((0,T);H^2)),$$

且对于所有的 $T > 0$, $(-\partial_x^2)^{-1/2} n_t \in C((0,T);L^2)$.

由方程 (5.5.2) 有

$$n_{tt} = L\left[n + f(n) + |\varepsilon|^2\right]. \tag{5.5.39}$$

应用引理 5.5.2 和引理 5.5.3 可得 $n_{tt} \in C((0,T);H^2)$. 因此对于所有 $T > 0$, $n \in C^2((0,T);H^2)$. 方程 (5.5.39) 对 t 求导, 得

$$n_{ttt} = L\left[n_t + f'(n)n_t + (\varepsilon_t \bar{\varepsilon} + \varepsilon \bar{\varepsilon}_t)\right]. \tag{5.5.40}$$

利用引理 5.5.2 和引理 5.5.3, 对于所有 $T > 0$, $n_{ttt} \in C((0,T);L^2)$. □

例 定理 5.5.2 指出, 如果 $f(n) = cn^{2m+1}$, $c > 0$ 和 m 是一正常数, 则对于所有的 $n_0, n_1 \in H^2$ 和 $\varepsilon_0 \in H^2$, 对应的方程组 (5.5.1)–(5.5.4) 的 Cauchy 问题存在整体广义解. 还具有初值 $n_0, n_1 \in H^2$ 和 $\varepsilon_0 \in H^2$ 的方程组

$$i\varepsilon_t + \varepsilon_{xx} = n\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{5.5.1}$$

$$n_{tt} - n_{xx} - (n^3)_{xx} - n_{xxtt} = |\varepsilon|^2_{xx} \tag{5.5.41}$$

对应的 Cauchy 问题也存在整体广义解.

5.5.4 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [332]. 与本节内容有关的文献见 [30], [32], [161], [168], [175], [178], [240], [325]–[331], [333]–[338].

5.6 多维非线性 Schrödinger 方程与广义IMBq 方程耦合方程组的 Cauchy 问题

5.6.1 引言

文献 [32],[337] 研究了 Schrödinger 场与 Boussinesq 场相互作用的孤立子解问

题, 并找到耦合方程组

$$i\varepsilon_t + \varepsilon_{xx} - n\varepsilon = 0, \tag{5.6.1}$$

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta}{3}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Big)u - \delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(|\varepsilon|^2) \tag{5.6.2}$$

的近似解, 其中 $\delta > 0$ 是常数, 在文献 [338], [340], [341] 中用各种方法得到了上述方程组的精确孤立子解. 5.5 节证明了一维非线性 Schrödinger-IMBq 方程的耦合方程组的 Cauchy 问题 (5.5.1)–(5.5.4) 存在唯一整体广义解.

本节研究多维 Schrödinger 场与广义 IMBq 场耦合方程

$$i\varepsilon_t + \nabla^2\varepsilon - u\varepsilon = 0, \tag{5.6.3}$$

$$u_{tt} - \nabla^2 u - a\nabla^2 u_{tt} = \nabla^2 f(u) + \nabla^2(|\varepsilon|^2), \tag{5.6.4}$$

其中 $\varepsilon(x,t)$ 表示变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ 和 $t \in \mathbb{R}_+$ 的复未知函数, $u(x,t)$ 表示变量 x 和 t 的实未知函数, $a > 0$ 是常数和 $f(s)$ 是给定的非线性函数.

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为在每一个方向宽为 $2D(D > 0)$ 的 N 维立方体, 即 $\overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)|\ |x_j| \leqslant D,\ j = 1, 2, \cdots, N\}, x + 2D_{e_j}$ 表示 $(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j + 2D, x_{j+1}, \cdots, x_N)(j = 1, 2, \cdots, N)$ 和 $\overline{Q}_T = \{x \in \overline{\Omega}, 0 \leqslant t \leqslant T\}$. 对于耦合方程组 (5.6.3),(5.6.4), 我们讨论在 $N+1$ 维柱体区域 $\overline{Q}_T$ 上它的周期边值问题

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon(x + 2D_{e_j}, t), \quad u(x,t) = u(x + 2D_{e_j}, t), \quad j = 1, 2, \cdots, N, \tag{5.6.5}$$

$$\varepsilon(x,0) = \varepsilon_0(x), \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{5.6.6}$$

其中 $\varepsilon_0(x), \varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是给定的满足周期边值条件 (5.6.5) 的 N 维初值函数.

对于耦合方程组 (5.6.3),(5.6.4), 考虑 Cauchy 问题

$$\varepsilon(x,0) = \varepsilon_0(x), \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{5.6.7}$$

其中 $\varepsilon_0(x), \varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是给定的定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的函数.

为了简单起见, 在式 (5.6.4) 中令 $a = 1$. 我们仅证明 2 维耦合方程组 (5.6.3), (5.6.4) 局部广义解和局部古典解的存在性、唯一性和正则性, 因为应用 2 维的情况可以处理 N 维的情况.

5.6.2 周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6)

我们首先建立 $L^2(\Omega)$ 的一标准正交基. 如在 4.3.2 子节中令 $\{y_l(x_1)\} = \Big\{\dfrac{1}{\sqrt{2D}}, \dfrac{1}{\sqrt{D}}\cos\alpha_l x_1, \dfrac{1}{\sqrt{D}}\sin\alpha_l x_1, l = 1, 2, \cdots\Big\}$ 是常微分方程周期特征值问题 $y'' + \lambda y =$

0, $y(x_1+2D)=y(x_1)$ 的特征值 $\lambda_{1l}=\alpha_l^2=\left(\dfrac{l\pi}{D}\right)^2$ $(l=0,1,\cdots)$ 对应的特征函数系构成 $L^2(-D,D)$ 中的一个标准正交基. 类似地, $\{z_j(x_2)\}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2D}},\dfrac{1}{\sqrt{D}}\cos\beta_j x_2,\right.$ $\left.\dfrac{1}{\sqrt{D}}\sin\beta_j x_2, j=1,2,\cdots\right\}$ 是常微分方程周期边值问题 $z''+\lambda z=0, z(x_2+2D)=z(x_2)$ 的特征值 $\lambda_{2j}=\beta_j^2=\left(\dfrac{j\pi}{D}\right)^2$ 对应的特征函数系构成 $L^2(-D,D)$ 中的一个标准正交基. 按照引理 1.8.10 知, 函数系 $\{y_l(x_1)z_j(x_2), l,j=0,1,\cdots\}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 的一个标准正交基.

令 $(\varepsilon(x,t),u(x,t))$ 是周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6) 的解, 其中 $\varepsilon(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\infty}L_{lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$ 和 $u(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\infty}T_{lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$, 而 $L_{lj}(t),T_{lj}(t)(l,j=0,1,\cdots)$ 为待定函数. 初值函数可以表示为 $\varepsilon_0(x)=\sum_{l,j=0}^{\infty}\varepsilon_{lj}y_l(x_1)z_j(x_2),\varphi(x)=\sum_{l,j=0}^{\infty}\varphi_{lj}y_l(x_1)z_j(x_2)$ 和 $\psi(x)=\sum_{l,j=0}^{\infty}\psi_{lj}y_l(x_1)z_j(x_2)$, 其中 ε_{lj} 是复数, φ_{lj},ψ_{lj} 是实数.

将 $\varepsilon(x,t)$ 和 $u(x,t)$ 的表达式代入方程组 (5.6.3),(5.6.4) 后, 方程 (5.6.3) 和方程 (5.6.4) 两端分别同乘以 $y_l(x_1)z_j(x_2)$, 并在 Ω 上积分, 得

$$i\,\dot{L}_{lj}-(\alpha_l^2+\beta_j^2)L_{lj}-\int_\Omega u\varepsilon y_l(x_1)z_j(x_2)dx=0, \tag{5.6.8}$$

$$\begin{aligned}&(1+\alpha_l^2+\beta_j^2)\ddot{T}_{lj}+(\alpha_l^2+\beta_j^2)T_{lj}\\&-\int_\Omega(\nabla^2 f(u)+\nabla^2(|\varepsilon|^2))y_l(x_1)z_j(x_2)dx=0,\quad l,j=0,1,\cdots.\end{aligned} \tag{5.6.9}$$

将 $\varepsilon(x,t),u(x,t),\varepsilon_0(x),\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的表达式代入初值条件 (5.6.6), 有

$$L_{lj}(0)=\varepsilon_{lj},\quad T_{lj}(0)=\varphi_{lj},\quad \dot{T}_{lj}(0)=\psi_{lj},\quad l,j=0,1,\cdots, \tag{5.6.10}$$

因此, $L_{lj}(t)$ 和 $T_{lj}(t)$ 满足无穷常微分方程组 (5.6.8),(5.6.9). 下面证明 Cauchy 问题 (5.6.8)–(5.6.10) 解的存在性. 为此, 首先考虑下列有限常微分方程组 Cauchy 问题解的存在性

$$i\,\dot{L}_{\bar{N}lj}-(\alpha_l^2+\beta_j^2)L_{\bar{N}lj}=\int_\Omega u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}y_l(x_1)z_j(x_2)dx, \tag{5.6.11}$$

$$(1+\alpha_l^2+\beta_j^2)\ddot{T}_{\bar{N}lj}+(\alpha_l^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}lj}=\int_\Omega(\nabla^2 f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}^2|))y_l(x_1)z_j(x_2)dx, \tag{5.6.12}$$

$$L_{\bar{N}lj}(0)=\varepsilon_{lj},\quad T_{\bar{N}lj}(0)=\varphi_{lj},\quad \dot{T}_{\bar{N}lj}(0)=\psi_{lj},\quad l,j=0,1,\cdots,\bar{N}, \tag{5.6.13}$$

其中 $\varepsilon_{\bar{N}}(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}L_{\bar{N}lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$, $u_{\bar{N}}(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}T_{\bar{N}lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$, $\bar{N}$ 为一自然数. 为了应用 Leray-Schauder 不动点定理, 考虑下列带有参数 θ 的有

限常微分方程组的 Cauchy 问题

$$i\,\dot{L}_{\bar{N}lj} -(\alpha_l^2+\beta_j^2)L_{\bar{N}lj} = \theta\int_\Omega u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}y_l(x_1)z_j(x_2)dx, \tag{5.6.14}$$

$$(1+\alpha_l^2+\beta_j^2)\ddot{T}_{\bar{N}lj} + (\alpha_l^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}lj} = \theta\int_\Omega(\nabla^2 f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2))y_l(x_1)z_j(x_2)dx, \tag{5.6.15}$$

$$\begin{aligned}&L_{\bar{N}lj}(0)=\theta\varepsilon_{lj},\quad T_{\bar{N}lj}(0)=\theta\varphi_{lj},\\ &\dot{T}_{\bar{N}lj}\,(0)=\theta\psi_{lj},\quad l,j=0,1,\cdots,\bar{N},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.\end{aligned} \tag{5.6.16}$$

引理 5.6.1 设下列条件成立:

(1) $f\in C^5(\mathbb{R}), |f^{(j)}(s)|\leqslant K_j|s|^{P+(5-j)}$ $(j=1,2,3,4,5)$, 其中 $K_j(j=1,2,3,4,5)$ 是常数, $p\geqslant 1$ 是自然数和 (j) 表示求导数的阶数;

(2) $(L(t),T(t))$ 是方程组 (5.6.11),(5.6.12) 的解, 其中 $L(t)=(L_{\bar{N}lj}(t),\ l,j=0,1,\cdots,\bar{N})$ 和 $T(t)=(T_{\bar{N}lj}(t),\ l,j=0,1,\cdots,\bar{N})$.

令

$$\begin{aligned}E_{\bar{N}}(t)=&\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(1+\alpha_l^2+\beta_j^2+\sum_{\substack{h+m=8\\h,m=0,2,4,6,8}}\alpha_l^h\beta_j^m\right.\\&\left.+2\sum_{\substack{h+m=10\\h,m=2,4,6,8}}\alpha_l^h\beta_j^m+\alpha_l^{10}+\beta_j^{10}\right)\dot{T}^2_{\bar{N}_{lj}}\\&+\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(1+\alpha_l^2+\beta_j^2+2\sum_{\substack{h+m=10\\h,m=2,4,6,8}}\alpha_l^h\beta_j^m+\alpha_l^{10}+\beta_j^{10}\right)T^2_{\bar{N}_{lj}}\\&+\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(1+\sum_{\substack{h+m=10\\h,m=0,2,4,6,8,10}}\alpha_l^h\beta_j^m\right)|L_{\bar{N}_{lj}}|^2+1,\end{aligned} \tag{5.6.17}$$

则有

$$\frac{dE_{\bar{N}}(t)}{dt}\leqslant K_6(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{P+6}{2}}, \tag{5.6.18}$$

其中 $K_6>0$ 是一不依赖于 θ, D 和 $\bar{N}$ 的常数.

证明　式 (5.6.14) 两端同乘以 $(1+\alpha_l^4\beta_j^6+\alpha_l^6\beta_j^4+\alpha_l^2\beta_j^8+\alpha_l^8\beta_j^2+\alpha_l^{10}+\beta_j^{10})\ \bar{L}_{\bar{N}lj}$, 乘积对于 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 并取虚部, 得

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(1+\sum_{\substack{h+m=10\\h,m=0,2,4,6,8,10}}\alpha_l^h\beta_j^m\right)|L_{\bar{N}_{lj}}|^2\right\}$$
$$=2\theta I_m\left\langle u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}},-\sum_{\substack{h+m=10\\h,m=0,2,4,6,8,10}}\varepsilon_{\bar{N}x_1^hx_2^m}\right\rangle,\tag{5.6.19}$$

其中 $\bar{L}_{\bar{N}lj}$ 是 $L_{\bar{N}lj}$ 的共轭数和 $\langle u,v\rangle=\int_\Omega u(x)\overline{v}(x)dx$.

式 (5.6.15) 两端同乘以 $(1+\alpha_l^4\beta_j^4+\alpha_l^6\beta_j^2+\alpha_l^2\beta_j^6+\alpha_l^8+\beta_j^8)\dot{T}_{\bar{N}lj}$, 乘积对于 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 得到的方程两端各加项 $\frac{d}{dt}\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}T_{\bar{N}lj}^2$, 最后将得到的方程加到方程 (5.6.19) 上, 有

$$\frac{dE_{\bar{N}}(t)}{dt}=2\theta\left\langle\nabla^2f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2),u_{\bar{N}t}+\sum_{\substack{h+m=8\\h,m=0,2,4,6,8}}u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\right\rangle$$
$$+\frac{d}{dt}\langle u_{\bar{N}},u_{\bar{N}}\rangle+2\theta I_m\left\langle u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}},-\sum_{\substack{h+m=10\\h,m=0,2,4,6,8,10}}\varepsilon_{\bar{N}}x_1^hx_2^m\right\rangle.\tag{5.6.20}$$

由式 (5.6.17) 知

$$E_{\bar{N}}(t)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{h=0,1,4,5}\langle u_{\bar{N}x_j^ht},u_{\bar{N}x_j^ht}\rangle+\sum_{\substack{h+m=4\\h,m=1,2,3}}\langle u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt},u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\rangle$$
$$+2\sum_{\substack{h+m=5\\h,m=1,2,3,4}}\langle u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt},u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\rangle+\langle u_{\bar{N}},u_{\bar{N}}\rangle$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\langle u_{\bar{N}x_j},u_{\bar{N}x_j}\rangle+2\sum_{\substack{h+m=5\\h,m=1,2,3,4}}\langle u_{\bar{N}x_1^hx_2^m},u_{\bar{N}x_1^hx_2^m}\rangle$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\langle u_{\bar{N}x_j^5},u_{\bar{N}x_j^5}\rangle+\langle\varepsilon_{\bar{N}},\varepsilon_{\bar{N}}\rangle$$
$$+\sum_{\substack{h+m=5\\h,m=0,1,2,3,4,5}}\langle\varepsilon_{\bar{N}x_1^hx_2^m},\varepsilon_{\bar{N}x_1^hx_2^m}\rangle+1,\tag{5.6.21}$$

根据 Gagliardo-Nirenberg 插值定理和式 (5.6.21) 可见

$$\|u_{\bar{N}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_1\|u_{\bar{N}}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{5}}\|u_{\bar{N}}\|_{H^5(\Omega)}^{\frac{1}{5}} \leqslant C_2(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}, \tag{5.6.22}$$

$$\|u_{\bar{N}x_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_3\|u_{\bar{N}}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{5}}\|u_{\bar{N}}\|_{H^5(\Omega)}^{\frac{2}{5}} \leqslant C_4(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}, \quad j=1,2, \tag{5.6.23}$$

$$\|u_{\bar{N}x_jx_k}\|_{L^2(\Omega)}, \|u_{\bar{N}x_jx_k}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_5(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}, \quad j,k=1,2, \tag{5.6.24}$$

$$\|u_{\bar{N}x_1^jx_2^k}\|_{L^2(\Omega)}, \|u_{\bar{N}x_1^jx_2^k}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_6(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}, \quad j+k=3, \quad j,k=0,1,2,3, \tag{5.6.25}$$

$$\|u_{\bar{N}x_1^jx_2^k}\|_{L^2(\Omega)}, \|u_{\bar{N}x_1^jx_2^k}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_7(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}, \quad j+k=4, \quad j,k=0,1,2,3,4. \tag{5.6.26}$$

类似可得

$$\|\varepsilon_{\bar{N}}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varepsilon_{\bar{N}x_j}\|_{L^2(\Omega)}, \|\varepsilon_{\bar{N}x_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_8(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}, \quad j=1,2, \tag{5.6.27}$$

$$\|\varepsilon_{\bar{N}x_jx_k}\|_{L^2(\Omega)}, \|\varepsilon_{\bar{N}x_jx_k}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_9(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}, \quad j,k=1.2, \tag{5.6.28}$$

$$\|\varepsilon_{\bar{N}x_1^jx_2^k}\|_{L^2(\Omega)}, \|\varepsilon_{\bar{N}x_1^jx_2^k}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_{10}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}, \quad j+k=3, \quad j,k=0,1,2,3, \tag{5.6.29}$$

$$\|\varepsilon_{\bar{N}x_1^jx_2^k}\|_{L^2(\Omega)}, \|\varepsilon_{\bar{N}x_1^jx_2^k}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_{11}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}, \quad j+k=4, \quad j,k=0,1,2,3,4. \tag{5.6.30}$$

应用引理 5.6.1 的假定, Hölder 不等式, 不等式 (5.6.22)–(5.6.30) 和不等式 (5.6.17) 推出

$$\begin{aligned}
&|\langle \nabla^2 f(u_{\bar{N}}), u_{\bar{N}t}\rangle| = \left|\int_\Omega [f''(u_{\bar{N}})(u_{\bar{N}x_1}^2 + u_{\bar{N}x_2}^2) + f'(u_{\bar{N}})(u_{\bar{N}x_1^2} + u_{\bar{N}x_2^2})]u_{\bar{N}t}dx\right| \\
\leqslant & C_{12}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{p+4}{2}} \sum_{j=1}^2 \int_\Omega \sum_{j=1}^2 (|u_{\bar{N}x_j}| + |u_{\bar{N}x_j^2}|)|u_{\bar{N}t}|dx \\
\leqslant & C_{12}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{p+4}{2}} \sum_{j=1}^2 (\|u_{\bar{N}x_j}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{\bar{N}x_j^2}\|_{L^2(\Omega)})\|u_{\bar{N}t}\|_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant & C_{13}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{p+6}{2}}.
\end{aligned} \tag{5.6.31}$$

利用分部积分, Hölder 不等式, 不等式 (5.6.22)–(5.6.26) 和引理 5.6.1 的假定知

$$|\langle \nabla^2 f(u_{\bar{N}}), u_{\bar{N}x_1^6x_2^2t}\rangle| = \left|\left\langle \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\nabla^2 f(u_{\bar{N}}), u_{\bar{N}x_1^3x_1^2t}\right\rangle\right| \leqslant C_{14}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{p+6}{2}}. \tag{5.6.32}$$

同理

$$|\langle\nabla^2 f(u_{\bar{N}}), u_{\bar{N}x_1^4x_2^4t}+u_{\bar{N}x_1^2x_2^6t}+u_{\bar{N}x_1^8t}+u_{\bar{N}x_2^8t}\rangle|\leqslant C_{15}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{p+6}{2}}, \quad (5.6.33)$$

$$\left|\left\langle\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2), u_{\bar{N}t}+\sum_{\substack{j+k=8\\ j,k=0,2,4,6,8}} u_{\bar{N}x_1^jx_2^kt}\right\rangle\right|\leqslant C_{16}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{3}{2}}. \quad (5.6.34)$$

进行分部积分和应用不等式 (5.6.22)–(5.6.30), 得

$$\begin{aligned}
&|I_m\langle u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}, \varepsilon_{\bar{N}x_1^4x_2^6}\rangle| = \left|I_m\int_\Omega (u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}})_{x_1^2x_2^3}\overline{\varepsilon}_{\bar{N}x_1^2x_2^3}dx\right| \\
=&\left|I_m\int_\Omega\Big(u_{\bar{N}x_1^2x_2^3}\varepsilon_{\bar{N}}+3u_{\bar{N}x_1^2x_2^2}\varepsilon_{\bar{N}x_2}+3u_{\bar{N}x_1^2x_2}\varepsilon_{\bar{N}x_2^2}\right.\\
&+u_{\bar{N}x_1^2}\varepsilon_{\bar{N}x_2^3}+2u_{\bar{N}x_1x_2^3}\varepsilon_{\bar{N}x_1}+6u_{\bar{N}x_1x_2^2}\varepsilon_{\bar{N}x_1x_2}+6u_{\bar{N}x_1x_2}\varepsilon_{\bar{N}x_1x_2^2}\\
&+2u_{\bar{N}x_1}\varepsilon_{\bar{N}x_1x_2^3}+u_{\bar{N}x_2^3}\varepsilon_{\bar{N}x_1^2}+3u_{\bar{N}x_2^2}\varepsilon_{\bar{N}x_1^2x_2}\\
&\left.+3u_{\bar{N}x_2}\varepsilon_{\bar{N}x_1^2x_2^2}\Big)\overline{\varepsilon}_{\bar{N}x_1^2x_2^3}dx\right|\leqslant C_{17}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \quad (5.6.35)$$

类似有

$$|I_m\langle u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}, \varepsilon_{\bar{N}x_1^6x_2^4}+\varepsilon_{\bar{N}x_1^8x_2^2}+\varepsilon_{\bar{N}x_1^2x_2^8}+\varepsilon_{\bar{N}x_1^{10}}+\varepsilon_{\bar{N}x_2^{10}}\rangle|\leqslant C_{18}(E_{\bar{N}}(t))^{\frac{1}{2}}. \quad (5.6.36)$$

注意到 $p>1$, 由式 (5.6.20) 和式 (5.6.31)–(5.6.36) 推出式 (5.6.18) 成立. □

容易由式 (5.6.18) 证明下面的引理.

引理 5.6.2 在引理 5.6.1 的条件下, 如果

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}E_{\bar{N}}(0)=b=&\sum_{l,j=0}^{\infty}\left(1+\alpha_l^2+\beta_j^2+\sum_{\substack{h+m=8\\ h,m=0,2,4,6,8}}\alpha_l^h\beta_j^m\right.\\
&\left.+2\sum_{\substack{h+m=10\\ h,m=2,4,6,8}}\alpha_l^h\beta_j^m+\alpha_l^{10}+\beta_j^{10}\right)\psi_{lj}^2\\
&+\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(1+\alpha_l^2+\beta_j^2+2\sum_{\substack{h+m=10\\ h,m=2,4,6,8}}\alpha_l^h\beta_j^m+\alpha_l^{10}+\beta_j^{10}\right)\varphi_{lj}^2\\
&+\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(1+\sum_{\substack{h+m=10\\ h,m=2,4,6,8}}\alpha_l^h\beta_j^m+\alpha_l^{10}+\beta_j^{10}\right)|\varepsilon_{lj}|^2+1<\infty,
\end{aligned}$$

则 $E_{\bar{N}}(t) \leqslant b\Big/\left(1-\dfrac{K_6(p+4)}{2}b^{(p+4)/2}t\right)^{2/(p+4)}$ 是一致有界的 (令 M 是界), 且在任意闭子区间 $0 \leqslant t \leqslant t_1 < t_b$ 上不依赖于 $\bar{N}$ 和 D, 其中 $t_b = 2/[K_6(p+4)b^{\frac{p+4}{2}}]$.

容易用引理 5.6.2 和像在文献 [41] 中应用 Leray-Schauder 不动点定理一样证明下面的引理.

引理 5.6.3 在引理 5.6.2 的条件下, 有限常微分方程组的 Cauchy 问题 (5.6.11)–(5.6.13) 在 $[0, t_1](0 < t_1 < t_b)$ 上存在解.

根据 Ascoli-Arzelá 定理, 有如下推论.

推论 5.6.1 在引理 5.6.3 的条件下和对于 Cauchy 问题 (5.6.11)–(5.6.13) 的解序列 $\{L_{\bar{N}lj}\}_{l,j=0}^{\bar{N}}$ 和 $\{T_{\bar{N}lj}\}_{l,j=0}^{\bar{N}}(\bar{N}=1,2,\cdots)$, 分别存在子序列 $\{L_{\bar{N}_s lj}\}_{l,j=0}^{\bar{N}_s}$ 和 $\{T_{\bar{N}_s lj}\}_{l,j=0}^{\bar{N}_s}$, 当 $\bar{N}_s \to \infty$ 时, 在 $[0, t_1]$ 上一致地成立

$$L_{\bar{N}_s lj} \to L_{lj}, \quad T_{\bar{N}_s lj} \to T_{lj}, \quad \dot{T}_{\bar{N}_s lj} \to \dot{T}_{lj} \quad (l, j = 0, 1, \cdots).$$

引理 5.6.4 在引理 5.6.2 的条件下, 级数 $\sum_{l,j=0}^{\infty}|L_{lj}|^2$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^h\beta_j^m|L_{lj}|^2$ $(h, m=2,4,6,8, h+m=10)$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^{10}|L_{lj}|^2$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\beta_j^{10}|L_{lj}|^2$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\dot{T}_{lj}^2$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^h\dot{T}_{lj}^2$ $(h=2,8,10)$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\beta_j^m\dot{T}_{lj}^2$ $(m=2,8,10)$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^h\beta_l^m\dot{T}_{lj}^2$ $(h,m=2,4,6, h+l=8)$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^h\beta_j^m\dot{T}_{lj}^2$ $(h,m=2,4,6,8, h+m=10)$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}T_{lj}^2$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^hT_{lj}^2$ $(h=2,10)$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\beta_j^mT_{lj}^2$ $(m=2,10)$ 和 $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^h\beta_j^mT_{lj}^2$ $(h,m=2,4,6,8, h+m=10)$ 在 $[0,t_1]$ 上收敛, 且一致有界 (令 M 是界).

证明 令 $S_J = \sum_{l,j=0}^{J}\alpha_l^4\beta_j^6|L_{lj}|^2$($J$ 是一自然数). 显然 $S_{J+1} > S_J$. 固定 J, 取 $\bar{N}_s(>J)$ 充分大和应用推理 5.6.1, 得

$$S_J \leqslant \left|S_J - \sum_{l,j=0}^{J}\alpha_l^4\beta_j^6|L_{\bar{N}_s lj}|^2\right| + \sum_{l,j=0}^{\bar{N}_s}\alpha_l^4\beta_j^6|L_{\bar{N}_s lj}|^2 \leqslant 1 + E_{\bar{N}_s}(t).$$

因为在 $[0,t_1]$ 上函数 $E_{\bar{N}_s}(t)$ 有界, 且不依赖于 $\bar{N}_s$, 于是 S_J 是有界的. 当然级数 $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^4\beta_j^6|L_{lj}|^2$ 在 $[0,t_1]$ 上收敛且有界. 应用同样的方法可以得到其他的结论.□

推论 5.6.2 在引理 5.6.2 的条件下, 存在常数 $M_1 > 0$, 使得在 $[0,t_1]$ 上

$$\|\varepsilon\|_{H^5(\Omega)} + \|u\|_{H^5(\Omega)} + \|u_t\|_{H^5(\Omega)} \leqslant M_1,$$
$$\|\varepsilon\|_{C^{3,\lambda}(\bar{\Omega})} + \|u\|_{C^{3,\lambda}(\bar{\Omega})} + \|u_t\|_{C^{3,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant M_1,$$

其中 $\varepsilon(x,t) = \sum_{l,j=0}^{\infty}L_{lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$ 和 $u(x,t) = \sum_{l,j=0}^{\infty}T_{lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$.

引理 5.6.5 在引理 5.6.2 的条件下, 在 Q_{t_1} 上一致地 $\varepsilon_{\bar{N}_s} \to \varepsilon$, $\varepsilon_{\bar{N}_s x_l} \to \varepsilon_{x_l}(l=1,2)$, $u_{\bar{N}_s} \to u$, $u_{\bar{N}_s x_l} \to u_{x_l}(l=1,2)$ 和 $u_{\bar{N}_s t} \to u_t(\bar{N}_s \to \infty)$, 其中 $\varepsilon_{\bar{N}_s}(x,t) = \sum_{l,j=0}^{\bar{N}_s}L_{\bar{N}_s lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$ 和 $u_{\bar{N}_s}(x,t) = \sum_{l,j=0}^{\bar{N}_s}T_{\bar{N}_s lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$.

证明 令 $L_{\bar{N}_s lj} \equiv 0(l, j > \bar{N}_s)$. 由引理 5.6.4 推出

$$|\varepsilon_{\bar{N}_s} - \varepsilon| \leqslant \left|\sum_{l,j=1}^{m}(L_{lj} - L_{\bar{N}_s lj})y_l(x_1)z_j(x_2)\right|$$

$$+ \left|\sum_{l,j=m+1}^{\infty} L_{lj}y_l(x_1)z_j(x_2)\right| + \left|\sum_{l,j=m+1}^{\bar{N}_s} L_{\bar{N}_s lj}y_l(x_1)z_j(x_2)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{D}\sum_{l,j=1}^{m}|L_{lj} - L_{\bar{N}_s lj}| + \frac{2\sqrt{M}}{\sqrt{D}}\sum_{l,j=m+1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_l^2\beta_j^3}.$$

注意到推论 5.6.1, 首先选 m, 然后选 $\bar{N}_s$, 使得上面不等式右端变小, 于是当 $\bar{N}_s \to \infty$ 时, 在 Q_{t_1} 上 $\varepsilon_{\bar{N}_s}(x,t) \to \varepsilon(x,t)$ 是一致的. 同样可证, 当 $\bar{N}_s \to \infty$ 时, $u_{\bar{N}_s} \to u$, $u_{\bar{N}_s x_l} \to u_{x_l}(l = 1, 2)$ 和 $u_{\bar{N}_s t} \to u_t(\bar{N}_s \to \infty)$. □

定理 5.6.1 在引理 5.6.2 的条件下, $(L_{lj}(t), T_{lj}(t))$ 是 Cauchy 问题 (5.6.5)–(5.6.7) 在 $0 \leqslant t \leqslant t_1 < t_b$ 上的解, 其中 $L_{lj}(t) = \lim_{\bar{N}_s\to\infty} L_{\bar{N}_s lj}(t), T_{lj}(t) = \lim_{\bar{N}_s\to\infty} T_{\bar{N}_s lj}(t)$ 和 $(L_{\bar{N}_s lj}(t), T_{\bar{N}_s lj}(t), l, j = 0, 1, \cdots, \bar{N}_s)$ 是 Cauchy 问题 (5.6.11)–(5.6.13) 的解.

证明 函数 $L_{\bar{N}_s lj}(t)$ 和 $T_{\bar{N}_s lj}(t)$ 满足 Volterra 积分方程组

$$iL_{\bar{N}_s lj} = i\varepsilon_{lj} + \int_0^t \{(\alpha_l^2 + \beta_j^2)L_{\bar{N}_s lj} + \langle u_{\bar{N}_s}\varepsilon_{\bar{N}_s}, y_l(x_1)z_j(x_2)\rangle\}d\tau \equiv i\varepsilon_{lj} + H_{\bar{N}_s lj}, \tag{5.6.37}$$

$$(1 + \alpha_l^2 + \beta_j^2)T_{\bar{N}_s lj} = (1 + \alpha_l^2 + \beta_j^2)(\varphi_{lj} + \psi_{lj}t) - \int_0^t (t-\tau)[(\alpha_l^2 + \beta_j^2)T_{\bar{N}_s lj}$$
$$- \langle\nabla^2 f(u_{\bar{N}_s}) + \nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}_s}|^2), y_l(x_1)z_j(x_2)\rangle]d\tau$$
$$\equiv (1 + \alpha_l^2 + \beta_j^2)(\varphi_{lj} + \psi_{lj}t) - F_{\bar{N}_s lj}, \quad l, j = 0, 1, \cdots, N_s. \tag{5.6.38}$$

我们的目的是指出, 函数 $\varepsilon_{lj}(t)$ 和 $T_{lj}(t)$ 满足类似的方程组. 事实上, 应用式 (5.6.37) 和式 (5.6.38) 推出

$$|iL_{lj} - i\varepsilon_{lj} - H_{lj}| \leqslant |iL_{lj} - iL_{\bar{N}_s lj}| + |H_{\bar{N}_s lj} - H_{lj}|$$
$$\leqslant |L_{lj} - L_{\bar{N}_s lj}| + (\alpha_l^2 + \beta_j^2)t_1\|L_{lj} - L_{\bar{N}_s lj}\|_{C[0,t_1]}$$
$$+ t_1\|\langle u\varepsilon - u_{\bar{N}_s}\varepsilon, y_l(x_1)z_j(x_2)\rangle\|_{C[0,t_1]}$$
$$+ t_1\|\langle u_{\bar{N}_s}\varepsilon - u_{\bar{N}_s}\varepsilon_{\bar{N}_s}, y_l(x_1)z_j(x_2)\rangle\|_{C[0,t_1]}, \tag{5.6.39}$$

$$|(1 + \alpha_l^2 + \beta_j^2)T_{lj} - (1 + \alpha_l^2 + \beta_j^2)(\varphi_{lj} + \psi_{lj}t) + F_{lj}|$$
$$\leqslant (1 + \alpha_l^2 + \beta_j^2)|T_{lj} - T_{\bar{N}_s lj}| + |F_{lj} - F_{\bar{N}_s lj}|$$

$$\leqslant [1+\alpha_l^2+\beta_j^2+(\alpha_l^2+\beta_j^2)t_1^2]\|T_{lj}-T_{\bar{N}_s lj}\|_{C[0,t_1]}$$
$$+t_1^2[\|\langle f(u)-f(u_{\bar{N}_s}),y_l''z_j+y_lz_j''\rangle\|_{C[0,t_1]}$$
$$+\|\langle|\varepsilon|^2-|\varepsilon_{\bar{N}_s}|^2,y_l''z_j+y_lz_j''\rangle\|_{C[0,t_1]}]\quad (l,j=0,1,\cdots,\bar{N}_s), \tag{5.6.40}$$

其中

$$H_{lj}=\int_0^t\{(\alpha_l^2+\beta_j^2)L_{lj}+\langle u\varepsilon,y_l(x_1)z_j(x_2)\rangle\}d\tau,$$

$$F_{lj}=\int_0^t(t-\tau)[(\alpha_l^2+\beta_j^2)T_{lj}-\langle\nabla^2f(u)+\nabla^2(|\varepsilon|^2),y_l(x_1)z_j(x_2)\rangle]d\tau.$$

由推论 5.6.1 和引理 5.6.5 推出, 当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, 式 (5.6.39) 和式 (5.6.40) 的右端趋于 0, 所以 $(L_{lj}(t),T_{lj}(t))$ 是积分方程组

$$iL_{lj}=i\varepsilon_{lj}+H_{lj},$$
$$(1+\alpha_l^2+\beta_j^2)T_{lj}=(1+\alpha_l^2+\beta_j^2)(\varphi_{lj}+\psi_{lj}t)-F_{lj},\quad l,j=0,1,\cdots$$

的解. 上面第一式对 t 求导一次和上面第二式对 t 求导两次, 得定理的结论. □

定理 5.6.2 设引理 5.6.2 的条件成立和 $\varepsilon_0(x),\varphi(x),\psi(x)\in H^6(\Omega)$, 则周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6) 在 Q_{t_1} 上存在古典解

$$\varepsilon(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\infty}L_{lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2),\quad u(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\infty}T_{lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2).$$

证明 由假定知

$$\varepsilon_{lj}=\int_\Omega\varepsilon_0(x)y_l(x_1)z_j(x_2)dx,\quad \varphi_{lj}=\int_\Omega\varphi(x)y_l(x_1)z_j(x_2)dx,$$
$$\psi_{lj}=\int_\Omega\psi(x)y_l(x_1)z_j(x_2)dx,\quad l,j=0,1,\cdots \tag{5.6.41}$$

和它们满足条件 $b<\infty$. 在这种情况, 定理 5.6.1 保证 Cauchy 问题 (5.6.8)–(5.6.10) 在 $0\leqslant t\leqslant t_1<t_b$ 上存在解和在 $[0,t_1]$ 上有

$$i\dot{L}_{lj}=(\alpha_l^2+\beta_j^2)L_{lj}+\langle u\varepsilon,y_lz_j\rangle, \tag{5.6.42}$$
$$(1+\alpha_l^2+\beta_j^2)\ddot{T}_{lj}=-(\alpha_l^2+\beta_j^2)T_{lj}+\langle f(u)+|\varepsilon|^2,y_l''z_j+y_lz_j''\rangle,$$
$$l,j=0,1,\cdots. \tag{5.6.43}$$

由有限常微分方程组 Cauchy 问题 (5.6.11)–(5.6.13) 推出

$$i\dot{L}_{\bar{N}_slj}=(\alpha_l^2+\beta_j^2)L_{\bar{N}_slj}+\langle u_{N_s}\varepsilon_{\bar{N}_s},y_lz_j\rangle, \tag{5.6.44}$$

$$(1+\alpha_l^2+\beta_j^2)\ddot{T}_{\bar{N}_slj}=-(\alpha_l^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}_slj}+\langle f(u_{\bar{N}_s})+|\varepsilon_{\bar{N}_s}|^2,y_l''z_j+y_lz_j''\rangle,$$
$$l,j=0,1,\cdots,\bar{N}_s. \tag{5.6.45}$$

因为当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, $L_{\bar{N}_slj}$ 和 $T_{\bar{N}_slj}$ 在 $[0,t_1]$ 上分别一致收敛于 L_{lj} 和 $T_{lj}(l,j=0,1,\cdots)$, 且当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, $\varepsilon_{\bar{N}_s},u_{\bar{N}_s},u_{\bar{N}_sx_j}(j=1,2)$ 和 $u_{\bar{N}_st}$ 在 Q_{t_1} 上分别一致收敛于 $\varepsilon,u,u_{x_j}(j=1,2)$ 和 u_t. 由式 (5.6.42)–(5.6.44) 和式 (5.6.45) 推出, 当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, 在 $[0,t_1]$ 上一致地 $\dot{L}_{\bar{N}_slj}\to\dot{L}_{lj}$ 和 $\ddot{T}_{\bar{N}_slj}\to\ddot{T}_{lj}$.

式 (5.6.11) 两端同乘以 $(\alpha_l^{12}+\alpha_l^{10}\beta_j^2+\alpha_l^8\beta_j^4+\alpha_l^6\beta_j^6+\alpha_l^4\beta_j^8+\alpha_l^2\beta_j^{10}+\beta_j^{12})\overline{L}_{\bar{N}lj}$, 乘积对 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和取虚部, 有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\sum_{\substack{h+m=6\\h,m=0,1,\cdots,6}}\|\varepsilon_{\bar{N}x_1^hx_2^m}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\&=2I_m\left\langle\frac{\partial^6}{\partial x_1^6}(u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}),\ \varepsilon_{\bar{N}x_1^6}+\varepsilon_{\bar{N}x_1^4x_2^2}+\varepsilon_{\bar{N}x_1^2x_2^4}+\varepsilon_{\bar{N}x_2^6}\right\rangle\\&\quad+2I_m\left\langle\frac{\partial^6}{\partial x_2^6}(u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}),\ \varepsilon_{\bar{N}x_1^4x_2^2}+\varepsilon_{\bar{N}x_1^2x_2^4}+\varepsilon_{\bar{N}x_2^6}\right\rangle.\end{aligned} \tag{5.6.46}$$

式 (5.6.12) 两端同乘以 $(\alpha_l^{10}+\alpha_l^2\beta_j^8+\alpha_l^4\beta_j^6+\alpha_l^6\beta_j^4+\alpha_l^8\beta_j^2+\beta_j^{10})\dot{T}_{\bar{N}lj}$, 乘积对 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\sum_{\substack{h+m=5\\h,m=0,1,\cdots,5}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\|_{L^2(\Omega)}^2+2\sum_{\substack{h+m=6\\h,m=0,1,\cdots,5}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\|_{L^2(\Omega)}^2\right.\\&\quad+\|u_{\bar{N}x_1^6t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{\bar{N}x_2^6t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{\bar{N}x_1^6}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\quad\left.+\|u_{\bar{N}x_2^6}\|_{L^2(\Omega)}^2+2\sum_{\substack{h+m=6\\h,m=1,2,\cdots,5}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^m}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\&\leqslant2\left|\left\langle\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}[\nabla^2f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2)],\ u_{\bar{N}x_1^6t}+u_{\bar{N}x_2^6t}+u_{\bar{N}x_1^2x_2^4t}+u_{\bar{N}x_1^4x_2^2t}\right\rangle\right|\\&\quad+2\left|\left\langle\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}[\nabla^2f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2)],\ u_{\bar{N}x_1^2x_2^4t}+u_{\bar{N}x_2^6t}\right\rangle\right|.\end{aligned} \tag{5.6.47}$$

应用 Hölder 不等式和引理 1.8.17 知

$$\left|2\left\langle \frac{\partial^4}{\partial x_1^4}[\nabla^2 f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2)],\ u_{\bar{N}x_1^6t}+u_{\bar{N}x_2^6t}+u_{\bar{N}x_1^2x_2^4t}+u_{\bar{N}x_1^4x_2^2t}\right\rangle\right|$$
$$\leqslant C_{19}(\|u_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}+\|u_{\bar{N}t}\|^2_{H^6(\Omega)}+\|\varepsilon_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}), \tag{5.6.48}$$

$$\left|2\left\langle \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}[\nabla^2 f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2)],\ u_{\bar{N}x_1^2x_2^4t}+u_{\bar{N}x_2^6t}\right\rangle\right|$$
$$\leqslant C_{20}(\|u_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}+\|u_{\bar{N}t}\|^2_{H^6(\Omega)}+\|\varepsilon_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}), \tag{5.6.49}$$

$$\left|2I_m\left\langle \frac{\partial^6}{\partial x_1^6}(u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}),\ \varepsilon_{\bar{N}x_1^6}+\varepsilon_{\bar{N}x_1^4x_2^2}+\varepsilon_{\bar{N}x_1^2x_2^4}+\varepsilon_{\bar{N}x_2^6}\right\rangle\right|$$
$$\leqslant C_{21}(\|u_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}+\|\varepsilon_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}), \tag{5.6.50}$$

$$\left|2I_m\left\langle \frac{\partial^6}{\partial x_1^6}(u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}),\ \varepsilon_{\bar{N}x_1^4x_2^2}+\varepsilon_{\bar{N}x_1^2x_2^4}+\varepsilon_{\bar{N}x_2^6}\right\rangle\right|$$
$$\leqslant C_{22}(\|u_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}+\|\varepsilon_{\bar{N}}\|^2_{H^6(\Omega)}). \tag{5.6.51}$$

由式 (5.6.46)–(5.6.51), 并应用 Gronwall 不等式给出

$$\sum_{\substack{h+m=6\\h,m=0,1,\cdots,6}}(\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^m}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\varepsilon_{\bar{N}x_1^hx_2^m}\|^2_{L^2(\Omega)})\leqslant C_{23},\quad t\in[0,t_1]. \tag{5.6.52}$$

因此, 由推论 5.6.2 和式 (5.6.52) 推出

$$\|u_{\bar{N}}\|_{H^6(\Omega)}+\|u_{\bar{N}t}\|_{H^6(\Omega)}+\|\varepsilon_{\bar{N}}\|_{H^6(\Omega)}\leqslant M_2,\quad t\in[0,t_1]. \tag{5.6.53}$$

应用引理 5.6.4 中同样的方法可证级数 $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^h\beta_j^m|L_{lj}|^2$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^h\beta_j^mT_{lj}^2$ 和 $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^h\beta_j^m\dot{T}_{lj}^2(h,m=4,6,8,\ h+m=12)$ 在 $[0,t_1]$ 上收敛, 且有界 (令 M_3 是界). 所以有

$$|L_{lj}(t)|\leqslant\frac{M_3}{\alpha_l^4\beta_j^2},\quad |L_{\bar{N}lj}(t)|\leqslant\frac{M_3}{\alpha_l^4\beta_j^2},\quad l,j=1,2,\cdots,\quad t\in[0,t_1].$$

从不等式

$$\begin{aligned}|\varepsilon_{\bar{N}_sx_1^2}-\varepsilon_{x_1^2}|\leqslant&\left|\sum_{l,j=0}^{m}\alpha_l^2(L_{\bar{N}_slj}-L_{lj})y_lz_j\right|+\left|\sum_{l,j=m+1}^{\infty}\alpha_l^2L_{\bar{N}_slj}y_lz_j\right|\\&+\left|\sum_{l,j=m+1}^{\infty}\alpha_l^2L_{lj}y_lz_j\right|\\\leqslant&\left|\sum_{l,j=0}^{m}\alpha_l^2(L_{\bar{N}_slj}-L_{lj})y_lz_j\right|+C_{24}\sum_{l,j=m+1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_l^2\beta_j^2}\end{aligned}$$

推出, 当 $\bar{N}_s \to \infty$ 时, 在 Q_{t_1} 上 $\varepsilon_{\bar{N}_s x_1^2} \to \varepsilon_{x_1^2}$ 是一致的. 利用同样的方法可证, 当 $\bar{N}_s \to \infty$ 时, $\varepsilon_{\bar{N}_s x_2^2} \to \varepsilon_{x_2^2}$, $\varepsilon_{\bar{N}_s x_1 x_2} \to \varepsilon_{x_1 x_2}$, $u_{\bar{N}_s x_1^2} \to u_{x_1^2}$, $u_{\bar{N}_s x_1 x_2} \to u_{x_1 x_2}$, $u_{\bar{N}_s x_2^2} \to u_{x_2^2}$, $u_{\bar{N}_s x_1 t} \to u_{x_1 t}$, $u_{\bar{N}_s x_2 t} \to u_{x_2 t}$, $u_{\bar{N}_s x_1^2 t} \to u_{x_1^2 t}$, $u_{\bar{N}_s x_2^2 t} \to u_{x_2^2 t}$ 和 $u_{\bar{N}_s x_1 x_2 t} \to u_{x_1 x_2 t}$ 在 Q_{t_1} 上是一致的.

类似地, 用 $(\alpha_l^2\beta_j^6 + \alpha^4\beta_j^4 + \alpha_l^6\beta_j^2 + \alpha_l^8 + \beta_j^8)\bar{\dot{L}}_{\bar{N}lj}$ 乘式 (5.6.11) 两端, 乘积对 $l, j = 0, 1, \cdots, \bar{N}$ 求和且取虚部, 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(\sum_{\substack{h+m=8\\h,m=0,2,\cdots,8}}\alpha_l^h\beta_j^m\right)|\dot{L}_{\bar{N}_{lj}}|^2\\
&\leqslant\left|I_m\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(\alpha_l^{10}+\beta_j^{10}+2\sum_{\substack{h+m=10\\h,m=2,4,6,8}}^{\bar{N}}\alpha_l^h\beta_j^m\right)L_{\bar{N}_{lj}}\bar{\dot{L}}_{\bar{N}_{lj}}\right|\\
&\quad+\left|I_m\int_\Omega u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}\sum_{\substack{h+m=8\\h,m=0,2,4,6,8}}\bar{\varepsilon}_{\bar{N}x_1^h x_2^m t}dx\right|. \qquad (5.6.54)
\end{aligned}$$

进行分部积分, 应用 Cauchy 不等式和引理 1.8.17 知

$$\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(\sum_{\substack{h+m=8\\h,m=0,2,4,6,8}}\alpha_l^h\beta_j^m\right)|\dot{L}_{\bar{N}_{lj}}|^2\leqslant C_{25},\quad t\in[0,t_1]. \qquad (5.6.55)$$

用 $(\alpha_l^2\beta_j^8 + \alpha_l^4\beta_j^6 + \alpha_l^6\beta_j^4 + \alpha_l^8\beta_j^2 + \alpha_l^{10} + \beta_j^{10})\ddot{T}_{\bar{N}lj}$ 乘式 (5.6.12) 两端, 乘积对 $l, j = 0, 1, \cdots, \bar{N}$ 求和, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left(\sum_{\substack{h+m=10\\h,m=0,2,4,6,8,10}}\alpha_l^h\beta_j^m+\sum_{\substack{h+m=12\\h,m=0,2,4,6,8,10,12}}\alpha_l^h\beta_j^m\right)\ddot{T}_{\bar{N}_{lj}}^2\\
&\leqslant C_{26}\left[\left(\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\sum_{\substack{h+m=12\\h,m=0,2,4,6,8,10,12}}\alpha_l^h\beta_j^m\right)T_{\bar{N}_{lj}}^2+\|u_{\bar{N}}\|_{H^6(\Omega)}^2+\|\varepsilon_{\bar{N}}\|_{H^6(\Omega)}\right]\\
&\leqslant C_{27},\quad t\in[0,t_1], \qquad (5.6.56)
\end{aligned}$$

其中常数 C_{27} 不依赖于 $\bar{N}$. 由式 (5.6.55),(5.6.56) 推出, 级数 $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^4\beta_j^4|\dot{L}_{lj}|^2$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^8\beta_j^4\ddot{T}_{lj}^2$, $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^4\beta_j^8\ddot{T}_{lj}^2$ 和 $\sum_{l,j=0}^{\infty}\alpha_l^6\beta_j^6\ddot{T}_{lj}^2$ 在 $[0,t_1]$ 上收敛且有界 (令界为

M_4). 所以

$$|\dot{L}_{lj}(t)| \leqslant \frac{M_4}{\alpha_l^2\beta_j^2}, \quad |\dot{L}_{\bar{N}lj}(t)| \leqslant \frac{M_4}{\alpha_l^2\beta_j^2}, \quad |\ddot{T}_{lj}(t)| \leqslant \frac{M_4}{\alpha_l^4\beta_j^2},$$

$$|\ddot{T}_{\bar{N}lj}(t)| \leqslant \frac{M_4}{\alpha_l^4\beta_j^2}, \quad l,j=1,2,\cdots, \quad t\in[0,t_1].$$

应用上面的方法可证, 当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, $\varepsilon_{\bar{N}_st}\to\varepsilon_t$ 和 $u_{\bar{N}_sx_1^2t^2}\to u_{x_1^2t^2}$ 在 Q_{t_1} 上是一致的. 利用同样方法可证, 当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, $u_{\bar{N}_sx_2^2t^2}\to u_{x_2^2t^2}$, $u_{\bar{N}_st^2}\to u_{t^2}$ 在 Q_{t_1} 上是一致的.

因此, 如果由式 (5.6.3) 和式 (5.6.4) 的算子分别作用到

$$\varepsilon(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\infty}L_{lj}(t)y_l(x_1)y_j(x_2) \quad 和 \quad u(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\infty}T_{lj}(t)y_l(x_1)y_j(x_2)$$

上, 结果是两个函数, 记为 $F(x,t)$ 和 $G(x,t)$, 它们必定是连续的. 因为对于所有的 l,j, $\langle F(x,t),y_l(x_1)z_j(x_2)\rangle$ 正是式 (5.6.8) 的左端和 $\langle G(x,t),y_l(x_1)z_j(x_2)\rangle$ 正是式 (5.6.9) 的左端, 所以只需证明 $F(x,t)\equiv 0$ 和 $G(x,t)\equiv 0$.

因此 $\langle F(x,t),y_l(x_1)y_j(x_2)\rangle\equiv 0$, $\langle G(x,t),y_l(x_1)z_j(x_2)\rangle\equiv 0$. 注意到 $\{y_l(x_1)z_j(x_2), l,j=0,1,\cdots\}$ 是标准基, 我们有 $F(x,t)\equiv 0$ 和 $G(x,t)\equiv 0$, 所以 $(\varepsilon(x,t),u(x,t))$ 是周期边值问题 (5.6.3)—(5.6.6) 的古典解, 其中 $\varepsilon(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\infty}L_{lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$, $u(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\infty}T_{lj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)$. □

像在文献 [41] 中易证下面的定理.

定理 5.6.3 设 $f\in C^3(\mathbb{R})$, $\varepsilon_0(x)$, $\widetilde{\varepsilon}_0(x)\in H^1(\Omega)$, $\varphi(x)$, $\widetilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $\widetilde{\psi}(x)\in H^2(\Omega)$. 令 $(\varepsilon(x,t),u(x,t))$ 和 $(\varepsilon_1(x,t),u_1(x,t))$ 是周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6) 在 Q_{t_1} 上分别对应于 $\varepsilon_0(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 和 $\widetilde{\varepsilon}_0(x)$, $\widetilde{\varphi}(x)$, $\widetilde{\psi}(x)$ 的两个不同的局部古典解, 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得如果

$$\|\varepsilon_0-\widetilde{\varepsilon}_0\|_{H^1(\Omega)}+\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_{H^2(\Omega)}+\|\psi-\widetilde{\psi}\|_{H^2(\Omega)}<\delta,$$

则有

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon-\varepsilon_1\|_{H^2(\Omega)}+\|\varepsilon_t-\varepsilon_{1t}\|_{H^1(\Omega)}+\|u-u_1\|_{H^2(\Omega)}+\|u_t-u_{1t}\|_{H^2(\Omega)}\\&+\|u_{tt}-u_{2tt}\|_{H^2(\Omega)}<\varepsilon, \quad 0\leqslant t\leqslant t_1.\end{aligned} \tag{5.6.57}$$

推论 5.6.3 在定理 5.6.3 的条件下, 周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6) 的解在 Q_{t_1} 上是唯一的.

现在考虑周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6) 解的正则性.

引理 5.6.6 如果 $f(s)\in C^k(\mathbb{R})$ 和 $\varepsilon_0(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in H^k(\Omega)(k\geqslant 7; k\leqslant 6$ 的情况已证), 则

$$\|\varepsilon_{\bar{N}}\|_{H^k(\Omega)}+\|u_{\bar{N}}\|_{H^k(\Omega)}+\|u_{\bar{N}t}\|_{H^k(\Omega)}\leqslant M_5, \quad t\in[0,t_1], \tag{5.6.58}$$

其中 M_5 是不依赖于 $\bar{N}$ 的常数.

证明 式 (5.6.11) 两端同乘以$\sum_{\substack{h+m=2k\\h,m=0,2,\cdots,2k}}\alpha_l^k\beta_j^m\overline{L}_{\bar{N}lj}(t)$, 乘积对 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 并取虚部, 得

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\sum_{\substack{h+m=2k\\h,m=0,2,\cdots,2k}}\alpha_l^h\beta_j^m|L_{\bar{N}_{lj}}|^2\right\}$$
$$=2I_m\int_\Omega(u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}})(-1)^k\sum_{\substack{h+m=2k\\h,m=0,2,\cdots,2k}}\overline{\varepsilon}_{\bar{N}x_1^hx_2^m}dx. \tag{5.6.59}$$

式 (5.6.12) 两端同乘以 $\sum_{\substack{h+m=2(k-1)\\h,m=0,2,\cdots,2(k-1)}}\alpha_l^h\beta_j^m\dot{T}_{\bar{N}lj}$, 乘积对 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 有

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left[\sum_{\substack{h+m=2(k-1)\\h,m=0,2,\cdots,2(k-1)}}(\alpha_l^h\beta_j^m+\alpha_l^{h+2}\beta_j^m+\alpha_l^h\beta_j^{m+2})\right]\dot{T}_{\bar{N}_{lj}}^2\right.$$
$$\left.+\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left[\sum_{\substack{h+m=2(k-1)\\h,m=0,2,\cdots,2(k-1)}}(\alpha_l^{h+2}\beta_j^m+\alpha_l^h\beta_j^{m+2})\right]T_{\bar{N}_{lj}}^2\right\}$$
$$=2\int_\Omega\left[\nabla^2f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2)\right]$$
$$\times\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\sum_{\substack{h+m=2(k-1)\\h,m=0,2,\cdots,2(k-1)}}\alpha_l^h\beta_j^m\dot{T}_{\bar{N}_{lj}}y_l(x_1)z_j(x_2)dx. \tag{5.6.60}$$

式 (5.6.59) 与式 (5.6.60) 联合, 并对 x 进行分部积分, 立得

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{\substack{h+m=k-1\\h,m=0,1,\cdots,(k-1)}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\|_{L^2(\Omega)}^2+2\sum_{\substack{h+m=k\\h,m=1,2,\cdots,(k-1)}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\|_{L^2(\Omega)}^2\right.$$
$$+\sum_{j=1}^2(\|u_{\bar{N}x_j^kt}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_{\bar{N}x_j^k}\|_{L^2(\Omega)}^2)+2\sum_{\substack{h+m=k\\h,m=1,2,\cdots,(k-1)}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^m}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+\sum_{\substack{h+m=k\\h,m=0,1,\cdots,k}}\|\varepsilon_{\bar{N}x_1^hx_2^m}\|_{L^2(\Omega)}^2\Bigg\}$$

$$\leqslant 2\left|\left\langle\frac{\partial^{k-2}}{\partial x_1^{k-2}}[\nabla^2 f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2)],\ \sum^{*}u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\right\rangle\right|$$
$$+2\left|\left\langle\frac{\partial^{k-2}}{\partial x_2^{k-2}}[\nabla^2 f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2)],\ \sum^{**}u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\right\rangle\right|$$
$$+2\left|I_m\int_\Omega\sum_{\substack{h+m=k\\h,m=0,1,\cdots,k}}(u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}})_{x_1^hx_2^m}\sum_{\substack{h+m=k\\h,m=0,1,\cdots,k}}\bar{\varepsilon}_{\bar{N}x_1^hx_2^m}dx\right|, \tag{5.6.61}$$

其中, 当 k 是一奇数时, $\sum^*=\sum_{h+m=k}, h=k,k-2,\cdots,k-2\left(\frac{k-1}{2}\right)$; 当 k 是一偶数时, $h=k,k-2,\cdots,k-2\left(\frac{k}{2}\right)$; 当 k 是一奇数时, $\sum^{**}=\sum_{h+m=k}, m=k,k-2,\cdots,k-2\left(\frac{k-3}{2}\right)$; 当 k 是一偶数时, $m=k,k-2,\cdots,k-2\left(\frac{k-4}{2}\right)$.

应用 Hölder 不等式和引理 1.8.17 得

$$\left|2\left\langle\frac{\partial^{k-2}}{\partial x_1^{k-2}}[\nabla^2 f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2)],\ \sum^{*}u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\right\rangle\right|$$
$$\leqslant C_{28}(\|u_{\bar{N}}\|_{H^k(\Omega)}^2+\|u_{\bar{N}t}\|_{H^k(\Omega)}^2+\|\varepsilon_{\bar{N}}\|_{H^k(\Omega)}^2), \tag{5.6.62}$$

$$\left|2\left\langle\frac{\partial^{k-2}}{\partial x_2^{k-2}}[\nabla^2 f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2)],\ \sum^{**}u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\right\rangle\right|$$
$$\leqslant C_{29}(\|u_{\bar{N}}\|_{H^k(\Omega)}^2+\|u_{\bar{N}t}\|_{H^k(\Omega)}^2+\|\varepsilon_{\bar{N}}\|_{H^k(\Omega)}^2), \tag{5.6.63}$$

$$\left|2I_m\int_\Omega\sum_{\substack{h+m=k\\h,m=0,1,\cdots,k}}(u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}})_{x_1^hx_2^m}\sum_{\substack{h+m=k\\h,m=0,1,\cdots,k}}\bar{\varepsilon}_{\bar{N}x_1^hx_2^m}dx\right|$$
$$\leqslant C_{30}(\|u_{\bar{N}}\|_{H^k(\Omega)}^2+\|\varepsilon_{\bar{N}}\|_{H^k(\Omega)}^2). \tag{5.6.64}$$

将式 (5.6.62)–(5.6.64) 代入式 (5.6.61) 和应用 Gronwall 不等式得 (5.6.50). □

引理 5.6.7 在引理 5.6.6 的条件下, 如果 $k=2r+\xi_r$ $(\xi_r\geqslant 0,\ r\geqslant 1)$, 则有估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_1}\|\varepsilon_{\bar{N}t^\beta}\|_{H^{k-2\beta}(\Omega)}\leqslant C_{31},\quad \beta=1,2,\cdots,r, \tag{5.6.65}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_1}\|u_{\bar{N}t^{\beta+1}}\|_{H^{k-2(\beta-1)}(\Omega)}\leqslant C_{32},\quad \beta=1,2,\cdots,r, \tag{5.6.66}$$

其中常数 C_{31} 和 C_{32} 是不依赖于 $\bar{N}$ 的.

证明 应用数学归纳法证明式 (5.6.65) 和式 (5.6.66) 成立. 式 (5.6.11) 两端同乘以 $\bar{\dot{L}}_{\bar{N}lj}(t)+\sum_{\substack{h+m=2\xi_1\\h,m=0,2,\cdots,2\xi_1}}\alpha_l^h\beta_j^m\bar{\dot{L}}_{\bar{N}lj}$, 乘积对 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 并取虚部, 得

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon_{\bar{N}t}\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{\substack{h+m=\xi_1\\h,m=0,1,\cdots,\xi_1}}\|\varepsilon_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&=I_m\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}(\alpha_l^2+\beta_j^2)L_{\bar{N}_{lj}}\bar{\dot{L}}_{\bar{N}_{lj}}+I_m\int_\Omega u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}\bar{\varepsilon}_{\bar{N}t}dx\\&\quad+I_m\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left\{\sum_{\substack{h+m=2\xi_1\\h,m=0,2,\cdots,2\xi_1}}(\alpha_l^{h+2}\beta_j^m+\alpha_l^h\beta_j^{m+2})\right\}L_{\bar{N}_{lj}}\bar{\dot{L}}_{\bar{N}_{lj}}\\&\quad+I_m\int_\Omega u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}}(-1)^{\xi_1}\sum_{\substack{h+m=2\xi_1\\h,m=0,2,\cdots,2\xi_1}}\bar{\varepsilon}_{\bar{N}x_1^hx_2^mt}dx.\end{aligned}\tag{5.6.67}$$

式 (5.6.67) 对 x 进行分部积分, 应用 Cauchy 不等式, 引理 1.8.17 和式 (5.6.58), 由式 (5.6.67) 可得 $\beta=1$ 的式 (5.6.65).

式 (5.6.12) 两端同乘以 $\ddot{T}_{\bar{N}lj}(t)+\sum_{\substack{h+m=2(k-1)\\h,m=0,2,\cdots,2(k-1)}}\alpha_l^h\beta_j^m\ddot{T}_{\bar{N}lj}(t)$, 乘积对 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和知

$$\begin{aligned}&\|u_{\bar{N}t^2}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla u_{\bar{N}t^2}\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{\substack{h+m=k-1\\h,m=0,1,\cdots,k-1}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt^2}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\quad+2\sum_{\substack{h+m=k\\h,m=0,1,\cdots,k}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt^2}\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{j=1}^2\|u_{\bar{N}x_j^kt^2}\|_{L^2(\Omega)}^2\\&=-\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left\{(\alpha_l^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}_{lj}}\left(\ddot{T}_{\bar{N}_{lj}}+\sum_{\substack{h+m=2(k-1)\\h,m=0,2,\cdots,2(k-1)}}\alpha_l^h\beta_j^m\ddot{T}_{\bar{N}_{lj}}\right)\right\}\\&\quad+\int_\Omega(\nabla^2f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2))\\&\quad\times\left(u_{\bar{N}t^2}+(-1)^{k-1}\sum_{\substack{h+m=k-1\\h,m=0,1,\cdots,k-1}}u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt^2}\right)dx.\end{aligned}\tag{5.6.68}$$

式 (5.6.68) 对 x 分部积分, 应用 Cauchy 不等式, 引理 1.8.17, 从式 (5.6.68) 可得

$\beta=1$ 的式 (5.6.66).

假定式 (5.6.65) 和式 (5.6.66) 对 β 成立. 我们证明式 (5.6.65) 和式 (5.6.66) 对 $\beta+1$ 成立. 式 (5.6.65) 对 t 求导 β 次, 得到的方程两端同乘以 $\overline{L}_{\bar{N}ljt^{\beta+1}}+\sum_{\substack{h+m=2\xi_{\beta+1}\\h,m=0,2,\cdots,2\xi_{\beta+1}}}\alpha_l^h\beta_j^m\overline{L}_{\bar{N}ljt^{\beta+1}}$, 乘积对 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 对 x 分部积分, 并取虚部, 有

$$
\begin{aligned}
&\|\varepsilon_{\bar{N}t^{\beta+1}}\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{\substack{h+m=\xi_{\beta+1}\\h,m=0,1,\cdots,\xi_{\beta+1}}}\|\varepsilon_{\bar{N}x_1^hx_2^mt^{\beta+1}}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
\leqslant&\left|I_m\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left\{(\alpha_l^2+\beta_j^2)L_{\bar{N}_{ljt^\beta}}\left(\overline{L}_{\bar{N}_{ljt^{\beta+1}}}+\sum_{\substack{h+m=2\xi_{\beta+1}\\h,m=0,2,\cdots,2\xi_{\beta+1}}}\alpha_l^h\beta_j^m\overline{L}_{\bar{N}_{ljt^{\beta+1}}}\right)\right\}\right|\\
&+\left|I_m\int_\Omega(u_{\bar{N}}\varepsilon_{\bar{N}})_{t^\beta}\left\{\overline{\varepsilon}_{\bar{N}t^{\beta+1}}+(-1)^{\xi_{\beta+1}}\sum_{\substack{h+m=2\xi_{\beta+1}\\h,m=0,2,\cdots,2\xi_{\beta+1}}}\overline{\varepsilon}_{\bar{N}x_1^hx_2^mt^{\beta+1}}\right\}dx\right|.
\end{aligned}
\tag{5.6.69}
$$

式 (5.6.69) 对 x 分部积分, 应用 Cauchy 不等式, 引理 1.8.17, 式 (5.6.58) 和数学归纳法假定, 可得 $\beta+1$ 的式 (5.6.65).

式 (5.6.12) 对 t 求导 β 次, 得到的方程两端同乘以

$$
T_{\bar{N}ljt^{\beta+2}}+\sum_{\substack{h+m=2(\xi_{\beta-1})\\h,m=0,2,\cdots,2(\xi_{\beta-1})}}\alpha_l^h\beta_j^mT_{\bar{N}ljt^{\beta+2}},
$$

乘积对 $l,j=0,1,\cdots,\bar{N}$ 求和, 对 x 分部积分, 有

$$
\begin{aligned}
&\|u_{\bar{N}t^{\beta+2}}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla u_{\bar{N}t^{\beta+2}}\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{\substack{h+m=\xi_\beta-1\\h,m=0,1,\cdots,\xi_\beta-1}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt^{\beta+2}}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+2\sum_{\substack{h+m=\xi_\beta\\h,m=1,2,\cdots,\xi_\beta}}\|u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt^{\beta+2}}\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{j=1}^2\|u_{\bar{N}x_j^{\xi_\beta}t^{\beta+2}}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
=&-\sum_{l,j=0}^{\bar{N}}\left\{(\alpha_l^2+\beta_j^2)T_{\bar{N}_{ljt^\beta}}\left(T_{\bar{N}_{ljt^{\beta+2}}}+\sum_{\substack{h+m=2(\xi_\beta-1)\\h,m=0,2,\cdots,2(\xi_\beta-1)}}\alpha_l^h\beta_j^mT_{\bar{N}_{ljt^{\beta+2}}}\right)\right\}\\
&+\int_\Omega(\nabla^2f(u_{\bar{N}})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}}|^2))_{t^\beta}
\end{aligned}
$$

$$\times\left(u_{\bar{N}t^{\beta+2}}+(-1)^{\xi_\beta-1}\sum_{\substack{h+m=2(\xi_\beta-1)\\h,m=0,2,\cdots,2(\xi_\beta-1)}}u_{\bar{N}x_1^hx_2^mt^{\beta+2}}\right)dx. \tag{5.6.70}$$

应用同样的方法, 由式 (5.6.70) 可得 $\beta+1$ 的式 (5.6.66). □

利用引理 5.6.6, 引理 5.6.7 和紧性定理可得下面的定理.

定理 5.6.4 设 $f(s)\in C^k(\mathbb{R})$, $|f^{(j)}(s)|\leqslant K_j|s|^{p+(5-j)}$ $(j=1,2,3,4,5,\ p\geqslant 1)$ 和 $\varepsilon_0(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in H^k(\Omega)$. 如果 $k=2r+\xi_r$ $(\xi_r\geqslant 0,\ r\geqslant 1)$, 则周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6) 的解 $(\varepsilon(x,t),u(x,t))$ 有广义导数 $D_x^\alpha D_t^\beta\varepsilon$ $(0\leqslant|\alpha|+2\beta\leqslant k)$, $D_x^\alpha D_t^\beta u$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant k,\ \beta=0,1;\ 0\leqslant|\alpha|+2(\beta-2)\leqslant k,\ \beta=2,3,\cdots,r)$ 和连续导数 $D_x^\alpha D_t^\beta\varepsilon$ $(0\leqslant|\alpha|+2(\beta+1)\leqslant k-2)$ 和 $D_x^\alpha D_t^\beta u$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant k-2,\ \beta=0,1;$ $0\leqslant|\alpha|+2(\beta-1)\leqslant k-2,\ \beta=2,3,\cdots,r)$.

注 5.6.1 显然获得周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6) 近似解的积分估计 (5.6.58), (5.6.65) 和估计 (5.6.66) 之后, 可以得到周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6), 当 $k\geqslant 5$ 时, 局部广义解的存在性和正则性以及当 $k\geqslant 6$ 时, 利用紧性定理还可以得到周期边值问题 (5.6.3)–(5.6.6) 的局部古典解.

5.6.3 Cauchy 问题 (5.6.3),(5.6.4),(5.6.7)

下面讨论 Cauchy 问题 (5.6.3),(5.6.4),(5.6.7).

定理 5.6.5 设引理 5.6.1 的条件 (1) 成立和 $\varepsilon_0(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in H^k(\mathbb{R}^2)$. 如果 $k\geqslant 5$, 则 Cauchy 问题 (5.6.3),(5.6.4),(5.6.7) 在 $[0,t^*]\times\mathbb{R}^2(0<t^*<t_{b^*})$ 上存在唯一局部广义解 $(\varepsilon(x,t),u(x,t))$, 其中

$$\begin{aligned}
b^*=&\|\psi\|^2+\|\psi_{x_1}\|^2+\|\psi_{x_2}\|^2+\sum_{\substack{h+m=4\\h,m=0,1,2,3,4}}\|\psi_{x_1^hx_2^m}\|^2\\
&+2\sum_{\substack{h+m=5\\h,m=1,2,3,4}}\|\psi_{x_1^hx_2^m}\|^2+\|\psi_{x_1^5}\|^2+\|\psi_{x_2^5}\|^2+\|\varphi\|^2+\|\varphi_{x_1}\|^2+\|\varphi_{x_2}\|^2\\
&+2\sum_{\substack{h+m=5\\h,m=1,2,3,4}}\|\varphi_{x_1^hx_2^m}\|^2+\|\varphi_{x_1^5}\|^2+\|\varphi_{x_2^5}\|^2+\|\varepsilon_0\|^2\\
&+\sum_{\substack{h+m=5\\h,m=1,2,3,4}}\|\varepsilon_{0x_1^hx_2^m}\|^2+\|\varepsilon_{0x_1^5}\|^2+\|\varepsilon_{0x_2^5}\|^2+1,
\end{aligned}$$

$t_{b^*}=2/[K_6(p+4)b^{*(p+4)/2}]$ 以及如果 $k\geqslant 6$, 则 Cauchy 问题 (5.6.3),(5.6.4),(5.6.7) 在 $[0,t^*]\times\mathbb{R}^2$ 上存在唯一局部古典解 $(\varepsilon(x,t),u(x,t))$. Cauchy 问题 (5.6.3),(5.6.4),(5.6.7) 的解 $(\varepsilon(x,t),u(x,t))$ 有如定理 5.6.4 中同样的正则性.

证明 取一实数序列 $\{D_s\}(D_s>1)$, 使得当 $s\to\infty$ 时, $D_s\to\infty$. 对于每一个 s, 构造具有周期为 $2D_s$ 的周期函数 $\varepsilon_{0s}(x)$, $\varphi_s(x)$ 和 $\psi_s(x)$, 使得

(1) $\varepsilon_{0s},\varphi_s,\psi_s\in H^k(\Omega_s)$, 其中 $\overline{\Omega}_s=\{x\in(x_1,x_2)||x_j|\leqslant D_s, j=1,2\}$;

(2) $\varepsilon_{0s}(x)=\varepsilon_0(x)$, $\varphi_s(x)=\varphi(x)$, $\psi_s(x)=\psi(x)$, $x\in[-(D_s-1),D_s-1]\times[-(D_s-1),D_s-1]=\widetilde{\Omega}_s$, 则

$$\|\varepsilon_{0sx_1^hx_2^m}\|_{L^2(\widetilde{\Omega}_s)}\leqslant\|\varepsilon_{0x_1^hx_2^m}\|\quad(h+m=k,\ h,m=0,1,\cdots,k),$$
$$\|\varphi_{sx_1^hx_2^m}\|_{L^2(\widetilde{\Omega}_s)}\leqslant\|\varphi_{x_1^hx_2^m}\|\quad(h+m=k,\ h,m=0,1,\cdots,k),$$
$$\|\psi_{sx_1^hx_2^m}\|_{L^2(\widetilde{\Omega}_s)}\leqslant\|\psi_{x_1^hx_2^m}\|\quad(h+m=k,\ h,m=0,1,\cdots,k).$$

考虑下列周期边值问题

$$i\varepsilon_t+\nabla^2\varepsilon-u\varepsilon=0, \tag{5.6.71}$$
$$u_{tt}-\nabla^2u-\nabla^2u_{tt}=\nabla^2f(u)+\nabla^2(|\varepsilon|^2), \tag{5.6.72}$$
$$\varepsilon(x,t)=\varepsilon(x+2D_{se_j},t),\quad u(x.t)=u(x+2D_{se_j},t),\quad j=1,2, \tag{5.6.73}$$
$$\varepsilon(x,0)=\varepsilon_0(x),\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x). \tag{5.6.74}$$

令 $\{y_l(x_1)\}$ 是下列常微分方程特征值问题

$$y''+\lambda y=0,\quad y(x_1)=y(x_1+2D_s)$$

的特征值 $\lambda_{1l}=\alpha_l^2=\left(\dfrac{l\pi}{D_s}\right)^2$ $(l=0,1,\cdots)$ 对应的特征函数构成 $L^2((-D_s,D_s))$ 中的一个标准正交基和 $\{z_j(x_2)\}$ 是下列常微分方程特征值问题

$$z''+\lambda z=0,\quad z(x_2)=z(x_2+2D_s)$$

的特征值 $\lambda_{2j}=\beta_j^2=\left(\dfrac{j\pi}{D_s}\right)^2$ $(j=0,1,\cdots)$ 对应的特征函数构成 $L^2((-D_s,D_s))$ 中的一个标准正交基. 根据引理 1.8.10, 函数系 $\{y_l(x_1)z_j(x_2),l,j=0,1,\cdots\}$ 构成 $L^2(\overline{\Omega}_s)$ 中的一个标准正交基.

设周期边值问题 (5.6.71)–(5.6.74) 的近似解是

$$\left(\varepsilon_{\bar{N}s}(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\bar{N}_s}L_{\bar{N}_slj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2),u_{\bar{N}_s}(x,t)=\sum_{l,j=0}^{\bar{N}_s}T_{\bar{N}_slj}(t)y_l(x_1)z_j(x_2)\right),$$

其中 $L_{\bar{N}_slj}(t)$ 和 $T_{\bar{N}_slj}(t)$ 是待定系数. 这些系数应该满足 Cauchy 问题

$$\langle i\varepsilon_{\bar{N}_st}+\nabla^2\varepsilon_{\bar{N}_s}-u_{\bar{N}_s}\varepsilon_{\bar{N}_s},\ y_lz_j\rangle=0, \tag{5.6.75}$$
$$\langle u_{\bar{N}_stt}-\nabla^2u_{\bar{N}_s}-\nabla^2u_{\bar{N}_stt}-(\nabla^2f(u_{\bar{N}_s})+\nabla^2(|\varepsilon_{\bar{N}_s}|^2),\ y_lz_j\rangle=0, \tag{5.6.76}$$
$$L_{\bar{N}_slj}(0)=\langle\varepsilon_{0s},\ y_lz_j\rangle,\quad T_{\bar{N}_slj}(0)=\langle\varphi_s,y_lz_j\rangle,$$

$$\dot{T}_{\bar{N}_s lj} = \langle \psi_s, y_l z_j \rangle, \quad l, j = 0, 1, \cdots, \bar{N}_s. \tag{5.6.77}$$

令

$$\begin{aligned} E_{\bar{N}_s}(t) = \sum_{l,j=0}^{\bar{N}_s} \Bigg[\Bigg(& 1 + \alpha_l^2 + \beta_j^2 + \sum_{\substack{h+m=8 \\ h,m=0,2,4,6,8}} \alpha_l^h \beta_j^m \\ & + 2 \sum_{\substack{h+m=10 \\ h,m=2,4,6,8}} \alpha_l^h \beta_j^m + \alpha_l^{10} + \beta_j^{10} \Bigg) \dot{T}_{\bar{N}_s lj}^2 \\ & + \Bigg(1 + \alpha_l^2 + \beta_j^2 + 2 \sum_{\substack{h+m=10 \\ h,m=2,4,6,8}} \alpha_l^h \beta_j^m + \alpha_l^{10} + \beta_j^{10} \Bigg) T_{\bar{N}_s lj}^2 \\ & + \Bigg(1 + \sum_{\substack{h+m=10 \\ h,m=2,4,6,8}} \alpha_l^h \beta_j^m + \alpha_l^{10} + \beta_j^{10} \Bigg) |L_{\bar{N}_s lj}|^2 \Bigg] + 1. \end{aligned}$$

由此知, 对于任意的 s, $\lim_{\bar{N}_s \to \infty} E_{\bar{N}_s}(0) = b_s < b^*$. 因此 $t_{b^*} \leqslant t_{b_s}$. 根据上面得到估计 (5.6.58),(5.6.65) 和 (5.6.66) 的同样方法以及嵌入定理得

$$\|\varepsilon_{\bar{N}_s}\|_{H^k(\Omega_s)} + \|u_{\bar{N}_s}\|_{H^k(\Omega_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|_{H^k(\Omega_s)} \leqslant C_{33}, \quad t \in [0, t_{b^*}], \tag{5.6.78}$$

$$\|\varepsilon_{\bar{N}_s}\|_{C^{k-2,\lambda}(\bar{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s}\|_{C^{k-2,\lambda}(\bar{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|_{C^{k-2,\lambda}(\bar{\Omega}_s)} \leqslant C_{34}, \quad t \in [0, t_{b^*}], \tag{5.6.79}$$

$$\|\varepsilon_{\bar{N}_s t^\beta}\|_{H^{k-2\beta}(\bar{\Omega}_s)} \leqslant C_{35}, \quad \beta = 1, 2, \cdots, r, \quad t \in [0, t_{b^*}], \tag{5.6.80}$$

$$\|\varepsilon_{\bar{N}_s t^\beta}\|_{C^{k-(2\beta+1),\lambda}(\bar{\Omega}_s)} \leqslant C_{36}, \quad \beta = 1, 2, \cdots, r, \quad t \in [0, t_{b^*}], \tag{5.6.81}$$

$$\|u_{\bar{N}_s t^{\beta+1}}\|_{H^{k-2(\beta-1)}(\bar{\Omega}_s)} \leqslant C_{37}, \quad \beta = 1, 2, \cdots, r, \quad t \in [0, t_{b^*}], \tag{5.6.82}$$

$$\|u_{\bar{N}_s t^{\beta+1}}\|_{C^{k-2\beta,\lambda}(\bar{\Omega}_s)} \leqslant C_{38}, \quad \beta = 1, 2, \cdots, r, \quad t \in [0, t_{b^*}], \tag{5.6.83}$$

其中常数 $C_j (j=33, \cdots, 38)$ 不依赖于 $\bar{N}_s$ 和 D_s, $0<\lambda<1$, $k=2r+\xi_r$ $(\xi \geqslant 0, r \geqslant 1)$.

如果 $k = 5$, 则由式 (5.6.68)–(5.6.73) 可知

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon_{\bar{N}_s}\|_{H^5(\Omega_s)} + \|\varepsilon_{\bar{N}_s t}\|_{H^3(\Omega_s)} + \|u_{\bar{N}_s}\|_{H^5(\Omega_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|_{H^5(\Omega_s)} \\ & + \|u_{\bar{N}_s t^2}\|_{H^5(\Omega_s)} \leqslant C_{39}, \quad t \in [0, t_{b^*}], \end{aligned} \tag{5.6.84}$$

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon_{\bar{N}_s}\|_{C^{3,\lambda}(\bar{\Omega}_s)} + \|\varepsilon_{\bar{N}_s t}\|_{C^{1,\lambda}(\bar{\Omega}_s)} + \|u_{\bar{N}_s}\|_{C^{3,\lambda}(\Omega_s)} + \|u_{\bar{N}_s t}\|_{C^{3,\lambda}(\bar{\Omega}_s)} \\ & + \|u_{\bar{N}_s t^2}\|_{H^{3,\lambda}(\bar{\Omega}_s)} \leqslant C_{40}, \quad t \in [0, t_{b^*}], \end{aligned} \tag{5.6.85}$$

其中常数 C_{39}, C_{40} 不依赖于 $\bar{N}_s$ 和 D_s. 按照式 (5.6.85) 和 Ascoli-Arzelá 定理, 可从 $(\{\varepsilon_{\bar{N}_s}\},\{u_{\bar{N}_s}\})$ 中抽出一子序列, 仍记为 $(\{\varepsilon_{\bar{N}_s}\},\{u_{\bar{N}_s}\})$, 使得当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, 子序列 $\{D_x^\alpha\varepsilon_{\bar{N}_s}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 1)$, $\{D_x^\alpha u_{\bar{N}_s}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 和 $\{D_x^\alpha u_{\bar{N}_st}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 在 $\bar{\Omega}_s\times[0,t_{b^*}]$ 上分别一致收敛于极限函数 $\{D_x^\alpha\varepsilon_s\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 1)$, $\{D_x^\alpha u_s\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 和 $\{D_x^\alpha u_{st}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$.

对于上面的子序列 $(\{\varepsilon_{\bar{N}_s}\},\{u_{\bar{N}_s}\})$, 估计 (5.6.84) 仍成立. 因此可以从 $(\{\varepsilon_{\bar{N}_s}\},\{u_{\bar{N}_s}\})$ 中抽出一子序列, 仍记为 $(\{\varepsilon_{\bar{N}_s}\},\{u_{\bar{N}_s}\})$, 使得当 $\bar{N}_s\to\infty$ 时, 子序列 $\{D_x^\alpha\varepsilon_{\bar{N}_s}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 和 $\{D_x^\alpha u_{\bar{N}_s}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 分别在 $L^\infty([0,t_{b^*}];L^2(\Omega_s))$ 中弱 $*$ 收敛于极限函数 $\{D_x^\alpha\varepsilon_s\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 和 $\{D_x^\alpha u_s\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$; 子序列 $\{D_x^\alpha\varepsilon_{\bar{N}_st}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 和 $\{D_x^\alpha u_{\bar{N}_st}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 在 $L^\infty([0,t_{b^*}];L^2(\Omega_s))$ 中弱 $*$ 收敛于极限函数 $\{D_x^\alpha\varepsilon_{st}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 和 $\{D_x^\alpha u_{st}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$; 子序列 $\{D_x^\alpha u_{\bar{N}_stt}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 在 $L^\infty([0,t_{b^*}];L^2(\Omega_s))$ 中弱 $*$ 收敛于极限函数 $\{D_x^\alpha u_{stt}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$. 由共鸣定理的推论 [241] 导出估计 (5.6.78)–(5.6.83) 对于 $(\{\varepsilon_s\},\{u_s\})$ 仍成立, 其中 $(\{\varepsilon_s\},\{u_s\})$ 是周期边值问题 (5.6.71)–(5.6.74) 的局部广义解. 利用 Ascoli-Arzelá 定理可从 $(\{\varepsilon_s\},\{u_s\})$ 中抽出子序列, 仍记为 $(\{\varepsilon_s\},\{u_s\})$, 使得当 $s\to\infty$ 时, 子序列 $\{D_x^\alpha\varepsilon_s\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 1)$, $\{D_x^\alpha u_s\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 和 $\{D_x^\alpha u_{st}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 分别在任意区域 $\{-L\leqslant x_1,\ x_2\leqslant L,\ 0\leqslant t\leqslant t_{b^*}\}(L>0)$ 上一致收敛于极限函数 $D_x^\alpha\varepsilon$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 1)$, $D_x^\alpha u(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 和 $D_x^\alpha u_t$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$. 从 $k=5$ 的式 (5.6.78)–(5.6.83) 推出, 当 $s\to\infty$ 时, 子序列 $\{D_x^\alpha\varepsilon_s\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 和 $\{D_x^\alpha u_s\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 分别在 $L^\infty([0,t_{b^*}];L^2(-L,L)\times(-L,L))$ 中弱 $*$ 收敛于极限函数 $D_x^\alpha\varepsilon$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 和 $D_x^\alpha u$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$, 子序列 $\{D_x^\alpha\varepsilon_{st}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 和 $\{D_x^\alpha u_{st}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 分别在 $L^\infty([0,t_{b^*}];L^2((-L,L)\times(-L,L))$ 中弱 $*$ 收敛于极限函数 $D_x^\alpha\varepsilon_t$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 3)$ 和 $D_x^\alpha u_t$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 以及子序列 $\{D_x^\alpha u_{stt}\}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$ 在 $L^\infty([0,t_{b^*}];L^2((-L,L)\times(-L,L))$ 中弱 $*$ 收敛于极限函数 $D_x^\alpha u_{tt}$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant 5)$. 所以如果 $k\geqslant 5$, 则 Cauchy 问题 (5.6.3),(5.6.4),(5.6.7) 存在局部广义解 $(\varepsilon(x,t),u(x,t))$.

类似地, 可以证明, 如果 $k\geqslant 6$, 则 Cauchy 问题 (5.6.3),(5.6.4),(5.6.7) 存在局部古典解 $(\varepsilon(x,t),u(x,t))$. 该解有定理 5.6.4 中所述的解的正则性.

显然, Cauchy 问题 (5.6.3), (5.6.4), (5.6.7) 的局部广义解或局部古典解是唯一的. □

5.6.4 与本节内容有关的文献

本节内容取材于文献 [335]. 与本节内容有关的文献见 [6], [24], [28], [31], [32], [41], [134], [237], [241], [337]–[339].

参考文献

[1] 拉迪任斯卡娅 O A, 乌拉利采娃 H H. 线性和拟线性椭圆型方程. 严子谦, 等, 译. 北京: 科学出版社, 1987.

[2] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.

[3] 陈亚浙, 吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组. 北京: 科学出版社, 1997.

[4] 王明新. 非线性椭圆型方程. 北京: 科学出版社, 2010.

[5] Ladyženskaja O A, Solonnikov V A, Uralćeva N N. Linear and Quasilinear Equaitons of Parabolic Type. Transl. Math. Mono. Vol. 23. Providence: American Mathematical Society, 1968.

[6] 弗里德曼. 抛物型偏微分方程. 北京: 科学出版社, 1984.

[7] 辜联崑. 二阶抛物型偏微分方程. 厦门: 厦门大学出版社, 1995.

[8] 王明新. 非线性抛物型方程. 北京: 科学出版社, 1993.

[9] 叶其孝, 李正元, 王明新, 吴雅萍. 反应扩散方程引论. 北京: 科学出版社, 2011.

[10] 伍卓群, 赵俊宁, 尹景学, 李辉来. 非线性扩散方程. 长春: 吉林大学出版社, 1996.

[11] 伍卓群, 尹景学, 王春朋. 椭圆与抛物型方程引论. 北京: 科学出版社, 2003.

[12] Zhou Y L. Applications of Discreate Functional Analysis to the Finite Difference Method. Beijing: International Academic Publishers, 1990.

[13] Lions J L. Quelques Méthods de résolution des Probléme aux limites nonlinéarires. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969 (非线性边值问题的一些解法. 郭柏灵, 汪礼礽, 译, 广州: 中山大学出版社, 1992).

[14] Michael E J. Partial Differential Equations I-III. New York: Springer-Verlag, 1999.

[15] 奥列尼克 O A, 拉德克维奇 E B. 具非负特征形式的二阶微分方程. 辜联崑, 等, 译. 北京: 科学出版社, 1986.

[16] 郭柏灵. 粘性消去法和差分格式的粘性. 北京: 科学出版社, 1993.

[17] 苗长兴. 调和分析及其在偏微分方程中的应用. 2 版. 北京: 科学出版社, 2004.

[18] 苗长兴, 张波. 偏微分方程的调和分析方法. 北京: 科学出版社, 2008.

[19] 苗长兴. 非线性波动方程的现代方法. 2 版. 北京: 科学出版社, 2010.

[20] 苗长兴, 吴家宏, 章志飞. Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用. 北京: 科学出版社, 2012.

[21] Evans L C. Partial Differential Equations Vol. 19. Providence RI: American Mathematical Society, 1999.

[22] Lions J L, Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I-III. New York: Springer-Verlag, 1972.

[23] 董光昌. 非线性二阶偏微分方程. 北京: 清华大学出版社, 1988.

[24] Vejvoda O. Partial Differential Equations: Time-Periodic Solutions. The Hague, Boston, London: Martinus Nijhoff Publishers, 1982.

[25] 李大潜, 陈韵梅. 非线性发展方程. 北京: 科学出版社, 1997.

[26] Bergh J, Löfstöm J. Interpolation Space. New York: Springer-Verlag, 1976.

[27] 陈国旺. 索伯列夫空间导论. 北京: 科学出版社, 2013.

[28] Reed M, Simon B. Mehtod of Modern Mathematical Physics. New York, London: Academic Press, 1972.

[29] Klainerman S. Global existence for nonlinear wave equations. Comm. Pure Appl. Math., 1980, 33: 43–101.

[30] Wang S B, Chen G W. Small amplitude solutions for the generalized IMBq equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 274: 846–866.

[31] 孙和生. 半线性退化发展方程的混合初边值问题. 数学年刊, 1987, 8A(1): 32–43.

[32] Makhankov V G. Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems). Physics Reports, 1978, 35(1): 1–128.

[33] Clarkson A, LeVeque R J, Saxton R. Solitary-wave interactions in elastic rods. Studies in Appl. Math., 1986, 75: 95–122.

[34] Zauderer E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. New York: Wiley, 1983.

[35] Chen G W, Wang S B. Existence and nonexistence of global solutions for the generalized IMBq equation. Nonlinear Analysis TMA, 1999, 36: 961–980.

[36] Bona J L, Sachs R L. Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq euqation. Comm. Math. Phy., 1988, 118:15–29.

[37] Glassey R T. Blow-up theorem for nonlinear wave equations. Math. Z., 1973, 132: 182–203.

[38] Sachs R L. On the blow up of certain solution of the “good” Boussinesq equation. Appl. Anal., 1990, 34: 145–152.

[39] Tsutsumi M, Matahashi T. On the Cauchy problem for the Boussinesq type equation. Math. Japonica, 1991, 26(2): 371–379.

[40] 朱位秋. 弹性杆中的非线性波. 固体力学学报, 1980, (2): 247–253.

[41] Chen G W, Yang Z J, Zhao Z C. Initial value problems and first boundary problems for a class of quasilinear wave equations. Acta Math. Appl. Sinica, 1993, 9: 289–301.

[42] Hrusa W J. Global existence and asymptotic stability for a semilinear hyperbolic Volterra equation with large initial data. SIAM J. Math. Anal.,1985, 16: 110–134.

[43] Levine H A. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations. SIAM J. Math. Anal., 1974, 5: 138–146.

[44] Levine H A. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathscr{F}(u)$. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 192: 1–21.

[45] Chen X Y. Existence and nonexistence on global solution for nonlinear evolution equation of fourth order. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 2001, 16(3): 251–258.

[46] Chen G W, Wang S B. Existence and non-existence of global solutions for nonlinear hyperbolic equations of higher order. Comment. Math. Univ. Carolinae, 1995, 36(3): 475–487.

[47] Chen G W, Hou C S. Initial value problem for a class of fourth-order nonlinear wave equations. Appl. Math. Mech. (English Edition), 2009, 30(3): 391–401.

[48] An L J, Peire A. A weakly nonlinear analysis of elasto-plastic-micrestructure models. SIAM J. Appl. Math., 1995, 55: 136–155.

[49] Adams R A, Fournier J F. Sobolev Spaces. 2nd ed. New York: Academic Press, 2003.

[50] Chen G W, Yang Z J. Existence and non-existence of global solutions for a class of non-linear wave equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2000, 23: 615–631.

[51] Berrgman J. Stability of solitary waves in shallow water. Phys. Fluids, 1976, 19: 771–777.

[52] Bona J L. On the stability theory of solitary waves. Proc. Roy. Soc. Lond, 1975, A 344: 363–374.

[53] Chen G W, Xing J S, Yang Z J. Cauchy problem for generalized IMBq equation with several variables. Nonlinear Anal. TMA, 1996, 26: 1255–1270.

[54] Fan Y, Grillakis M G. Existence and uniqueness for Boussinesq type equations on a circle. Comm. Paritial Differentions, 1996, 21: 1253–1271.

[55] Liu Y. Instability of solitary waves for generalized Boussinesq equations. J. Dyn. Differential Equations, 1993, 53: 537–558.

[56] Liu Y. Decay and scattering of small solutions of a generalized Boussinesq equation. J. Funct. Anal., 1997, 147: 51–68.

[57] Masayoshi T, Tomomi M. On the Cauchy problem for the Boussinesq type equation. Math. Japonica, 1991, 26: 371–379.

[58] Warnecke S G. Über das homogene Dirichlet-Problem bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom Type der Boussinesq-Gleichung. Math. Meth. in the Appl. Sci., 1987, 9: 493–519.

[59] Yang Z J. Existence and non-existence of global solutions to a generalized modification of the improved Boussinesq equation. Math. Meth. in the Appl. Sci., 1998, 21: 1467–1477.

[60] Linares F. Global existence of small slolutions for a generalized Boussinesq equation. J. Differential Equations, 1993, 106: 257–293.

[61] Chen X Y, Chen G W. Asymptotic behavior and blow-up of solutions to a nonlinear evolution equation of fourth order. Nonlinear Analysis TMA, 2008, 68: 892–904.

[62] Pasternak N L. New Method for Calculation of Foundtion on the Elastic Basement (in Russian). Moscow: Gosstroiizdat, 1954.

[63] Samsonov A M, Sokurinskaya E V. Energy exchange between nonlinear waves in elastic waveguides and external media//Engelbrecht J, ed. Nonlinear Waves in Active Media. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[64] Samsonov A M. Nonlinear strain waves in elastic waveguide//Jeffrey A, Engelbrecht J, ed. Nonlinear waves in Solids, in CISM Courses and Lecture, Vol. 341. Wien: Springer-Verlag, 1994.

[65] Chen G W, Wang Y P, Wang S B. Initial boundary value problem of the generalized cubic double dispersion equation. J. Math. Anal. Appl., 2004, 299: 563–577.

[66] Dodd R, Eilbeck J C, Gibbon J D. Solitons and Nonlinear Wave Equations. New York: Academic Press, 1982.

[67] Samsonov A M. On existence of longitudinal strain solutions in an infinite nonlinearly elastic rod. Soviet Phys. Dokl., 1988, 4: 298–300.

[68] Boussinesq J V. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce cannal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J. Math. Pure Appl., 1872, 17: 55–108.

[69] Kano T, Nishida T. A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves. Osaka J. Math., 1986, 23: 389–413.

[70] Porubov A V. Strain solitary waves in an elastic rod with microstructure. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 2000, 58: 189–198.

[71] Mangin G A. Physical and Mathematical Models of Nonlinear Wave in Solid. Amsterdam: Elsevier, 1994.

[72] Samsonov A M. On Same Exact Travelling Wave Solutions for Nonlinear Hyperbolic Equation, in Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 227. Longman: Longman Scientific & Technical, 1993.

[73] Samsonov A M, Sokurinskaya E V. On the excitation of a longitudinal deformation soliton in a nonlinear elastic rod. Soviet Phys. Tech. Phys., 1988, 33: 987–991.

[74] Fan X, Tian L. Compaction solutions and multiple compaction solutions for a continuum Toda latttice model. Chaos Solitons Fractals, 2006, 29: 882–894.

[75] Banks H T, Gilliam D S, Shubov V I. Global solvability for damped abstract nonlinear hyperbolic systems. Differential and Integral Equations, 1997, 10(2): 309–332.

[76] Banks H T, Gilliam D S, Shubov V I. Well-posedness for a One Dimensional Nonlinear Beam, in "Computation and Control IV", Progess in Systems and Control Theory 20. Boston: Birkhäuser, 1995.

[77] Chen G W. Initial boundary value problem for a damped nonlinear hyperbolic equation. J. Partial Diff. Eqs., 2003, 16(1): 49–61.

[78] Banks H T, Ito K, Wang Y. Well-posedness for damped second order system with unbounded input operators. Differential and Integral Equations, 1995, 8: 587–606.

[79] Banchau A, Hong C H. Nonlinear composite beam theory. ASME J. Applied Mechanics, 1988, 55: 156–163.

[80] Luo S Y, Chou T S. Finite deformation and nonlinear elastic behavior of flexible composite. ASME J. Applied Mechanics, 1988, 55: 149–155.

[81] Aassila M, Guesmia A. Energy decay for a damped nonlinear hyperbolic equation. Applied Mathematics Letters, 1999, 12(3): 49–52.

[82] 陈国旺, 吕胜关. 人口问题中三维 Ginzburg-Landau 模型方程的初边值问题. 应用数学学报, 2000, 23(1): 45-54.

[83] Andrews G. On the existence of solutions to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$. J. Differential Equations, 1980, 35: 200–231.

[84] Andrews G, Ball J M. Asymptotic behavior and changes in phase in one-dimensional nonlinear viscoelasticity. J. Differential Equations, 1982, 44: 306–341.

[85] Kawashima S, Shibata Y. Global existence and exponential stability of small solutions to nonlinear viscoelasticity. Comm. Math. Phys., 1992, 148: 189–208.

[86] Clements J. Existence theorems for a quasilinear evolution equation. SIAM. J. Math., 1974, 26: 745–752.

[87] Yang Z J, Chen G W. Global existence of solutions for quasi-linear wave equations with viscous damping. J. Math. Anal. Appl., 2003, 285: 604–618.

[88] Ang D D, Dinh A P N. Strong solutions of a quasilinear wave equation with nonlinear damping. SIAM J. Math. Anal., 1988, 19: 337–347.

[89] Greenberg J M, MacCamy R C, Mizel V J. On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xxt} = \rho_0 u_{tt}$. J. Math. Mech., 1968, 17: 707–728.

[90] Webb G F. Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation. Canad. J. Math., 1980, 32: 631–643.

[91] Yamada Y. Some remark on the equation $Y_{tt} - \sigma(Y_x)Y_{xx} - Y_{xx}t = f$. Osaka J. Math., 1980, 17: 303–323.

[92] Yang Z J, Song C M. Blow up of solutions for a class of quasilinear evolution equatons. Nonlinear Anal. TMA, 1997, 28: 2017–2032.

[93] Chen G W, Yue H Y, Wang S B. The initial boundary value problem for quasi-linear wave equation with viscous damping. J. Math. Anal. Appl., 2007, 331: 823–837.

[94] Yang Z J. On local existence of solutions of initial boundary value problem for the "bad" Boussinesq-type equation. Nonlinear Anal. TMA, 2002, 51: 1259–1271.

[95] Bona J L, Smith R A. A model for the two-way propagation of water waves in channel. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1976, 79: 167–182.

[96] Clarkson P A. New exact solution of the Boussineaq equations. European J. Appl. Math., 1990, 1: 279–300.

[97] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation. J. Math. Phys., 1983, 30: 2201–2213.

[98] Defrutos J, Ortega T, Sanz-Serna J M. Pseudospectral method for the "good" Boussinesq equation. Math. Comp., 1991, 57: 109–122.

[99] Deift P, Tomei C, Trubowitz E. Inverse scattering and the Boussinesq equation. Comm. Prue. Appl. Math., 1982, 35: 567–628.

[100] Kalantarov V K, Ladyzhenskaya O A. Occurrence of blow-up for quasi linear partial differential equations of parabolic and hyperbolic types. Zap. Nauk. Som. Lomi., 1977, 69: 77–102.

[101] Kalantarov V K, Ladyzhenskaya O A. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types. J. Soviet Math., 1978, 10: 53–78.

[102] Levine H A, Sleeman B D. A note on the non-existence of global solutions of initial boundary value problems for the Boussinesq equation $u_{tt} = 3u_{xxxx} + u_{xx} - 12(u^2)_{xx}$. J. Math. Anal. Appl., 1985, 107: 206–210.

[103] Pani A K, Sarange H. Finite element Galerkin method for the "good" Boussinesq equation. Nonlinear Anal. TMA, 1997, 29: 937–956.

[104] Varlamov V. Existence and uniqueness of a solution to the Cauchy problem for the damped Boussinesq equation. Math. Methods Appl. Sci., 1996, 19: 639–649.

[105] 杨志坚, 陈国旺. 一类广义 Boussinesq 方程解的 Blow up. 数学物理学报, 1996, 16(1): 31–39.

[106] Sattinger D H. On global solution of nonlinear hyperbolic equations. Arch. Rational Mech. Anal., 1968, 30: 148–172.

[107] 张宏伟, 陈国旺. 一类非线性四阶波动方程的位势井方法. 数学物理学报, 2003, A23 (6): 758–768.

[108] Tsutsumi M. On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space. Math. Japon, 1972, 17: 173–193.

[109] Ebihara Y, Nakao M, Nanbu T. On the existence of global classical solution of initial boundary value problem for $\Box u - u^3 = f$. Pacific J. Math., 1975, 60: 63–69.

[110] Miranda M M, Medeiros L A. On the existence of global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon equations. Funk. Ekvac, 1987, 30: 134–145.

[111] Ikehata R. A note on the global solvability of solutions to some nonlinear wave equations with dissipative terms. Diff. Integ Equa., 1995, 8: 607–616.

[112] Park J Y, Bae J J. On the existence of solutions of quasilinear wave equations with viscosity. J. Korean Math. Soc., 2000, 37(3): 339–358.

[113] Chen G W, Wang Y P. A note on "On the existence of solutions of quasilinear wave equations with viscosity". Nonlinear Analysis TMA, 2008, 68: 609–620.

[114] Greenberg J. On the existence, uniqueness and stability of equation $\rho X_{tt} = E(X_x)X_{xx} + \lambda X_{xxt}$. J. Math. Anal. Appl., 1968, 25: 575–591.

[115] Alikakos N D, Rostamian R. Gradient estimates for degenerate diffusion equations. Math. Ann., 1982, 259: 53-70.

[116] Engler H. Grandient estimates for solutions of parabolic equations and systems. J. Math. Anal. Appl., 1990, 47: 309–329.

[117] Mizohata K, Ukai S. The global existence, uniqueness of small amplitude solutions to the nonlinear acoustic wave equations. J. Math. Kyoto Univ., 1993, 33: 505–522.

[118] Makao M. Energy decay for the quasilinear wave equation with viscosity. Math. Z., 1995, 219: 289–299.

[119] Nakao M. On strong solutions of the quasilinear wave equation with viscosity. Adv. Math. Sci. Appl., 1996, 6: 267–278.

[120] Matsuyama T, Ikehata R. On global solutions and energy decay for the wave equations of Kirchhoff type with nonlinear damping terms. J. Math. Anal., 1996, 204: 729–753.

[121] Narasimha K. Nonlinear vibration of an elastic string. J. Sound Vibration, 1968, 8: 134–146.

[122] Ladyzhenskaya O A. The Boundary Value Problem of Mathematical Physics. New York: Springer-Verlag, 1985.

[123] Yang Z J. Global existence, asymptotic behavior and blowup of solutions for a class of nonlinear wave equations with dissipative term. J. Differential Equations, 2003, 187: 520–540.

[124] Ang D D, Dinh A P N. On the strongly damped wave equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t + f(u) = 0$. SIAM J. Math. Anal., 1988, 19: 1409–1418.

[125] Aviles P, Sandefur J. Nonlinear second order equation with applications to partial differential equations. J. Differential Equations, 1985, 58: 404–427.

[126] Nakao M, Ono K. Existence of global solutions to the Cauchy problem for the semilinear dissipative wave equations. Math. Z., 1993, 214: 325–342.

[127] Nishihara K. Asymptotic behavior of solutions of quasilinear hyperbolic equaitons with linear damping. J. Differential Equations, 1997, 137: 384–395.

[128] Ono K. Global existence, asymptotic behavior, and global non-exixtence of solution for damped non-linear wave equations of Kirchhoff type in the whole space. Math. Meth. Appl. Sci., 2000, 23: 535–560.

[129] 周毓麟, 符鸿源. 广义 Sine-Gordon 型非线性高阶双曲型方程组. 数学学报, 1983, 26: 234–249.

[130] Payne L E, Sattinger D H. Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. Israel J. Math., 1975, 22: 273–303.

[131] Liu Y C, Xu R Z. A class of fourth order wave equations with dissipative and nonlinear strain terms. J. Differential Equations, 2008, 244: 200–228.

[132] Lin Q, Wu Y, Lai S. On global solution of an initial boundary value problem for a class of damped nonlinear equations. Nonlinear Anal. TMA, 2008, 69: 4340–4351.

[133] Liu Y C, Xu R Z. Fourth order wave equations with nonlinear strain and source terms. J. Math. Anal. Appl., 2007, 331: 585–607.

[134] Bogoluosksy J L, Makhankov V G. Dubna: Preprint JINR E4-9425, 1975.

[135] Esquivel-Avila J A. Dynamics around the ground state of a nonlinear evolution equation. Nonlinear Anal. TMA, 2005, 63(5-7): 331–343.

[136] Tsutsumi M. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations. Publ. RTMS, 1972/1973, 8: 211–229.

[137] Marcelo Cavalcanti M, Domingos Cavalcanti Valéria N. Existence and asymptotic stability for evolution problems on manifolds with damping and source terms. J. Math. Anal., 2004, 291: 109–127.

[138] Marcelo Cavalcanti M, Domingos Cavalcanti Valérin N, Martinez P. Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term. J. Differential Equations, 2004, 203: 119–158.

[139] Zhang J. On the standing wave in coupled non-linear Klein-Gordon equations. Math. Methods Appl. Sci., 2003, 26(1): 11–25.

[140] Vitillaro E. A potential well theory for the wave equation with nonlinear source and boundary damping terms. Glasgow Math. J., 2002, 44(3): 375–395.

[141] Ono K. On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate non-linear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation. Math. Methods Appl. Sci., 1997, 20(2): 151–177.

[142] Esquivel-Avila J A. Qualitative analysis of a nonlinear wave equation. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2004, 10(3): 787–804.

[143] Esquivel-Avila J A. A characterization of global and nonglobal solutions of nonlinear wave and Kirchhoff equations. Nonlinear Anal. TMA, 2003, 52: 1111–1127.

[144] Filippo Gazzola, Marco Squaaina. Global solutions and finite time blow up for damped semiliner wave equations. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 2006, 23(2): 185–207.

[145] Liu L, Wang M. Global solutions and blow-up of solutions for some hyperbolic systems with damping and source terms. Nonlinear Anal. TMA. 2006, 64: 69–91.

[146] Gan Z H, Zhang J. Instability of standing waves for Klein-Gordon-Zakharov equations with different propagation speeds in three space dimension. J. Math. Anal. Appl., 2005, 307: 219–231.

[147] Liu Y C. On potential wells and vacuum isolating of solutions for semilinear wave equations. J. Differential Equations, 2003, 192: 155–169.

[148] Liu Y C, Zhao J S. Multidimensional viscoelasticity equations with nonlinear damping and source terms. Nonlinear Anal. TMA, 2004, 56: 851–865.

[149] Liu Y C, Zhao J S. Nonlinear parabolic equations with critical initial conditions $J(u_0) = d$ or $I(u_0) = 0$. Nonlinear Anal. TMA, 2004, 58: 873–883.

[150] Rosenau P. Dynamics of nonlinear mass-spring chains near the continumlimt. Phys. Lett., 1986, 118A: 222–227.

[151] Rosenau P. Dynamics of dense lattices. Physical Review B, 1987, 36(11): 5868–5876.

[152] 庄蔚, 杨善通. 弧波在非线性杆中的传播. 应用数学与力学, 1986, 7: 571–581.

[153] 张善元, 庄蔚. 非线性弹性杆中的应变弧波. 力学学报, 1988, 20(1): 58–66.

[154] Pflüger K. Periodic solutions of non-linear anisotropic partial differential equations. Math. Meth. Appl. Sci., 1996, 19: 363–374.

[155] Besov O, Il′in V, Nikol′skij S. Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems Vol. 1. Washington D. C.: Winston, 1978.

[156] Zhang G Q. Critical Point Theory and Its Application. Shanghai: Shanghai Sicence and Technology Press, 1986.

[157] Ambrosetti A, Rabinowtiz P. Dual varitional methods in critical pint theory and applications. J. Funct. Anal., 1973, 14: 349–381.

[158] 王艳萍, 陈国旺. 一类高阶非线性波动方程的时间周期问题. 应用数学学报, 2007, 30(2): 289–296.

[159] Straughan B. Global nonexistence of solutions to some Boussinesq-type equations. J. Math. Phys. Sci., 1992, 26: 155-164.

[160] Liu Y. Existence and blow up of solutions of a nonlinear Pochhammer-Chree equation. Indiana Vniv. Math. J., 1996, 45: 797–816.

[161] Wang S B, Chen G W. The Cauchy problem for the generalized IMBq equation in $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. JMAA, 2002, 266: 38–54.

[162] Zabusky N J. Nonlinear Partial Differential Equations. New York: Academic Press, 1967.

[163] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley-Interscience, 1975.

[164] Chen G W, Wang S B. Cauchy Problem for Generalized IMBq Equation//Guo B, Yang D, ed. Proceedings of the Conference on Nonlinear Partial Differential Equations and Applications. Singgapore: World Scientific, 1998.

[165] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations. Ann. Pisa Scuola Norm. Sup. Pisa, 1959, 13: 115–162.

[166] Klainerman S. Global existence for nonlinear wave equations. Comm. Pure Appl. Math., 1980, 33: 43–101.

[167] Folland G B. Real Analysis Modern: Techniques and Their Applications. New York: Wiley, 1984.

[168] Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970.

[169] Donoghue W F. Distributions and Fourier Transforms. New York: Academic Press, 1969.

[170] Boussinesq M J. Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémo Presented at the Académic des Sciences Inst. France (series), 1877, 23(1): 1–680.

[171] Kevrekidis P G, Kevredidis I G, Bishop A R, Titi E S. Continuum approach to discreteness. Physical Review E, 2002, 65 (4): 046613–1.

[172] 陈国旺. 一类 N 维非线性波动方程的 Cauchy 问题. 数学学报 (中文版), 2012, 55(5): 797–810.

[173] Peter A C, Randall J L, Ralph S. Solitary-wave interactions in elastic rods. Studies in Applied Mathematics, 1986, 75: 95–122.

[174] Akmel Dé G. Blow-up of solutions of a generalized Boussinesq equation. IMA Journal of Applized Mathematics, 1998, 60: 123–138.

[175] Kato T, Ponce G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math., 1988, 41: 891–907.

[176] Arévalo E, Gaididei Y, Mertens F G. Soliton dynamics in damped and forced Boussinesq equations. Eur. Phys. J. B, 2002, 27: 63–74.

[177] Chen G W, Rui W F, Chen X Y. Cauchy problem for a damped generalized IMBq equation. Journal of Methematical Physics, 2011, 52: 053504–19.

[178] Constantin A, Molinet L. The initial value problem for a generalized Boussinesq equation. Diff. Integral Eq., 2002, 15(9): 1061–1072.

[179] Schneider G, Wayne C E. Kawahara dynamics in dispersive media. Physica D, 2001, 152–153: 384-394.

[180] Wang Y Z, Chen X Y. Existence and uniquness of global solutions to a class of Boussinesq type equations. Chinese Journal of Contemporay Mathematics, 2011, 32(4): 347–358.

[181] Linares F, Scialom M. Asymptotic behavior of solution of a generalized Boussinesq type equaiton. Nonlinear Analysis TMA, 1998, 25: 1147–1158.

[182] Liu F L, David L R. Solutions of the Boussinesq equation on a periodic domain. JMAA, 1995, 192: 194–219.

[183] Liu Y. Instability and blow up of solutons to a generalized Boussinesq equation. SIAM J. Math. Anal., 1995, 26: 1527–1546.

[184] 杨志坚, 陈国旺. Boussinesq 型方程的周期边界问题与初值问题解的存在性. 应用数学学报, 2000, 23(2): 261–269.

[185] Yang Z J, Wang X. Blow up of solutions for the “bad” Boussinesq type equation. J. Math. Anal. Appl., 2003, 285: 282–298.

[186] Chen W Y, Zhou Y. Global nonexistence for a semilinear Petrovsky equaton. Nonlinear Anal., 2009, 70: 3203–3208.

[187] Liu X F, Zhou Y. Global nonexistence of solutions to a semilinear wave equation in the Minkowski space. Appl. Math. Lett, 2008, 21: 849–854.

[188] Zhou Y. Global existence and nonexistence for a nonlinear wave equation with damping and source terms. Math. Nachr, 2005, 278: 1341–1358.

[189] Levine H A, Payne L. Nonexistence of global weak solutons for classes of nonlinear wave and parabolic equations. J. Math. Anal. Appl., 1976, 55: 329–334.

[190] Wang S B, Chen G W. Cauchy problem of the generalized double dispersion equation. Nonlinear Analysis TMA, 2006, 64: 159–173.

[191] Levine H A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$. Trans. Am. Arch. Rat. Mech. Anal., 1973, 51: 371–386.

[192] Selberg S. Multilinear Space-time estimates and applications to local existence theory for nonlinear wave equations. Ph.D. Thesis, Princeton University, 1999.

[193] Sogge C D. Lectures on Nonlinear Wave Equations. Boston: International Press, 1995.

[194] William F D. Distributions and Fourier Transforms. New York: Academic Press, 1969.

[195] Wang S B, Xu H Y. On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with hydrodynamical damped term. Journal of Differential Equations, 2012, 252: 4243–4258.

[196] Cho Y, Ozawa T. Remarks on modified improved Boussinesq equations in one space dimension. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2006, 462: 1949–1963.

[197] Cho Y, Ozawa T. On small amplitude solutions to the generalized Boussinesq equations. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2007, 17: 691–711.

[198] Fabrizio M, Lazzari B. On the existence and the asymptotic stability of solutions for linear viscoelastic solids. Arch. Ration. Mech. Anal., 1991, 116: 139–152.

[199] Karch G. Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations. Studia Math., 2000, 143: 175–197.

[200] Kato T. On nonlinear Schrödinger equations II. H^s-solutions and unconditional well-posendness. J. Anal. Math., 1995, 67: 281–306.

[201] Lin Q, Wu Y, Loxton R. On the Cauchy problem for a generalized Boussinesq equation. J. Math. Anal. Appl., 2009, 353: 186–195.

[202] Liu Z, Zheng S. On the exponential stability of linear viscoelasticity and thermoviscoelasticity Quart. Appl. Math., 1996, 54: 21–31.

[203] Farah L G, Linares F. Global rough solutions to the cubic nonlinear Boussinesq equation. J. Lond. Math. Soc., 2010, 81(1): 241–254.

[204] Lucas C F Ferreira. Existence and scattering theory for Boussinesq type equations with singular data. J. Differential Equations, 2011, 250: 2372–2388.

[205] Machihara S, Ozawa T. Interpolation inequalities in Besov Spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 2002, 131: 1553–1556.

[206] Matsumura A. On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations. Publ. Res. Math. Sci., 1976, 12: 169–189.

[207] Polat N. Existence and blow up of solution of Cauchy problem of the generalized damped multidimensional improved modified Boussinesq equation. Z. Naturforsch A., 2008, 63a: 543–552.

[208] Nishihara K. $L^p - L^q$ estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their applications. Math. Z., 2003, 244: 631–649.

[209] Rivera J E M. Asymptotic behavior in linear viscoelasticity. Quart. Appl. Math., 1994, 52: 628–648.

[210] Scott Russel J. On waves//Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London: John Murray, 1845.

[211] Todorova G, Yordanov B. Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping. J. Differential Equations, 2000, 174: 464–489.

[212] Varlamov V V. Eigenfunction expansion method and the long-time asymptotics for the damped Boussinesq equation. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2001, 7(4): 675–702.

[213] Sugitani Y, Kawashima S. Decay estimates of solutions to a semi-linear dissipative plate equation. J. Hyperbolic Differ. Eqns., 2010, 7(3): 471–501.

[214] Aassila M. Decay of solutions of some nonlinear equations. Portugallae Math., 2003, 60: 389–409.

[215] Wang S B, Da F. On the asymptotic behaviour of solution for the generalized double dispersion equation. Applicable Analysis: An International Journal, 2012, 1: 1–15.

[216] Polat N, Ertas, A. Existence and blow-up of soluiton of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation. J. Math. Anal., 2009, 349: 10–20.

[217] Xu R Z, Liu Y C, Yu T. Global existence of solution for Cauchy problem of multidimensional generalized double dispersion equations. Nonlinear Anal. TMA, 2009, 71: 4977–4983.

[218] Boussinesq J V. Théorie de l′intumescence liquide appelée onde solitaire ou translation, se propageant dans un canal rectangulaire. Comp. Rend. Hebd. des Seances de l′Acad. des Sci., 1871, 72: 755–759.

[219] Boussinesq J V. Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal. Comp. Rend. Hebd. des Seances de l′Acad. des Sci., 1871, 73: 256–260.

[220] Bona J L, Chen M, Saut J C. Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media 1: derivation and the linear theory. Journal of Nonlinear Science, 2002, 12: 283–318.

[221] Christov C I. An energy-consistent dispersive shallow-water model. Wave Motion, 2001, 34: 161–174.

[222] Benney D, Luke J C. On the interactions of permanent waves of finite amplitude. J. Math. Phys., 1964, 43: 309–313.

[223] Pego R L, Quintero J R. Two dimensional solitary waves for a Benney-Luke equation. Physica D, 1999, 132: 476–496.

[224] Tao T. Multilinear weighted convolution of L^2 functions and application to nonlinear dispersive equations. Am. J. Math., 2001, 122: 839–908.

[225] Paumond L. A rigorous link between K P and a Benney-Luke equation. Diff. Integral Eq., 2003, 16: 1039–1064.

[226] Wang S B, Xu G X, Chen G W. Cauchy problem for the generalized Benney-Luke equation. Journal Mathematical Physics, 2007, 48: 073521–16.

[227] Jaunzemis W. Continuum Mechanics. New York: Macmillan, 1967.

[228] Love A E H. Mathematical Theory of Elasticity. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.

[229] Mariş M. Analyticity and decay properties of the solitary waves to the Benney-Luke equation. Diff. Integral Eq., 2001, 14: 361–384.

[230] Milewski P A, Keiler J B. Three dimensional water waves. Stud. App. Math., 1996, 37: 149–166.

[231] Pego R L, Quintero J R. A host of traveling waves in a model of three-dimensional water-wave dynamics. J. Nonlinear Sci., 2002, 12: 59–83.

[232] Quintero J R. Existence and analyticity of lump solution for generalized Benny-Luke equations. Revista Colombiana de Matemátias, 2002, 36: 71–95.

[233] Quintero J R. Nonlinear stability for a 2-D Benney-Luke equation. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2005, 13: 203–218.

[234] Quintero J R. Nonlinear stability of a one-dimensional Boussinesq equation. J. Dyn. Differ. Equ., 2003, 15: 125–142.

[235] Soerensen M P, Christiansen P L, Lohmdahl P S. Solitary waves on nonlinear elastic rods I. J. Acoust. Soc. Amer., 1984, 76: 871–879.

[236] 宋健, 于景元. 人口控制论. 北京：科学出版社, 1985.

[237] Maźja V G. Sobolev Spaces. New York: Springer-Verlag, 1985.

[238] Chen G W, Xue H X. Periodic boundary value problem and Cauchy problem of the generalized cubic double dispersion equation. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28B(3): 573–587.

[239] 韩献军, 陈国旺. 一类非线性高阶波动方程的初边值问题. 数学物理学报, 2007, 27A(4): 624–640.

[240] Zakharov V E. Collapse of Langmuir waves. Sov. Phys JETP, 1972, 35: 908–914.

[241] Yosida K. Functional Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[242] 王耀东. 偏微分方程的 L^2 理论. 北京: 北京大学出版社, 1989.

[243] Banks H T, Gilliam D S, Shubov V I. Global solvability for damped abstract nonlinear hyperbolic systems. Differential Integral Equations, 1997, 10(2): 309–332.

[244] Aassila M, Guesmia A. Energy decay for a damped nonlinear hyperbolic equation. Appl. Math. Lett., 1999, 12(3): 49–52.

[245] Chen G W, Wang Y P, Zhao Z C. Blow-up of solution of an initial boundary value problem for a damped nonlinear hyperbolic equaition. Appl. Math. Lett., 2004, 17: 491–497.

[246] Xu R Z, Liu Y C. Asymptotic behavior of solutions for initial-boundary value problems for strongly damped nonlinear wave equations. Nonlinear Anal. TMA, 2008, 69: 2492–2495.

[247] Chen G W, Da F. Blow-up of solution of Cauchy problem for three-dimensional damped nonlinear hyperbolic equation. Nonlinear Analysis TMA, 2009, 71: 358–372.

[248] Banks H T, Gillam D S, Shubov V I. Well-posedness for A One Dimensional Nonlinear Beam//Computation and Control IV, Progress in Systems and Control Theory, Vol.20. Boston, MA: Birklauser, 1995.

[249] Ackleh A S, Banks H T, Pinter G A. A nonlinear beam equation. Appl. Math. Lett., 2002, 15(3): 381–387.

[250] 陈翔英. 具有阻尼的非线性双曲型方程的 Cauchy 问题. 郑州大学学报 (理学版), 2002, 34(3): 8–12.

[251] Zhou Y L. Initial value problem for a nonlinear degenerate systems of filtration type. Chinese Ann. Math., 1984, 5B(4): 633–652.

[252] Stein E M. Harmonic Analysis: Real-Variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1993.

[253] Zhu Y B. Global existence of small amplitude solution for the generalized IMBq equation. J. Math. Anal. Appl., 2008, 340: 304–321.

[254] Coifman R R. Meyer Y. Nonlinear Harmonic Analysis Operator Theory and P. D. E.//Beijing Lectures in Harmonic Analysis. Princetion, New Jersey: Princeton University Press, 1986.

[255] Biler P. Decay of solutions of semilinear strongly damped generalized wave equation. Math. Meth. Appl. Sci., 1991, 14(6): 427–444.

[256] Naumkin P, Shishmarëv I. Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves. Transl. of Math. Monographs, Vol. 133. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1994.

[257] 杨志坚, 陈国旺. 具有阻尼项的非线性波动方程的初值问题. 应用数学学报, 2000, 23(1): 45–54.

[258] Liu Y C, Xu R Z. Global existence and blow up of solutions for Cauchy problem of

generalized Boussinesq equation. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2008, 237: 721–731.

[259] Liu Y C, Xu R Z. Wave equations and reaction-diffusion equations with several nonlinear source terms. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2007, 28: 1209–1218.

[260] Liu Y C, Xu R Z. Wave equations and reaction-diffusion equations with several nonlinear source terms of different sign. Discrete and Continuous Dynamical System-Series B, 2007, 7: 171–189.

[261] Liu Y. Instability and blow-up of solutions to a generalized Boussinesq equation. SIAM Journal of Mathematical Analysis, 1995, 26: 1527–1546.

[262] Xu R Z. Cauchy problem of generalized Boussinesq equation with combined power-type nonlinearities. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2011, 34: 2318–2328.

[263] Liu F, Russell D L. The Boussinesq equation on a periodic domain. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 194: 78–102.

[264] Angulo J, Scialom M. Improved blow-up of solutions of a generalized Boussinesq equaiton. Computational and Applied Mathematics, 1999, 18: 333–341.

[265] Lin Q, Wu Y H, Loxton R. On the Cauchy problem for a generalized Boussinesq equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 353: 186–195.

[266] Xue R. Local and global existence of solutions for the Cauchy problem of a generalized Boussinesq equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 316: 307–327.

[267] Li K. Existence and nonexistence of global solutions for the equation of dislocation of crystals. Journal of Differential Equations, 2006, 146: 5–21.

[268] Vuillermot P A. Small Divisors and the Construction of Stable Manifolds for Nonlinear Klein-Gordon Equations on $R_0^* \times R$//Murthy M K V, Spagnolo S, ed. Nonlinear Hyperbolic Equations and Field Theory. New York: Guildford, 1992.

[269] Tao T, Visan M, Zhang X. The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities. Communications in Partial Differential Equations, 2007, 32: 1281–1343.

[270] Bona J L, Luo L. Asymptotic decomposition of nonlinear, dispersive wave equations with dissipation. Phys. D, 2001, 152-153: 363–383.

[271] Padorn V. Sobolev regularization of some nonlinear ill-pose problems. Ph. D. thesis, University of Minnesota, Minneapolis, 1990.

[272] Davis P L. A quasilinear parabolic and a related third order problem. J. Math. Anal. Appl., 1992, 40(2): 327–335.

[273] Benjamin T B, Bona J L, Mahong J J. Moden equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philos. R. Soc. Lond., 1972, Ser. A 272: 47–78.

[274] Medeiros L A, Perla Menzala G. Existence and uniqueness for periodic solutions of the Benjamin-Bona-Mahong equations. SIAM J. Math. Anal., 1977, 8: 792–799.

[275] Albert J. Dispersion of low energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahong equation. J. Differential Equations, 1986, 63: 117–134.

[276] Albert J. On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahong equation. J. Math. Appl., 1989, 141: 527–537.

[277] Amick J, Bona J L, Schnbek M. Decay of solutions of some nonlinear wave equations. J. Differential Equations, 1989, 81: 1–49.

[278] Biler P. Long time behavior of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahong equaiton in two space dimensions. Differential Integral Equations, 1992, 5: 891–901.

[279] Zhang L H. Decay of solutions of generalized Benjamin-Bona-Mahong-Burger equation. Acta Math. Sinica, 1994, 10: 428–438.

[280] Zhang L H. Decay of solutions of generalized Benjamin-Bona-Mahong-Burgers equations in n-space dimensions. Nonlinear Anal. TMA, 1995, 25: 1343–1369.

[281] Chen G W, Xue H X. Global existence of solution of Cauchy problem for nonlinear pseudo-parabolic equaiton. J. Differential Equatons, 2008, 245: 2705–2722.

[282] Geng S F, Chen G W. Global Existence of solutions of Cauchy problem for generalized BBM-Burgers equation. Acta Mathematica Scientia, 2013, 33B(4): 1007–1023.

[283] Zhao H J. Optimal termporal decay estimates for the solution to the solution to the multidimensional generalized BBM-Burgers equations with dissipative term. Appl. Anal., 2000, 75(1/2): 85–103.

[284] Zhao H J. Xuan B J. Existence and convergence of solutions for the generalized BBM-Burgers equations with dissipative term. Nonlinear Analysis TMA, 1997, 28(11): 1835–1849.

[285] Zhao H J. Existence and convergence of solutions for the generalized BBM-Burgers equations with dissipative term II: the multidimensional case. Appl. Anal., 2000, 75(1/2): 107–135.

[286] Tanabe H. Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations. New York: Marcel Dekker, Inc., 1997.

[287] Zeidler E, Boron L F. Nonlinear Functional Analysis and its Applications 11/B: Nonlinear Monotone Operators. New York: Springer-Verlag, 1990.

[288] Cohen D S, Murray J D. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population. J. Math. Biol., 1981, 12: 237–249.

[289] 陈国旺. 人口问题中的三维 Ginzburg-Landau 模型方程的 Cauchy 问题. 数学年刊, 1999, 20A(2): 143–150.

[290] Liu B P, Pao C V. Integral representation of generalized diffusion model in population problems. Journal of Integral Equations, 1984, 6: 175–185.

[291] Chen G W. Classical global solution of the initial boundary value problem for a class of nonlinear parabolic equations. Comment. Math. Univ. Carolinae, 1994, 35(3): 431–443.

[292] 陈国旺, 孙和生. 广义 Ginzburg-Landau 型非线性高阶抛物型方程的 Cauchy 问题. 数学年刊, 1994, 15A(4): 485–492; Chin. J. Contemp. Math., 1994, 15(3): 275–285.

[293] Zhou Y L, Fu H Y. Initial value problems for the semilinear systems of generalized Schrödinger type of higher order. Proceedings of the 1980 Beijing DD Symposium, 1980: 1713–1730.

[294] 王艳萍, 陈国旺. 人口问题中一广义 Ginzburg-Landau 模型方程的时间周期解. 数学物理学报, 2006, 26A(2): 258–266.

[295] 陈国旺. 关于人口问题中的一广义扩散模型方程的定解问题. 应用数学学报, 1991, 14(4): 500–509.

[296] Zhou Y L. Initial value problem for nonlinear degenerate systems of filtration type. Chin. Ann. of Math., 1984, 5B(4): 633–652.

[297] Cahn J W, Hilliard J E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. J. Chem. Phys., 1958, 28: 258–267.

[298] Novick-Cohen, Segel L A. Nonlinear aspects of the Cahn-Hillard equation. Physica D, 1984, 10(D): 277–298.

[299] Charles M E, Zheng S M. On the Cahn-Hilliard Equation. Arch. Rat. Mech. Anal., 1986, 96: 339–357.

[300] Carr J, Gurtin M E, Slemrod M. Structural phase transitions on a finite interval. Arch. Rational Mech. Anal., 1984, 12: 317–351.

[301] Douglas J Jr, Dupont T, Wahlbin L. Optimal L^∞ error estimates for Galerkin approximations to solutions of two point boundary value problems. Math. Comp., 1975, 29: 475–483.

[302] Hazewinkel M, Kaashoek J F, Leynse B. Pattern formation for a one dimensional evolution equation based on Thom's river basin model. Report ♯8519/B, Econometric Institue, Erasmus University, 1985.

[303] Klainerman S, Ponce G. Global small amplitude solution to nonlinear evolution equations. Comm. Pure. Appl. Math., 1983, 36: 133–141.

[304] Sivashinsky I. On cellular instability in the solidification of a dilute binary ally. Physica D, 1983, 8(D): 243–248.

[305] Zhau Y L. Finite difference method of first boundary problem for quasilinear parabolic systems. Scientia Sinica (Series A), 1985, 28: 368–385.

[306] Guo X L, Li G Q. Finite difference method of first boundary problem of a generalized diffusion model in population. 数学季刊, 1997, 12(1): 52–60.

[307] Zhou Y L. Interpolation formulas of intermediate quotients for discrete functions with several indices. J. Comp. Math., 1984, 2: 376–381.

[308] Muto V. Nonlinear models for DNA dynamis. Ph.D. Thesis, Laboratory of Applied Mathematical Physics. The Technical University of Denmark, DCAMM, Report No. S47, 1988.

[309] Muto V, Scott A C, Christiansen P L. Thermally generated solitons in a Toda lattice model of DNA. Physics Letter, 1989, 136A: 33–36.

[310] Muto V, Scott A C, Christiansen P L. A Toda lattice model for DNA: thermally generated solitons. Physica D, 1990, 44: 75–91.

[311] Christiansen P L, Lomdahl P S, Muto V. On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom. Nonlinearity, 1990, 4: 477–501.

[312] Chen G W, Zhang H W. Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations. Math. Meth. Appl. Sci., 2004, 27: 497–518.

[313] Muto V, Lomdahl P S, Christiansen P L. A two-dimensional discrete model for DNA dynamics: longitudinal wave propagation and denaturation. Physics Review A, Statics Physics Plasmas Fluids Related Interdiscipline Topics (USA), 1990, 42: 7452–7458.

[314] Peyrard M, Bishop A R. Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation. Physics Review Letter, 1989, 62: 2755–2758.

[315] Techera M, Daemen L L, Prohofsky E W. Nonlinear model of the DNA molecula. Physics Review A, 1989, 40: 6636–6642.

[316] Olsen O H, Lomdahl P S, Kerr W C. Localized excitations in a three-dimensional nonlinear model of A 3_{10} Hellix. Physics Letter, 1989, 136A: 402–408.

[317] Chen G W, Guo H X, Zhang H W. Global existence of solutions of Cauchy problem for generalized system of nonlinear evolution equations arising from DNA. Journal of Mathematical Physics 50, 2009, 50: 083514–22.

[318] Wang S B, Li M L. The Cauchy problem for coupled IMBq equations. IMA Journal of Applied Mathematics, 2009, 74(6): 726–740.

[319] Pego R L, Smereka P, Weinstein M I. Oscillatory instability of solitary waves in a continuum model of lattice vibrations. Nonlinearity, 1995, 8: 921–941.

[320] Peyrard M, Bishop A R. Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation. Phys. Rev. Latt., 1989, 62: 2755–2758.

[321] Runst T, Sickel W. Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations. Berlin: Walter de Gruyter, 1996.

[322] Sergel K T. On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom, sufficient criterion of blow-up in the continuum limit. Phys. Lett., 1993, A173: 267–269.

[323] Turitsyn S K. Blow-up in the Boussinesq equation. Phys. Rev. E, 1993, 47: 795–796.

[324] Guo H X, Chen G W. A note on "The Cauchy problem for couple IMBq equations". Acta Mathematica Scientia, 2013, 33B(2): 375–392.

[325] Bourgain J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. GAFA, 1993, 3: 107–156, 209–262.

[326] Hayashi N. Global existence of small analytic solutions to nonlinear Schrödinger equations. Duke Math. J., 1990, 60: 717–727.

[327] Hayashi N, Saitoh S. Analyticity and global existence of small solutions to some nonlinear Schrödinger equations. Comm. Math. Phys., 1990, 129: 27–41.

[328] Shibata Y, Tsutsumi Y. Local existence of solutions for the initial boundary problem of full nonlinear wave equation. Nonlinear Anal. TMA, 1978, 11: 335–565.

[329] Ozawa T. Tsutsumi Y. Existence and smoothing effect of solutions for Zakharov equations. Publ. RIMS. Kyoto University, 1991, 28: 329–361.

[330] Cazenave T, Haraux A. Introduction aux problémes d′evolution semilinéaires. Paris: Ellipses, 1990.

[331] Coifman R, Meyer Y. Wavelets, Calderón-Zygmund and Multilinear Operators. Englank: Cambridge University Press, 1997.

[332] Wang S B, Chen G W. Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger-IMBq equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 2006, 6(1): 203–214.

[333] Bourgain J. Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation. Rhod Island: American Mathematical Society Providence, 1999.

[334] Cazenave T, Weissler F B. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s. Nonlinear Analysis TMA, 1990, 14: 807–836.

[335] Chen G W. Cauchy problem for multidimensional couple system of nonlinear Schrödinger equation and generalized IMBq equation. Comment. Math. University Carolinae, 1998, 39(1): 15–38.

[336] Ginibre J, Tsutsumi Y, Velo G. On the Cauchy problem for the Zakharov system. J. Funct. Anal., 1997, 151(2): 384–463.

[337] Makhankov V G. On stationary solutions of the Schrödinger equation with a self-consistent potential satisfying Boussinesq's equations. Phys. Lett., 1974, 50A: 42–44.

[338] Nishikawa K, Hajo H, Mima K, Ikezi H. Coupled nonlinear electron-plasma and ionacoustic waves. Phys. Rev. Lett., 1974, 33: 148–150.

[339] Makhankov V G. Preprint, JINR E5-8359, Dubna, 1974.

[340] Галеркин Б Г. Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержей и пластин. Вестник инженеров, No 19, 1915, CTP. 897–908.

[341] Ikehata R. Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms. Nonlinear Anal. TMA, 1996, 27: 1165–1175.

[342] Tokio Matsuyama, Ryo Ikehata. On global solution and energy decay for the wave equaitons of Kirchhoff type with nonlinear damping terms. J. Math. Anal.Appl., 1996, 204: 729–753.

[343] Cavalcanti M M, Domingos Cavalcanti V N, Lasiecka I. Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction.

J. Differential Equations, 2007, 236: 407–459.

[344] Xu R Z, Yan Y B. Global existene and asymptotic behaviour of solutions for a class of fourth order strongly damped nonlinear wave equations. Quarterly of Applied Mathematics, 2013, 71(3): 401–415.

[345] Arrieta J, Carvalho A N, Hale J K. A damped hyperbolic equation with critical exponent. Comm. Partial Differ. Eqs., 1992, 17: 841–866.

[346] Belleri V, Pata V. Attractors for semilinear strongly damped wave equation on $\mathbb{R}^3$. Discrete Contin. Dynam. Systems, 2001, 7: 719–735.

[347] Carvalho A N, Cholewa J W. Local well posedness for strongly damped wave equations with critical nonlinearities. Bull. Austral. Math. Soc., 2002, 66: 443–463.

[348] Chen C, Ren L. Weak solution for a fourth-order nonlinear wave equation. J. Southeast Univ., 2005, 21: 369–374.

[349] Gazzola F, Squassina M. Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 2006, 23: 185–207.

[350] Gerbi S, Said-houari B. Exponential decay for solutions to semilinear damped wave equation. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Ser, 2008, 5(3): 559–566.

[351] Levine H A, Pucci P, Serrin J. Some remark on global nonexistence for nonautonomous abstract evolution equations. Contemp. Math., 1997, 208: 253–263.

[352] Levine H A, Serrin J. Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation. Arch. Rational Mech. Anal., 1997, 137: 341–361.

[353] Liu Y, Feng W, Liu D. Strongly damped nonlinear wave equation in arbitrary dimensions(1). Math. Appl., 1995, 8: 262–266.

[354] Liu Y, Liu D. Initial boundary value problem of equation $u_{tt} - \alpha\Delta u_t - \Delta u = f(u)$. J. Huazhong Univ. Sci. Tech., 1988, 16: 169–173.

[355] Liu Y C, Liu P. On potential well and application to strongly damped nonlinear wave equations. Acta Math. Appl. Sin., 2004, 27: 710–722.

[356] Ohta M. Remarks on blowup of solutions for nonlinear evolution equations of second order. Adv. Math. Sci. Appl., 1988, 8: 901–910.

[357] Pata V, Squassina M. On the strongly damped wave equation. Comm. Math. Phys, 2005, 253: 511–533.

[358] Pata V, Zelik S. Smooth attractors for strongly damped wave equations. Nonlinearity, 2006, 19: 1495–1506.

[359] Pucci P, Serrin J. Global nonexistence for abstract evolution with positive initial energy. J. Differential Equations, 1998, 150: 203–214.

[360] Vitillaro E. Global existence theorems for a class of evolution equations with dissipation. Arch. Rational Mech. Anal., 1999, 149: 155–182.

[361] 陈翔英. 具有弱阻尼项的广义 IMBq 方程初值问题的整体存在性. 数学物理学报, 2015, 35A(1): 68–82.

[362] Chen G W, Wang S B, Zhang H W. The initial boundary value problem for n-dimensional generalized IMBq equation. Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 2001, 22(3): 259–268.

[363] Chen G W, Lu B. The initial-boundary value problems for a class of nonlinear wave equations with damping term. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 251: 1–15.

[364] Chen G W, Song R L, Wang S B. Local existence and global nonexistence theorem for a damped nonlinear hyperbolic equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 368: 19–31.

索　　引

(O-6893.31)



科学出版社互联网入口
科学数理分社
电 话：(010) 64019814
Email：lijingke@mail.sciencep.com
销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



定 价：198.00 元